Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д.Н. Прянишникова»

И.М. Глотина

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2024

УДК 519.1
ББК 22.12+22.176
Г 548

Рецензенты:

С.В. Русаков – доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ПГНИУ;

В.В. Аюпов – кандидат технических наук, доцент кафедры техносферной безопасности, физики и математики ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ.

Г 548 Глотина, И.М.

Дискретная математика: учебное пособие / И.М. Глотина; М-во науки и высшего образования РФ, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский государственный аграрно-технологический университет имени академика Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2024. – 155 с.. : ил. ; 21 см. – Библиогр.: с. 151-152. – 30 экз. – ISBN 978-5-94279-624-2. – Текст : непосредственный.

В учебном пособии изложены традиционные разделы дискретной математики: теория множеств, основы комбинаторики, теория графов, теория переключательных функций и основы теории автоматов. Курс содержит теоретический материал, решение задач и задания для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для обучающихся всех форм обучения по направлениям подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии, 09.03.03 Прикладная информатика и 09.03.04 Программная инженерия.

УДК 519.1
ББК 22.12+22.176

Утверждено в качестве учебного пособия Методическим советом ФГБОУ Пермский ГАТУ (протокол № 4 от 08.04.2024 г.).

ISBN 978-5-94279-624 -2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью учебного пособия является приведение в соответствие объема учебного материала и глубины его изложения с требованиями ФГОС ВО для эффективного изучения теоретических основ вычислительной техники и формирования цифрового мышления как необходимого элемента информационной культуры бакалавров по направлениям подготовки 09.03.02 Информационные системы, 09.03.03 Прикладная информатика, 09.04.04 Программная инженерия.

Настоящее учебное пособие предназначено для использования на всех видах занятий по дисциплине «Дискретная математика». Учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины и состоит из пяти глав: элементы теории множеств, элементы комбинаторики, элементы теории графов, основы теории переключательных функций, основы теории автоматов. Может быть использовано наряду с другой учебно-методической литературой по дисциплине.

Представленные в учебном пособии теория, примеры и задачи позволяют успешно овладеть знаниями по изучаемой дисциплине. В пособии представлены решения некоторых задач, а также вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения. В рамках каждой главы рассматривается приложение описанных методов к сложившейся практике их использования в прикладной области.

Математические объекты могут обладать различными свойствами, которые определяют возможность их преобразования, а также использования совместно с другими объектами. Такое отличие в свойствах, прежде всего, связано с числом конкретных значений величин, которые может отражать математический объект. Различают дискретные и непрерывные величины.

Дискретная величина [от лат. discretus – отдельный, отделенный, раздельный] – такая величина, между двумя любыми значениями которой лежит лишь конечное число других ее значений в отличие от величины непрерывной, где число таких значений бесконечно.

Примерами дискретных математических объектов могут выступать: натуральный ряд чисел; конечное множество элементов произвольной природы; слово (последовательность символов), конечный граф и другие. Дискретный объект всегда мыслится, как состоящий из строго отделенных друг от друга неделимых частей.

Технические объекты, в основе функционирования которых используются дискретные во времени и по уровню сигналы, представляют вычислительную и иную цифровую технику. Объекты, использующие непрерывные по уровню и во времени сигналы, являются аналоговыми.

Термин «дискретная математика» начал входить в научный обиход на рубеже 50-х и 60-х гг. XX в. для обозначения ряда разделов математики, таких, как теория булевых функций, теория конечных автоматов, теория графов, теория кодирования и других, которые стали интенсивно развиваться в связи с необходимостью создания сложных систем и развитием вычислительной техники.

Дискретная математика - область математики, занимающаяся изучением свойств объектов дискретного, а равно конечного характера, к которым могут быть отнесены конечные множества, конечные графы, переключательные функции, дискретные автоматы-преобразователи информации и др.

Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку часто возникает необходимость исследования объектов, обладающих как дискретными, так и непрерывными свойствами одновременно.

Дискретная математика является теоретическим фундаментом основ устройства вычислительной и иной цифровой техники и организации общего и прикладного программного обеспечения. Знание теории множеств, теории графов совершенно необходимо для четкой формулировки понятий и постановок различных прикладных задач, их формализации, а также разработки современных информационных технологий.

С древности до наших дней теоретическую базу дискретной математики по крупицам создавали великие математики и логики: Георг Кантор (1845 – 1918), Леонард Эйлер (1707 – 1783): Исаак Ньютон (1642 – 1727), Блез Паскаль (1623 – 1662), Джордж Буль (1815 – 1864), Алан Тьюринг (1912 – 1954), Эмиль Пост (1897 - 1954), Уиллард Квайн (1908 – 2000) и многие другие.

Создание и развитие с середины 20 века вычислительной техники потребовало изучения теоретических основ фундаментальных знаний всеми категориями специалистов по вычислительной технике и информационным технологиям, более того, теория и практика дискретной математики получили дальнейшее развитие.

Немалый вклад в теорию и практику формирования содержания и преподавания дискретной математики внесли ученые и педагоги ВУЗов города Перми: Л.Ф. Викентьев, Т.И. Коган, В.А. Несмелов, В.А. Харитонов, С.Ф. Тюрин, Ю.А. Аляев, О.Л. Викентьева, В.В. Морозенко и другие [4, 5, 8]. Так, например, разработанный профессором Леонидом Федоровичем Викентьевым метод поразрядного сравнения рабочих и запрещенных восьмеричных наборов широко применяется для минимизации существенно недоопределенных переключательных функций от большого числа аргументов при синтезе конечных автоматов.

Настоящее учебное пособие разработано в соответствии с принципами преподавания дисциплины «Дискретная математика», заложенными доктором технических наук, профессором, заслуженным изобретателем РФ Сергеем Феофентовичем Тюриным, работавшим в Пермском ГАТУ с 2002 по 2008 год.

Автор выражает благодарность кандидату педагогических наук, доценту Александру Васильевичу Кондратьеву, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний и рекомендаций.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные понятия

Понятие множества играет фундаментальную роль в современной математике и в различных ее приложениях. Понятие множества строго не определяется и является исходным.

Под ***множеством*** понимают любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимых как единое целое. Это определение принадлежит основателю современной теории множеств – немецкому математику Георгу Кантору (1845-1918 гг.).

Пример: множество студентов в группе, множество натуральных чисел, множество букв в алфавите и т.д. При этом о множестве можно вести речь только тогда, когда элементы множества различимы между собой.

Множества обозначают, как правило, прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots X, Y, \ldots$.

Приняты следующие стандартные обозначения числовых множеств:

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел;

$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел;

$\boldsymbol{C}$ — множество комплексных чисел.

Объекты, образующие множество, называют ***элементами множества*** и обозначают строчными буквами латинского алфавита: a,в,c,….

Для обозначения принадлежности элемента m множеству M будем использовать запись вида $m \in M$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называют ***конечным***.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

Число элементов конечного множества М называют ***мощностью множества*** и обозначают |M| [9].

Конечное множество может быть задано перечислением всех своих элементов, например A={a,b,c,d}. Бесконечное множество может быть задано свойством элементов, например B={i:i-четное число}. Множество может быть также задано некоторой порождающей процедурой. Такой распространенной порождающей процедурой является образование множеств с помощью операций над множествами, которые будут рассмотрены далее.

Из множеств могут быть выделены подмножества. Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Обозначение подмножеств выглядит следующим образом: $A \subseteq B$, где $\subseteq$ - знак включения. Говорят, что множества A и B находятся в отношении включения, а элементы множества к самому множеству – в отношении принадлежности.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то множество A называют ***собственным, строгим или истинным подмножеством*** множества B и обозначают $A \subset B$, где $\subset$ - знак строгого включения.

Пример: пусть *A*= {1,2,3,4,5}, тогда $\varnothing$, {1,5}, {2,3}, {1,3,4}, {1}, {2}, {3} —подмножества множества *A*.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются все его возможные подмножества, включая пустое. Такое множество называется ***булеаном множества*** *M* и обозначается *B(M),* а множество M в этом случае – ***универсумом (универсальным)*** и обозначается I [4,5].

Пример: задано множество X = {4,6,8}. Записать булеан множества X.

Если множество X содержит n элементов, его булеан содержит 2^n подмножеств. В нашем случае $2^3 = 8$ подмножеств.

Будем записывать номер подмножества трехразрядным двоичным числом от 0 до 7, включая в подмножество только те элементы, которым соответствует единица в двоичном разряде (таб. 1.1).

Таблица 1.1 – Булеан множества X

Номер подмножества	Двоичная запись номера	Подмножества множества X = {4,6,8}
0	000	{} = ∅
1	001	{8}
2	010	{6}
3	011	{6,8}
4	100	{4}
5	101	{4,8}
6	110	{4,6}
7	111	{4,6,8}

Следовательно, для множества X = {4,6,8} булеаном является множество: B(X)={∅,{4},{6},{8},{4,6},{4,8},{6,8},{4,6,8}}.

Множества A и B следует считать равными лишь в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Например, если A={a, b, c, d} и B={b, d, c, a}, то A=B. В частности, порядок расположения элементов в записи множеств при их сравнении во внимание не принимается.

1.2. Операции над множествами

Объединение двух множеств – это множество, каждый элемент которого принадлежит либо первому, либо второму множеству, либо обоим множествам.

Графическое представление универсального множества в виде прямоугольника позволяет наглядно представить операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна, где подмножества универсального множества изображают в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника [3].

Пример: даны множества: A = {0,1,2,3,4,5,8}, B = {4,5,6,7} на универсуме десятичных цифр. Определить объединение множеств.

Результатом операции будет множество, каждый элемент которого принадлежит либо множеству A, либо множеству B, либо обоим множествам:

$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

На рисунке 1.1 множество A— множество точек левого круга, B — множество точек правого круга, $A \cup B$ есть заштрихованная область.

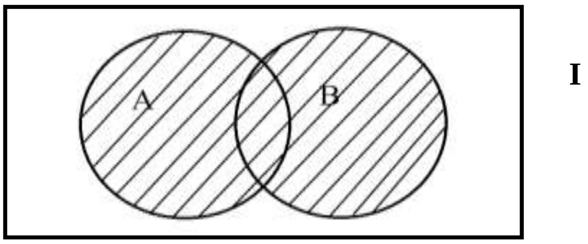


Рисунок 1.1 – Операция «объединение множеств»

Пересечение двух множеств – это множество, каждый элемент которого принадлежит обоим множествам [3].

Пример: даны множества: A = {0,1,2,3,4,5,8}, B = {4,5,6,7} на универсуме десятичных цифр. Определить пересечение множеств.

Результатом операции будет множество, каждый элемент которого принадлежит и множеству А, и множеству В: AIB = {4,5}. Результат операции представлен на рисунке 1.2.

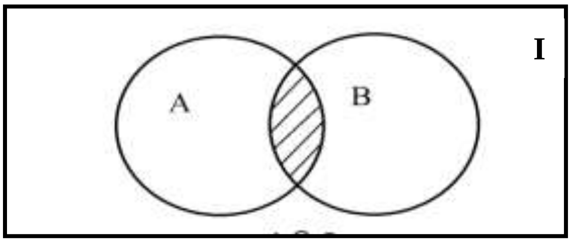


Рисунок 1.2 – Операция «пересечение множеств»

Разность множеств – это множество, каждый элемент которого принадлежит только уменьшаемому множеству [3].

Пример: даны множества: А = {0,1,2,3,4,5,8}, В = {4,5,6,7} на универсуме десятичных цифр. Определить разность множеств.

Результатом операции будет множество, каждый элемент которого принадлежит множеству А и не принадлежит множеству В (рис. 1.3). А\В = {0,1,2,3,8}

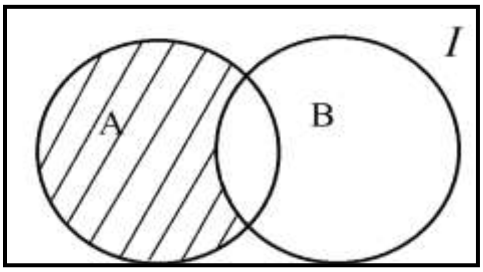


Рисунок 1.3 – Операция «разность множеств»

Симметрическая разность двух множеств – это объединение разности первого множества со вторым и разности второго множества с первым: А⊕В = (А\В) ∪(В\А) [4].

Пример: даны множества: А = {0,1,2,3,4,5,8}, В = {4,5,6,7} на универсуме десятичных цифр. Определить симметрическую разность множеств.

Результатом операции будет множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A\B или множеству B\A (рис. 1.4).

$A \setminus B = \{0,1,2,3,8\}$; $B \setminus A = \{6,7\}$; $A \oplus B = \{0,1,2,3,6,7,8\}$

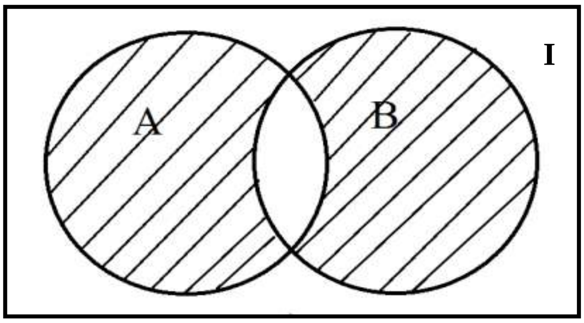


Рисунок 1.4 – Операция «симметрическая разность»

Рассмотренные операции являются двухместными или бинарными.

Дополнение множества – это множество, содержащее элементы универсума, не принадлежащие данному множеству. Операция является одноместной или унарной [9].

Пример: дано множество $A = \{0,1,2,3,4,5,8\}$ на универсуме десятичных цифр. Определить дополнение множества A.

Результатом операции будет множество десятичных цифр, каждый элемент которого не принадлежит множеству A (рис. 1.5). $\overline{A} = \{6,7,9\}$.

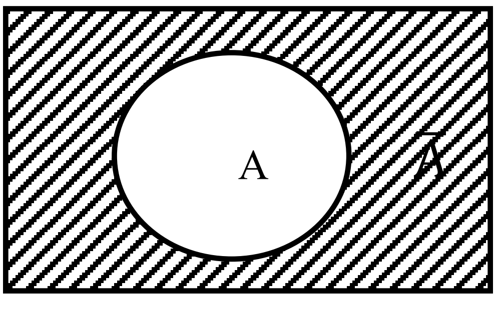


Рисунок 1.5 – Дополнение множества

Используя рассмотренные выше операции, можно выражать одни множества через другие, соблюдая следующий порядок выполнения операций: дополнение, пересечение, объединение (разность). Для изменения порядка выполнения операций используются скобки.

Важным понятием теории множеств является декартово произведение.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество M вида: $M=\{(a_i,b_j):a_i\in A,\ b_j\in B\}$.Это множество всех возможных упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит первому множеству, второй – второму [9,13].

Пример: декартовым произведением множеств A={a,в,c} и B={1,2} будет множество M вида: M={(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}.

Можно провести аналогию между компонентами упорядоченных пар и абсциссой и ординатой декартовой прямоугольной системы координат. Отсюда следует, что графической интерпретацией декартова произведения является решетка, узлы которой есть элементы декартова произведения.

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$. Тогда узлы решетки – это пары декартова произведения (рис. 1.6).

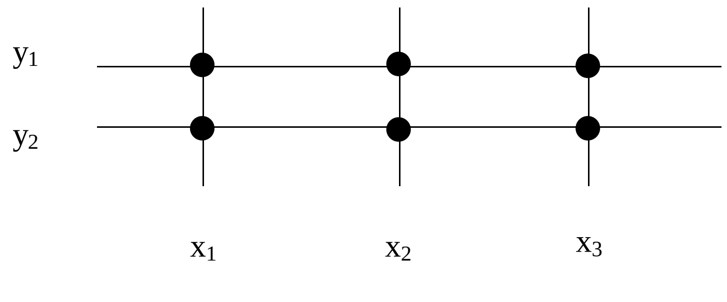


Рисунок 1.6 – Графическая интерпретация декартова произведения

Если A=B, то обе координаты принадлежат одному и тому же множеству, например множеству A. Тогда:

$A \cdot A = A^2$ – упорядоченные пары (называют *декартовым квадратом* множества A);

$A \cdot A \cdot A = A^3$ – упорядоченные тройки (трехмерная система координат, *декартов куб*).

Декартово произведение еще называют *прямым произведением*.

1.3. Соответствия, отображения и функции

Соответствием между множествами X и Y называется подмножество их декартова произведения $G \subseteq X \cdot Y$. Соответствие указывает на определенную связь между элементами множеств X и Y.

Область определения соответствия – множество всех первых компонент упорядоченных пар из *G*:

$$D=\{x \in X: \exists y \in Y \text{такой, что } (x,y) \in G\}.$$

Область значений R соответствия – множество всех вторых компонент упорядоченных пар из G:

$$R=\{y \in Y: \exists x \in X \text{такой, что } (x,y) \in G\}.$$

Множество всех $y \in Y$, соответствующих элементу x, в X называется ***образом*** x в Y при соответствии G.

Множество всех x, которым соответствует y, называется ***прообразом*** y в X при соответствии G.

Всюду определенное соответствие называется ***отображением*** и записывается как $\Gamma: X \mapsto Y$, где $\mapsto$ - знак отображения.

Подмножество $F \subset X \cdot Y$ называется ***функцией***, если для каждого элемента x, $x \in X$ найдется не более одного элемента $y \in Y$ в парах вида $(x,y) \in F$. При этом, если для каждого элемента x имеется один элемент y, то функция полностью определена, в противном случае – частично определена (недоопределена). Множество X – область определения функции F, множество Y – область значений функции. Часто вместо записи $(x,y)\in F$ используют запись $y=F(x)$, при этом элемент x называют аргументом или переменной, а y – значением функции F. Количество аргументов определяет местность функции.

1.4. Отношения

Подмножество $R\subseteq M^n$ называется ***n-местным отношением*** на множестве M.

Существуют бинарные отношения, для них $R\subseteq M^2$. Если a, b находятся в отношении R, записывают aRb.

Отношение, где n=3 – тернарное.

Может быть обратное отношение $aR^{-1}b$, причем только тогда, когда bRa. Например, для отношения $\leq$ обратным является отношение $\geq$.

Отношение указывает на какую-либо связь между элементами множества, либо на свойства элементов, существующие лишь в отношении со свойствами других элементов [9]. Наиболее часто встречающиеся– бинарные отношения, для них $R\subseteq M^2$. Если a,b находятся в отношении R, то это часто записывают в виде aRb.

Пример: отношения «больше», «меньше», «равно».

Рассмотрим свойства отношений.

Отношение R называется ***рефлексивным***, если для любого $a\in M$ имеет место aRa. Например, отношение «равно» рефлексивно. Таким образом, рефлексивность – свойство отношения для каждого элемента подмножества R относительно самого себя.

Отношение R ***симметрично***, если из aRb следует bRa. В противном случае отношение R несимметрично, то есть если aRb истинно, то bRa ложно.

Отношение R ***транзитивно***, если для любых a,b,c из aRb и bRc следует aRc.

Отношение называется ***отношением эквивалентности***, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Таково, например, отношение равенства.

Пример: рассмотрим на множестве чисел {1, 2, 3} отношения:

1) $x<y$ S={(1,2), (1,3), (2,3)};
2) $x=y$ S={(1,1), (2,2), (3,3)};
3) $x\leq y$ S={(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)}.

1.5. Алгебра Кантора. Законы алгебры Кантора

Частным случаем функции является операция, то есть функциональное отображение вида $\varphi: M^n \mapsto M$. Такая функция называется n-арной операцией. Объектами операции являются элементы данного множества.

Алгеброй **А** называется совокупность множества М с заданными на нем операциями S: A=<M,S>, где множество М – носитель, S – сигнатура алгебры.

Алгебра Кантора может быть обозначена:

$$A = \langle B(I), Y, I, \text{–} \rangle.$$

Носителем ее является булеан универсального множества I, сигнатурой – операции объединения Y, пересечения I и дополнения ¯. Часто операцию дополнения обозначают знаком ¬.

Законы алгебры Кантора:

1. ***Коммутативный (переместительный)***- для операций объединения и пересечения*:*

AYB=BYA

AIB=BIA

2. ***Ассоциативный (сочетательный)***- для операций объединения и пересечения*:*

AY(BY C)=(AYB)YC

AI(BIC)=(AIB)IC

3. ***Дистрибутивный (распределительный)****:*

AI(BYC)=(AIB)Y(AIC) – для пересечения относительно объединения (первая формулировка);

AY(BIC)=(AYB)I(AYC) – для объединения относительно пересечения (вторая формулировка).

Очевидно, что первая формулировка дистрибутивного закона изоморфна дистрибутивному закону классической математики, так как операция объединения имеет аддитивный тип (тип сложения), а операция пересечения - мультипликативный тип (тип умножения). Вторая формулировка дистрибутивного закона не имеет аналога в классической математике.

4. ***Идемпотентности***– для объединения и пересечения:

AYA=A

AIA=A

5. ***Де Моргана*** – для объединения и пересечения:

$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}$

$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}$

6. ***Двойного дополнения****:*

$\bar{\bar{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}$

7. Склеивания:

$(\mathrm{M} \cap \mathrm{A}) \cup (\bar{\mathrm{M}} \cap \mathrm{A}) = \mathrm{A}$

8. Поглощения:

M Y (M I A)=M

Иногда к законам относят определение разности множеств через операции алгебры Кантора:

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$

Алгебра Кантора принадлежит к классу фундаментальных алгебр-решеток.

1.6. Задание множеств конституэнтами

Формула алгебры множеств, представляющая собой пересечение, в которое входят по одному разу все множества (со знаками дополнения или без дополнений), на данном универсуме называется ***конституэнтой единицы*** [2]. Формула, представляющая собой объединение, в которое входят по одному разу все множества (со знаками дополнения или без дополнений), на данном универсуме называется ***конституэнтой нуля***. Каждое множество за исключением пустого может быть задано объединением конституэнт единицы. Каждое множество за исключением универсального может быть задано пересечением конституэнт нуля.

Рассмотрим задание множества путем указания его конституэнт единицы.

Пусть на некотором универсуме рассматриваются 2 взаимно пересекающихся множества: А и В. Зададим их графически с помощью диаграмм Эйлера (рис.1.7).

Тогда каждый из четырех сегментов этой диаграммы может быть представлен конституэнтой, содержащей символы А и В:

$(\bar{A} \cap \bar{B})$ – сегмент 00 –не А и не В;

$(A \cap \bar{B})$ – сегмент 10 – А, но не В;

$(\bar{A} \cap B)$ – сегмент 01 –не А и В;

$(A \cap B)$ – сегмент 11 – А и В.

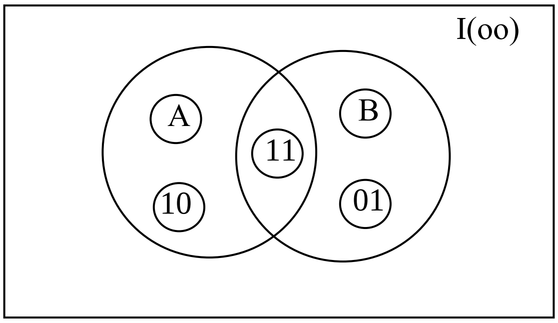


Рисунок 1.7. – Диаграмма Эйлера для двух взаимно пересекающихся множеств А и В на универсуме I

В таком случае, заданное множество можно закодировать двоичным кодом в соответствии с тем, входят ли указанные конституэнты в него (табл.1.2):

Таблица 1.2 – Задача множества А двоичным числом

$(A \cap B)$	$(A \cap \bar{B})$	$(\bar{A} \cap B)$	$(\bar{A} \cap \bar{B})$
11	10	01	00
2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	0

Множество А закодировано двоичным числом 1100. Этому двоичному числу соответствует десятичное число 12.

1.7. Алгебраические системы. Решетки

Мы рассмотрели алгебры, то есть множества, на которых заданы операции. Множества, на которых кроме операций заданы отношения, называются ***алгебраическими системами***. Алгебра – это частный случай алгебраических систем.

Рассмотрим алгебраическую систему из множества М, отношения порядка (будем обозначать $\leq$) и некоторых операций. Говорят, что множество М линейно упорядочено, если любые два элемента находятся в отношении упорядоченности, иначе – частично упорядочено.

Любое частично упорядоченное множество А можно представить в виде ***диаграммы Хассе***. Диаграмма (решетка) Хассе известна с конца XIX века и применяется в генеалогии для исследования родства. Элементы множества А изображаем точками на плоскости. Две точки a, b $\in$A соединяем ребром тогда и только тогда, когда a$\leq$ b и между точками a и b нет промежуточной точки c такой, что a $\leq$ c, c$\leq$ b, причем точку b изображаем выше точки a.

Пример: диаграмма Хассе отношения линейного порядка $\leq$ на множестве А= {1, 3, 4, 5, 8} изображена на рисунке 1.8.

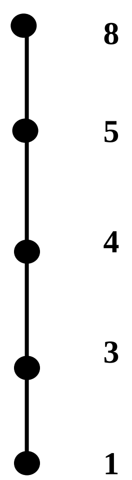


Рисунок 1.8 – Диаграмма Хассэ для множества А

Решетка Хассэ для универсального множества I={x,y,z} представлена на рисунке 1.9. Множества всех подмножеств I упорядочены по отношению включения, а операции объединения и пересечения элементов (подмножеств) связаны дистрибутивными законами. Наименьший и наибольший элементы решетки называются ее нулем и единицей.

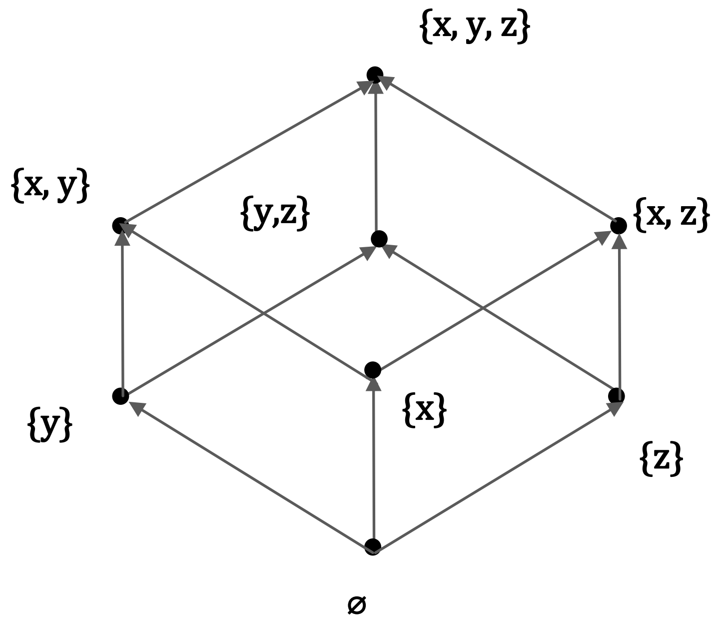


Рисунок 1.9 – Диаграмма Хассэ для множества I={x,y,z}

Элементы a и b называются ***дополнительными*** друг для друга, если их пересечение равно 0, а объединение – 1.

$\{y\} \cap \{x, z\} = \varnothing$, $\{y\} \cup \{x, z\} = I$

Такая решетка с отличными друг от друга нулем и единицей, в которой каждый элемент имеет дополнение, называется *булевой алгеброй*. Пример булевой алгебры – алгебра Кантора. Другим примером булевой алгебры является алгебра логических (переключательных) функций.

Примеры решения теоретико-множественных задач

Задача 1

14 спортсменов участвовали в кроссе, 16 – в соревнованиях по плаванию, 10 – в велосипедных гонках. 8 участников участвовали в кроссе и заплыве, 4 – в кроссе и велосипедных гонках, 9 – в плавании и велосипедных гонках. Во всех трех

соревнованиях участвовали 3 человека. Сколько всего было спортсменов? Проиллюстрировать решение задачи диаграммой Эйлера-Венна.

Решение

Универсальное множество I – это множество всех спортсменов, участвовавших в соревнованиях. Множество К – множество спортсменов, участвовавших в кроссе, |К| = 14 – количество элементов множества К. Множество П – множество спортсменов, участвовавших в соревнованиях по плаванию, |П| = 16 – количество элементов множества П. Множество В – множество спортсменов, участвовавших в велосипедных гонках, |В| = 10 – количество элементов множества В.

Условие задачи: |К| = 14; |П| = 16; |В| = 10; |К∩П| = 8; |К∩В| = 4; |П∩В| = 9; |К∩П∩В| = 3.

Требуется найти мощность |I|. Перенесем эти данные на диаграмму Эйлера-Венна.

На диаграмме все элементы учтены ровно по одному разу, следовательно, общее количество спортсменов, участвовавших в соревнованиях, равно:

|I| = 5+5+2+1+3+6+0 = 22.

Ответ: Общее число спортсменов – 22 человека (рис. 1.10).

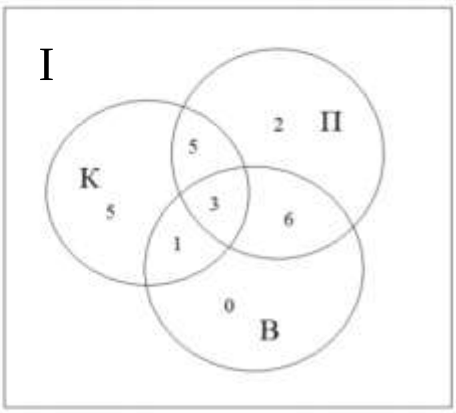


Рисунок 1.10–Диаграмма Эйлера – Венна

Задача 2

Выразить объединение $A \cup B$ через симметрическую разность и пересечение.

Решение. A∪B=(A\B)∪(B\A)∪(A⋂B)=(A⨁B)∪(A⋂B)

Задача 3

Выразить объединение $A \cup B$ через пересечение и дополнение.

Решение. A∪B=$\bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$

Задача 4

Доказать равенство множеств $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

Решение. A∪(B\A) = A∪ (B⋂$\bar{A}$) = (A∪B)⋂(A∪$\bar{A}$) = (A∪B)⋂I= =A∪B

Задача 5

Доказать равенство множеств $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

Решение

1) Преобразуем левую часть формулы, выразив разность через операции пересечения и дополнения: A\B=A⋂$\bar{B}$

A\(A\B) = A ⋂$\overline{A \cap \bar{B}}$

2) Применим закон де Моргана: A⋂$\overline{A \cap \bar{B}}$ = A⋂ ($\bar{A}$ ∪B)

3) Применим первую формулу дистрибутивного закона: A⋂ ($\bar{A}$∪B) = (A ⋂$\bar{A}$)∪ (A⋂B) = ∅∪ (A⋂B) = A⋂B

Задача 6

Доказать равенство множеств $(A \cap B) \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B) = B \cup C$.

Решение. Для решения используется закон склеивания и вторую формулировку дистрибутивного закона, в результате получим:

(A⋂B)∪(B\A)∪(C\B)= (A⋂B)∪(B⋂$\bar{A}$)∪(C\B) = B∪(C⋂$\bar{B}$)= (B∪C)⋂(B∪$\bar{B}$)= (B∪C)⋂I= B∪C.

Задача 7

Доказать равенство множеств $A\setminus B = A\setminus(B \cap A)$.

Решение

$A\setminus(B\cap A)=A\cap(\overline{B \cap A})= A\cap(\bar{B}\cup\bar{A}) = (A\cap\bar{B})\cup (A\cap\bar{A})=$
$= (A\cap\bar{B}) = A\setminus B$

Задача 8

Выполнить операции над множествами, заданными формулой $\overline{M\oplus I}$.

M – произвольное множество; I – универсум.

Решение

1)Выразим симметрическую разность через объединение двух разностей:

$M\oplus I= (M \setminus I) \cup (I \setminus M) = \emptyset\cup\overline{M}$

2)Выполняя дополнение дополнения, получим $\bar{\bar{M}} = M$

3)Таким образом:

$\overline{M\oplus I} = \overline{(M\setminus I) \cup (I\setminus M)} = \overline{\emptyset \ \cup \overline{M}} = \bar{\bar{M}} = M$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1

Равны ли множества?

а)$\{3,4,5,6\}$ и $\{5,4,3,6\}$

б)$\{x: x>0, x^2 <=4\}$ и $\{x:0<x<=4-x\}$

в)$\{x: 0<=x<=1\}$ и $\{x: 3x^2<=3\}$

Задача 2

Даны множества: A = {1,2,3,4,5,6}, B = {0,4,5,6,7}, C = {8,9} на универсуме десятичных цифр.

Определить:

а)AUB

б)AUC

в)AIB

г)BIC

д)$A \oplus B$

е)$A \setminus B$

ж)$\bar{B}$

з)$\bar{A} \cap \bar{B}$

Задача 3

Пусть даны множества A={1, 3, 7, 137}, B={3, 7, 23}, C ={0, 1, 3, 23}, D ={0, 7, 23, 2004}. Найти множества:

а)$A \cup B$

б)$A \cap B$

в)$(A \cap B) \cup D$

г)$C \cap (D \cap B)$

д)$(A \cup B) \cap (C \cup D)$

е)$(A \cup (B \cap C)) \cap D$

ж)$(C \cap A) \cup ((A \cup (C \cap D)) \cap B)$

з)$(A \cup B) \setminus (C \cap D)$

и)$A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$

к)$((A \setminus (B \cup D)) \setminus C) \cup B$

Задача 4

Выполнить операции над множествами, заданными выражениями:

а)$M \oplus \bar{M}$

б)$M \cap I$

в)$M \cup \bar{M}$

г)$M \oplus I$

д)$\overline{M} \cap I$

е)$M \setminus I$

ж)$I \cup M$

з)$I \oplus I$

Задача 5

Задано универсальное множество I = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} и множества X = {1,3,6,7}, Y = {3,4,7,8}, Z = {3,4,7,8}.

а) Записать булеан множества X.

б) Выполнить действия $(X \setminus Y) \cap \bar{Z}$.

Задача 6

Получить декартово произведение множеств A={a, b, c, d} и B={*,#}.

Задача 7

Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис, либо в футбол и в теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 – в теннис?

Задача 8

Известно, что из 100 студентов живописью увлекается 28, спортом – 42, музыкой – 30, только живописью и спортом – 10, только живописью и музыкой – 8, только спортом и музыкой – 5, живописью, спортом и музыкой – 3.

Определить:

а) количество студентов, увлекающихся только спортом;

б) ничем не увлекающихся.

Задача 9

Из 50 студентов 30 изучают английский язык, 25 – немецкий, 25- французский, 15 – английский и немецкий, 20 – английский и французский, 10 – немецкий и французский, 5 – английский, французский и немецкий.

Определить:

а) сколько студентов не изучает ни одного из перечисленных языков;

б) сколько студентов изучает ровно два языка;

в) сколько студентов изучает не менее двух языков.

Задача 10

Вместо звездочек написать знак $\subset$ или $\in$, чтобы получилась верная запись:

а)$\{5, 6\} * \{5, 6, 8\}$

б) $5 * \{5, 6, 8\}$

в) $2 * N$

Задача 11

Указать пустые множества среди следующих множеств:

а) множество целых корней уравнения $x^2 - 9 = 0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;

в) множество целых корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$;

г) множество натуральных числе, меньших 1.

Задача 12

Доказать равенство множеств:

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Задача 13

Установить истинность или ложность следующих выражений:

1. $2 \in \{1,2,3,4,5\}$.
2. $\{2,6\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$.
3. $\{1,2,3\} \in \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$.
4. $\{2,6\} \subseteq \{6,2\}$.
5. $\{2\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$.

Задача 14

Пусть A, B, C – взаимно пересекающиеся множества. Показать на диаграммах Эйлера следующие множества:

1. $(B \cap C) \setminus A$;
2. $(A \cup B) \cap \bar{C}$;
3. $\overline{(B \cap C)} \setminus A$;
4. $(A \cap B \cap C) \setminus \bar{A}$;
5. $(A \oplus B) \setminus C$;

6. $(A \oplus B) \setminus \bar{C}$.

Задача 15

Какие из следующих пар множеств связаны между собой отношением включения?

1. $A = \{a \mid a \in N, a > 5\}$, $B = \{b \mid b \in N, b > 3\}$;
2. $A = \{a \mid a \in N, 1 < a < 10\}$, $B = \{b \mid b \in N, 1 < b < 8\}$;
3. $A = \{a \mid a \in R, a < 3\}$, $B = \{b \mid b \in R, b > 4\}$;
4. $A = \{a \mid a \in R, -3 < a < 4\}$, $B = \{b \mid b \in N, -3 < b < 2\}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируется понятие «множество»?
2. Что понимается под «мощностью множества»?
3. Что понимается под булеаном множества?
4. Что понимается под объединением двух множеств?
5. Что понимается под пересечением двух множеств?
6. Что понимается под симметрической разностью двух множеств?
7. Как формулируется понятие «декартово произведение»?
8. Как формулируется и записывается закон идемпотентности?
9. Как формулируется и записывается закон де Моргана?
10. Как формулируется и записывается закон склеивания?

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

2.1. Основные понятия

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конфигурации из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Примерами комбинаторных конфигураций являются размещения, перестановки и сочетания.

Решение многих комбинаторных задач основано на следующих двух правилах [9,10].

Комбинаторное правило суммы

Пусть X – конечное множество, такое, что $|X|=n$, то есть состоит из n элементов. Тогда говорят, что элемент x из множества X может быть выбран n способами.

Пусть X_1, X_2, …, X_k– попарно непересекающиеся множества, то есть $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Очевидно, что в этом случае выполняется равенство, получившее название «комбинаторное правило суммы»:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$$

Для k=2 оно формулируется следующим образом. Если элемент x может быть выбран n способами из множества X, а элемент y из непересекающегося с ним множества Y может быть выбран m способами, то выбор элемента x или y может быть сделан n+m способами.

Комбинаторное правило произведения

Рассмотрим правило произведения для k=2. Если надо выбрать упорядоченные пары (x,y) из тех же множеств X, мощностью n, и Y, мощностью m, то выбор можно сделать $n \cdot m$ способами.

Пример: $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$.

Тогда $X \cdot Y=\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\}$ – получили декартово произведение.

Предположим, что элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после такого выбора элемент a_2 возможно отобрать n_2 способами. После (k-1) выбора элемент a_k можно выбрать n_k способами, тогда выбор всех элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ в указанном порядке может быть произведен $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.

Рассмотрим несколько определений.

Определение 1. Набор элементов $(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_k)$ из множества $X=\{x_1,x_2,\ldots, x_i, \ldots, x_n\}$*называется* ***выборкой объема k из n элементов*** или (n,k) – выборкой.

Определение 2. Выборка называется ***упорядоченной***, если в ней задан порядок следования элементов, иначе – ***неупорядоченной***.

Определение 3. В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов, отсюда различают ***выборки с повторениями и без повторений***.

2.2. Размещения

Размещение с повторением – это упорядоченная выборка, в которой элементы могут повторяться. Первый элемент выбирается n способами, второй – тоже n способами и т.д.: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k}$.

Таким образом, количество упорядоченных выборок с повторениями определяется по формуле:

$$\hat{A}_n^k = n^k$$

Размещение без повторений – это упорядоченная (n,k) выборка, в которой элементы попарно различны. Размещение без повторений обозначается A_n^k [10].

Первый элемент такой последовательности может быть выбран n способами, следующий элемент (n-1) способами и так далее, k-ый элемент выбирается (n-(k-1)) способами.

Таким образом, A_n^k=n·(n-1)·(n-2)·…·[n-(k-1)]. Домножив и разделив эту формулу на произведение (n-k)!=1·2·3·…·(n-k), получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2.3. Перестановки

Перестановкой без повторений из n элементов (или перестановкой элементов множества мощности n) называется (n,n)-размещение без повторений

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Здесь в знаменателе 0! по определению равно 1.

Перестановки без повторений можно интерпретировать как различные варианты векторов, состоящих из неповторяющихся компонентов, получаемые перестановкой компонентов. По аналогии при наличии одинаковых компонент в некотором векторе получаем задачу оценки так называемых перестановок с повторениями данного состава.

Таким образом, если из n элементов множества $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ составлен вектор V длины k, причем каждому i-му компоненту можно поставить в соответствие число k_i, указывающее его число повторений в V, то задан вектор $S=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, который называется составом исходного вектора [4,5].

Так, для X={0,1,2,3} и V=(010223), состав: S=(2,1,2,1).

Перестановка с повторениями – перестановка некоторого вектора с повторяющимися элементами [9]. Вычисляется путем деления факториала длины последовательности на произведение факториалов числа повторений отдельных элементов:

$$\hat{P}(k_1,k_2,\ldots,k_n) = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} = n!/(k_1!\,k_2!\ldots k_n!)$$

2.4.Сочетания

В ряде комбинационных задач требуется определить число k-элементных подмножеств множества из n-элементов. В этом случае порядок следования элементов несуществен, то есть производится неупорядоченная выборка, в результате которой получают так называемые сочетания без повторений [6].

Сочетание без повторений – это неупорядоченная (n,k) выборка, элементы которой попарно различны.

Число сочетаний из n элементов по k, обозначаемое как C_n^k, определяется исходя из числа размещений без повторений с учетом того, что различных неупорядоченных подмножеств исходного множества будет меньше в число раз, соответствующее числу перестановок без повторений из k элементов [9]:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Сочетание с повторениями – это неупорядоченная (n,k) выборка, элементы которой могут повторяться. Формулу числа сочетаний с повторениями приведем без вывода:

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

2.5. Бином Ньютона

Исторически название бином Ньютона несправедливо, поскольку формулу $(a+b)^n$ знали еще среднеазиатские математики, начиная с Омара Хайяма, а в Европе до Ньютона (Исаак Ньютон , 1643-1727 гг., английский физик, астроном, математик) ее знал Блез Паскаль (1623-1662 гг., французский математик). Однако, заслуга Ньютона заключается в том, что он обобщил эту формулу для нецелого показателя n.

Для натурального показателя n формула бинома Ньютона имеет вид:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$
$$= c_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

Пример:

$$(a+b)^2 = c_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^{2-1} b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = c_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$$

Коэффициенты C_n^k называют *биномиальными*.

Докажем формулу бинома Ньютона, используя метод математической индукции.

1.Базис индукции – доказательство того, что формула верна для конкретного n, например, для n=1:

$$a+b = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^{1-0} b^0 + C_1^1 a^{1-1} a^1 = a+b$$

Формула верна для n=2,3,4 .

2.Индукционный шаг: предполагая, что формула верна для некоторого n, убедимся, что она верна и для n+1.

Возьмем выражение:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

и получим из него выражение для n+1, путем умножения исходного на *(a+b)*:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (C_n^k\, a^{n+1-k} b^k + C_n^k a^{n-k} b^{k+1})$$

Для выполнения индукционного шага необходимо показать, что это выражение равно выражению:

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

Рассмотрим подвыражение выражения $C_n^k a^{n-k} b^{k+1}$ и заменим k на k-1:

Получим $C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k$, то есть одинаковые коэффициенты $a^{n+1-k} b^k$ перед выражениями, C_n^i для числа сочетаний в первом и втором подвыражении. Это позволит вынести $a^{n-1+i} b^i$ за скобку. Но тогда в $C_n^{i-1} a^{n-i+1} b^i$ не учтен n-ый член подвыражения $C_n^i a^{n-i} b^{i+1}$(суммирование идет до n): $C_n^n a^0 b^{n+1}$ тогда, учитывая его, получаем:

$$\sum_{i=0}^{n} (C_n^i\, a^{n+1-i} b^i + C_n^{i-1} a^{n-i+1} b^i) + C_n^n a^0 b^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (C_n^i + C_n^{i-1}) a^{n+1-i} b^i + C_n^n a^0 b^{n+1}$$

Нетрудно видеть, что можно заменить $C_n^n a^0 b^{n+1}$ на $C_{n+1}^{n+1} a^{(n+1)-(n+1)} b^{n+1}$, кроме того, мы уже доказали, что $C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i$, поэтому: $\sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i + C_{n+1}^{n+1} a^{(n+1)-(n+1)} b^{n+1}$, что, очевидно, равно выражению:

$$\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^{i} a^{n+1-i} b^{i},$$

что и следовало доказать.

2.6. Треугольник Паскаля

Сочетаниями без повторений занимался еще великий Паскаль. Он предложил специальную таблицу значений сочетаний без повторений.

Используя формулу $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, вычислим число сочетаний без повторений для n=1-5 при k=1-5. Результаты вычислений представим в следующей таблице.

Таблица 2.1 – Результаты вычислений числа сочетаний без повторений

n\k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
0	*1*					
1	*1*	*1*				
2	*1*	*2*	*1*			
3	*1*	*3*	*3*	*1*		
4	*1*	*4*	*6*	*4*	*1*	
5	*1*	*5*	*10*	*10*	*5*	*1*

Заметим, что $C_0^0 = 1$, $C_n^0 = 1$, C_n^n=1.

Эту таблицу называют ***треугольником Паскаля***, по имени французского математика Блеза Паскаля [3]. Однако это название исторически неточно, поскольку такая таблица была известна еще Омару Хайяму.

Треугольник удивительно красив своей математической красотой, и в его числах можно при желании отыскать различные закономерности [5]. Его можно представить несколько иначе – в виде равнобедренного треугольника (рис. 2.1).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5
\end{array}
$$

Рисунок 2.1 – Треугольник Паскаля

В (i+1)-й строке стоят числа $C_i^0, C_i^1, \dots, C_i^i$. Видно, что C_n^i и C_n^{i-1} располагаются в таблице строкой выше, чем C_{n+1}^i, и находятся в этой строке слева и справа от него, то для получения C_{n+1}^i надо сложить находящиеся справа и слева от него числа предыдущей строки. Так, например, сложив числа 3 и 3 в четвертой строке, получим число 6 в пятой строке.

Докажем это.

$$C_n^i + C_n^{i-1} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n-i+1) + n!\,i}{i!\,(n-i+1)!} = \frac{n!\,(n-i+1+i)}{i!\,(n-i+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{i!\,(n+1-i)!} = \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = C_{n+1}^i$$

Легко доказать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$:

$$\frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.7. Общий подход к решению комбинаторных задач

Характерным признаком комбинаторных задач является наличие выборки из некоторого исходного множества. Сведем в таблицу конечные прикладные формулы (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Таблица формул

Выборки		Без повторений	С повторениями
Упорядоченная	Размещения	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\hat{A}_n^k = n^k$
	Перестановки	$P_n = A_n^n = n!$	$\hat{P} = n!/(k_1!\,k_2!\,\ldots k_n!)$
Неупорядоченная	Сочетания	$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

На первом этапе решения задачи следует определить исходное множество (или множества), из которого (которых) осуществляется выборка.

Далее следует определить вид, свойство выборки: упорядоченная или неупорядоченная, с повторениями или без повторений.

После этого определяют количественные характеристики выборки и по формулам комбинаторики определяют число выборок.

Примеры решения комбинаторных задач

Задача 1

В ЭВМ наряду с бистабильными элементами используют тристабильные элементы, которые кроме состояний 0,1 имеют еще третье, *высокоимпедансное состояние* (состояние «отключено от шин», состояние высокого сопротивления R). Сколько состояний может иметь устройство из двух таких элементов?

Решение

Проиллюстрируем задачу простым рисунком (рис. 2.2).

A	B
0	0
1	1
R	R

Рисунок 2.2 – Состояния элементов

Множество X={0,1,R}, т.е. n=3.

Каждый элемент может находиться в трех состояниях, в том числе и одинаковых, следовательно, имеет место выборка с повторениями. Каждый элемент выполняет вои функции, следовательно, выборка упорядоченная и k=2. Отсюда, тип выборки размещение с повторениями. Выбираем из таблицы 2.2 нужную формулу:

$$\hat{A}_n^k = n^k$$

Подставляя в формулу значения n=3 и k=2, получаем:

$$\hat{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

Задача 2

Сколько состояний имеет устройство из двух бистабильных и одного тристабильного элемента?

Решение

Здесь имеется два исходных множества: $X_1=\{0,1\}$ и $X_2 = \{0,1,R\}$.

Тип выборки – размещение с повторениями: для двух бистабильных элементов число состояний будет $\hat{A}_2^2 = 2^2 = 4$; для одного тристабильного элемента - $A_3^1=3$.

Поскольку устройство состоит из трех элементов, то для определения числа состояний воспользуемся комбинаторным правилом произведения и получим $4\cdot3=12$ состояний.

Задача 3

Сколько состояний имеет система из четырех двоичных датчиков?

Решение

Проиллюстрируем задачу рисунком (рис. 2.3).

A	B	C	D
0	0	0	0
1	1	1	1

Рисунок 2.3 –Состояния элементов системы

Множество состояний любого их четырех элементов: $X=\{0,1\}$, $k=4$. $n=2$. Таким образом, тип выборки – размещения с повторениями, а число состояний определяем по формуле: $\hat{A}_2^4 =2^4=16$ (состояний).

Задача 4

Для автомобильных номеров в регионе используют 10 цифр и 12 букв. В номере три цифры (за исключением 000) и три буквы. Сколько автомобильных номеров в регионе?

Решение

Определим мощность множества используемых цифр: $|X_{цифр}|$=10.

Определим мощность множества используемых букв: $|X_{букв}|$=12.

Тип выборки – размещение с повторениями. Воспользуемся соответствующей формулой: $\hat{A}_{10}^{3} = 10^3$=1000; $\hat{A}_{12}^{3}$ =12^3=1728.

Поскольку в номере присутствуют и цифры, исключая 000, и буквы, то воспользуемся комбинаторным правилом произведения:

(1000-1)·1728 = 1726272 (номера).

Задача 5

Сколько последовательностей можно получить при перестановке букв в слове «МАТЕМАТИКА».

Решение

Прежде всего, определим исходное множество: X={М,А,Т,Е,И,К}.

Тип выборки – перестановка с повторениями: n=6, k=10. Определим вектор состава: S=(2, 3, 2, 1, 1, 1).

Воспользуемся формулой определения числа перестановок с повторениями: $P(2,3,2,1,1,1)=\frac{(2+3+2+1+1+1)!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 1512000.$

Задача 6

Сколько существует комбинаций из 10 банкнот достоинством 10,50 и 100 рублей. В выборке должны присутствовать банкноты всех трех достоинств.

Решение

Дополнительные условия накладывают ограничения числа выборок (комбинаций). Рассмотрим формат выборки.

Выборка должна иметь стандартную неизменяемую часть, содержащую все три банкноты, отсюда имеем:

$$(\underbrace{10, 50, 100}_{\text{неизменяемая часть выборки}}, \underbrace{X, X, X, X, X, X, X}_{\text{изменяемая часть выборки, } k=7})$$

Исходное множество X={10,50,100}.

Тип выборки – сочетания с повторениями, n=3, k=7.

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{3+7-1}^7 = C_9^7 = \frac{9!}{7!(9-7)!} = 36 \text{ (комбинаций)}.$$

Задача 7

В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Решение

В данной задаче необходимо найти выборки двух элементов множества из двадцати трех, при этом важен порядок элементов выборки. Поэтому воспользуемся формулой нахождения размещения без повторений:

$$A_{23}^2 = \frac{23!}{(23-2)!} = 22 \cdot 23 = 506$$

Задача 8

Сколько существует четырёхзначных пин-кодов, которые можно составить из десятичных цифр?

Решение

По условию предложен набор из n=10 цифр, из которого выбираются k=4 цифры и располагаются в определённом порядке, при этом цифры в выборке могут повторяться, т. е. любой цифрой исходного набора можно пользоваться произвольное количество раз. По формуле количества размещений с повторениями получаем:

$$\hat{A}_{10}^{4} = 10^4 = 10\,000$$

Задача 9

Сколькими способами можно рассадить пять человек за столом?

Решение

В задаче речь идет о перестановке всех пяти элементов множества, повторения невозможны. Используем формулу количества перестановок без повторений.

$P_5 = 5! = 120$.

Задача 10

На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

Решение

1) Определим общее число перестановок всех тридцати томов, воспользовавшись формулой нахождения числа перестановок без повторений: $P_{30} = 30!$

2) Для того, чтобы вычислить число "лишних" перестановок, сначала определим, сколько вариантов, в которых второй том находится рядом с первым справа от него. В таких перестановках первый том может занимать места с первого по 29-е, а второй том – со второго по 30-е. Таким образом существует всего 29 мест для этой пары книг. И при каждом таком положении первых двух томов остальные 28 книг могут занимать 28 мест в произвольном порядке. Вариантов перестановки 28 книг: $P_{28} = 28!$

Всего "лишних" вариантов при расположении 2-го тома справа от 1-го получится $29 \times 28! = 29!$

3)Аналогично рассмотрим случай, когда 2-й том расположен рядом с первым, но слева от него. Получается такое же число вариантов $29 \times 28! = 29!$

4)Значит всего “лишних” перестановок 2×29!, а нужных способов расстановки 30! – 2×29!

Вычислим это значение:

30! – 2×29! = 29!×30 – 2×29! = 29!×(30 – 2) = 29!×28.

Итак, нам нужно перемножить все натуральные числа от 1 до 29 и ещё раз умножить на 28.

Ответ**:** $2{,}4757335\times10^{32}$.

Задача 11

Определить число вариантов перестановок разрядов в векторе 01032.

Решение

В данном случае имеет место перестановка пяти элементов, но элемент «0» повторяется дважды, в то время как все остальные встречаются только один раз. Для вычисления результата необходимо воспользоваться формулой нахождения перестановки с повторениями: $\hat{P}_5$ = 5!/2!=60

Задача 12

Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии внешне неразличимых 30-ти книг?

Решение

Порядок следования на полке 15-ти выбранных внешне одинаковых книг не имеет значения. Нужно определить общее число сочетаний на 30 элементов по 15 без повторений по формуле:

$$C_{30}^{15} = 155117520$$

Задача 13

На почте имеются марки десяти различных типов. Покупается 15 марок. Сколько существует способов покупки 15 марок.

Решение

Имеется множество марок: n=10.

Купленные 15 марок образуют подмножества из m=15 элементов.

Данные подмножества отличаются только элементами, поэтому количество разных способов покупки равно числу сочетаний с повторениями из 10 элементов по 15:

$\widehat{C}_{10}^{15}=C_{10+15-1}^{15}=C_{24}^{15}=\frac{24!}{15!9!}$

Задача 14

Решить комбинаторное уравнение: $C_x^2=136$, x∈N

Решение

1) Используя формулу для вычисления числа сочетаний, получаем:

$\frac{x!}{2!(x-2)!}=136$

2) Избавимся от факториала:

$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot x}{2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(x-2)}=136$

3) После сокращения получим:

$\frac{(x-1)\cdot x}{2}=136$

4) $x^2-x-272=0$

$x_1=-16$ – посторонний корень

$x_2=17$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1

В спортивной команде *9* человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 2

Сколькими способами *10* футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?

Задача 3

Борис идёт на день рождения к близнецам Алексею и Ивану. Он хочет подарить каждому из них по музыкальному диску. В магазине осталось для продажи только *13* различных дисков любимых исполнителей братьев. Сколькими способами, купив *2* диска, Борис может сделать подарки?

Задача 4

Сколько различных двузначных чисел можно составить при помощи цифр *4, 7, 9* ? (цифры в записи числа не повторяются).

Задача 5

В пассажирском поезде *9* вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде *4* человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Задача 6

Сколько существует способов, которыми можно набрать очки после трех выстрелов по мишени из 10 секторов?

Задача 7

Сколько существует способов занять места в аудитории, имеющей 15 мест, группой учащихся из 4 человек?

Задача 8

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9 ?

Задача 9

Сколько комбинаций шифров можно получить перестановкой цифр в шифре 20287.

Задача 10

Сколько чисел больше 100 можно записать с помощью цифр
1, 2, 3, 4, если цифры в числе не повторяются?

Задача 11

Сколько различных слов можно получить переставляя буквы слова 1) «ВЕКТОР» 2) «ПАРАБОЛА»?

Задача 12

Сколько есть пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, 67876, 17071)?

Задача 13

Из колоды в 36 карт наудачу без возвращения внимают по одной карте 3 раза. Сколько существует различных способов получения трех карт, среди которых на первых двух местах бубна, а на третьем – пика?

Задача 14

Автомобильные номера состоят из трех букв (буквы по написанию имеющиеся в кириллице и латинице) и трех цифр (буквы и цифры могут повторяться). Какое максимальное количество машин может быть в стране?

Задача 15

На окружности взяты 9 точек. Сколько хорд можно провести, соединяя эти точки?

Задача 16

На окружности взяты 8 точек. Сколько треугольников с вершинами в этих точках можно построить?

Задача 17

Решить комбинаторные уравнения ($x \in N$):

а) $A_{x+1}^{2} = 20$

б) $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$

в) $C_x^3 = 2C_x^2$

г) $A_x^2 = 42$

д) $A_x^4 = 12A_x^2$

е) $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$

ж) $15C_{x+1}^{x-4} = 7A_{x+1}^3$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое размещение без повторений?
2. Как определяется число размещений без повторений?
3. Что такое размещение с повторениями?
4. Как определяется число размещений в повторениями?
5. Что такое перестановка без повторений?
6. Как определяется количество перестановок без повторений?
7. Что такое перестановка с повторениями?
8. Как определяется количество перестановок с повторениями?
9. Что такое сочетание без повторений?
10. Как определяется число сочетаний без повторений?

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1. Основные понятия

Графические представления – любые наглядные отображения исследуемой системы, процесса, явления на плоскости. К ним могут быть отнесены рисунки, чертежи, графики зависимостей, схемы процессов, диаграммы и т. д. Такие изображения наглядно представляют различные взаимосвязи и взаимообусловленности: топологическое (пространственное) расположение объектов, хронологические (временные) зависимости процессов и явлений, логические, структурные, причинно – следственные (каузальные) и другие взаимосвязи.

Основное достоинство графических представлений – наглядность и возможность быстрого анализа ситуации.

Мощным и наиболее исследованным классом объектов, относящимся к графическим представлениям, являются графы. Теория графов имеет обширные приложения, так как ее язык, с одной стороны, нагляден и понятен, с другой – удобен в формальном исследовании. Например, структура молекулы является графом, в котором вершинами являются атомы, а ребрами – валентные связи. Схема алгоритма представляет собой ориентированный граф, в котором вершинами являются отдельные операции, а дуги указывают переходы между ними. Элементы и соединения в электрической цепи, схема перекрестков и дорог – это все примеры использования теории графов.

На языке теории графов формулируются и решаются многие задачи управления, в том числе задачи сетевого планирования и управления, анализа и проектирования организационных структур, анализа процессов функционирования динамических систем.

Графом G<M, T> называется совокупность двух множеств: множества вершин M и множество ребер T, между элементами которых определено отношение *инцидентности:* каждое ребро $t \in T$ инцидентно ровно двум вершинам m_1, $m_2 \in M$, которые это ребро соединяет. При этом вершина m_1 (m_2) и ребро t называются *инцидентными* друг другу, а вершины m_1, m_2, являющиеся для ребра концевыми точками, называются *смежными*.

Пример графа представлен на рисунке 3.1.

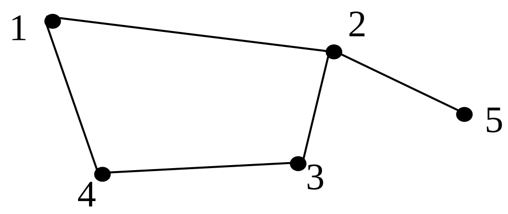


Рисунок 3.1 – Пример графа

M={1,2,3,4,5} – множество вершин.

T={(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,2), (4,1), (4,3), (5,2)}- множество ребер.

Множество ребер в T задается обозначением (i,j), где i,j – инцидентные вершины. Отношение T – быть связанным.

Рассмотрим следующие понятия.

В некоторых случаях существенно направление ребер графа. Направленные ребра называют *дугами*, а сам граф – ***ориентированным (орграфом).***

Вершина, не инцидентная ни одному ребру, называется *изолированной*. Граф может состоять только из изолированных вершин. В этом случае он называется ***нуль-графом***.

Различные ребра могут быть инцидентны одной и той же паре вершин, в этом случае они называются *кратными*.

Граф, содержащий кратные ребра, называют ***мультиграфом (псевдографом)*** [1].

Ребро может соединять некоторую вершину саму с собой, такое ребро называется ***петлей***.

Граф без петель и кратных ребер называется ***полным***, если каждая пара вершин соединена ребром.

Граф называется ***нагруженным***, если каждому ребру поставлено в соответствие некоторое действительное число (длина дуги, вес дуги и т.д.).

3.2. Способы задания графов

Наиболее простым и естественным способом задания графа является графический. Однако таким образом можно задать только небольшие графы, к тому же он не удобен для автоматизированной обработки и передачи графической информации. Рассмотрим другие способы, используемые в теории графов.

1. Задание графа перечислением его вершин и ребер (дуг)

Рассмотрим этот способ на примере графа, представленного на рисунке 3.1.

Множество вершин графа: M={1, 2, 3, 4, 5}.

Множество ребер графа: T={(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,2), (4,1), (4,3), (5,2)}.

2. Задание графа матрицей смежности

Граф может быть задан квадратной матрицей, где каждой i-ой строке (j-ому столбцу) однозначно сопоставляют элементы множества M, между которыми выполняются отношения смежности [1]. Каждая клетка b_{ij} взаимно однозначно соответствует элементам множества $M \cdot M = M^2$. Клетку b_{ij}, которая соответствует элементу, принадлежащему бинарному отношению T⊂M², отмечают, например, 1, а в остальные клетки записывают 0.

Рассмотрим матрицу смежности для графа на рисунке 3.1.

$$B=\begin{Vmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{Vmatrix}$$

3. Задание графа матрицей инцидентности

Граф может быть задан матрицей инцидентности A размерности n·m [1]:

A=$\|a_{ij}\|$, где n=$|M|$, m=$|T|$, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } a_i \text{ является концом дуги } t_j \\ -1, \text{если вершина } a_i \text{ является началом дуги } t_j \\ 0, \quad \text{если вершина } a_i \text{ не инцидентна дуге } t_j \end{cases}$$

Так для графа на рисунке 3.2 матрица инцидентности будет иметь вид:

$$B=\begin{Vmatrix}-1&0&1&1\\1&-1&0&-1\\0&1&-1&0\end{Vmatrix}$$

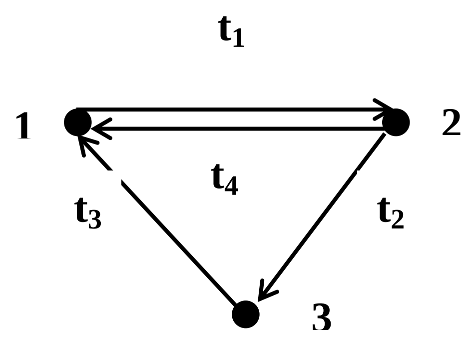


Рисунок 3.2 - Пример ориентированного графа

3.3. Характеристики графов

Подграф G_A графа G=<M,T> - это граф, в который входит лишь часть вершин графа G, образующих множество A, вместе с ребрами их соединяющими. Например, карта шоссейных дорог Пермского края является подграфом графа «карта шоссейных дорог РФ».

Частичный граф G_A по отношению к графу G=<M,T> - это граф, содержащий часть ребер (дуг) графа G.

Например, карта главных дорог РФ – частичный граф карты шоссейных дорого РФ.

Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными.*

Две вершины, соединенные ребром – смежные, т.е. *инцидентны* одному ребру.

Пусть G –неориентированный граф. ***Маршрутом*** в графе G называется такая последовательность ребер $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, в которой каждые два соседних ребра–t_{i-1} и t_i – имеют общую вершину. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз. Вершина m_0–начало маршрута. Она инцидентна t_1 и не инцидентна t_2.

Маршрут, в котором все ребра различны, называется ***цепью***.

Если все вершины, а значит и все ребра различны, то маршрут называется ***простой цепью.***

Замкнутая цепь называется ***циклом***.

Граф без циклов получил название ***ациклический***.

В ориентированном графе цепь – это ***путь***, а цикл – ***контур***.

Если любые две вершины графа можно связать цепью, то такой граф называют ***связным***. Связный граф, не имеющий циклов, называется ***деревом*** (рис. 3.3). Несколько деревьев – ***лес*** (несвязный граф без циклов).

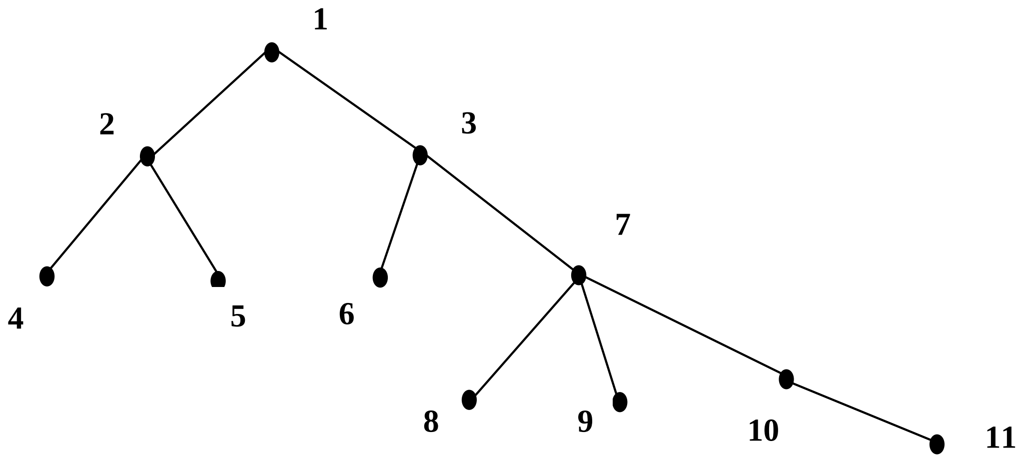


Рисунок 3.3 – Граф-дерево

Число ребер, инцидентных одной вершине называется ***степенью вершины***. Степень вершины x обозначается как deg(x) (от англ. degree – степень).

Если deg(x)=0, то такая вершина называется ***изолированной***.

Если deg(x)=1, то это означает, что вершина x ***тупиковая***.

Если G – неориентированный граф с «n» вершинами и «m» ребрами, а deg(j) – степень j-ой вершины, то сумма степеней равна удвоенному количеству ребер – ***лемма о рукопожатиях***:

$$\sum_{j=1}^{n} \deg(j) = 2m$$

Это следует из того, что каждое ребро добавляет единицу каждой из двух вершин, которые оно соединяет, то есть добавляет 2 к имеющейся сумме.

Следствие из леммы: в каждом графе число вершин нечетной степени четно.

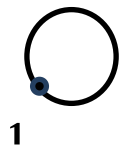
Каждый раз, когда в графе добавляется одно ребро, в конце его добавляется также и вершина. Таким образом, дерево с «n» вершинами имеет «n-1» ребро.

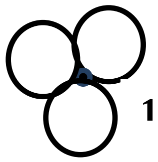
Цикломатическое число графа

Пусть G – неориентированный связный граф, имеющий «n» вершин и «m» ребер. Тогда число независимых циклов в нем – цикломатическое число - будет равно:

$\nu(G)=m-n+1$.

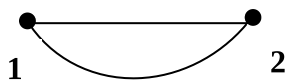
Цикломатическое число имеет интересный физический смысл: оно равно наименьшему числу независимых циклов в графе. При расчете электрических цепей цикломатическое число используется для определения числа независимых контуров. Рассмотрим примеры подсчета числа независимых контуров (рис. 3.4)





n=1, m=1n=1, m=3

1 цикл3 цикла



n=2, m=2

1 цикл

Рисунок 3.4 – Примеры подсчета числа независимых контуров

Хроматическое число графа – это количество цветов, в которые можно раскрасить вершины так, чтобы смежные вершины имели разный цвет.

Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются ***изоморфными***.

Граф называется ***связанным***, если любые две его вершины можно соединить путем (маршрутом). Несвязанный граф, например, это граф с изолированной вершиной.

3.4. Понятие о задачах на графах

Одной из первых задач в теории графов считается задача Эйлера (1736 г.) – задача о кенигсбергских мостах. Ее решение Л. Эйлер опубликовал, когда работал в Российской Академии наук. Расположение мостов в г. Кенигсберге на реке Преголь в то время приведено на рис. 3.5 а. Эйлер сформулировал эту задачу следующим образом: можно ли, начав с некоторой точки, пройти все мосты по одному разу и вернуться в исходный пункт. Для решения задачи Эйлер преобразовал рисунок в граф, обозначив берега реки и острова как вершины графа, а мосты как ребра графа (рис. 3.5 б).

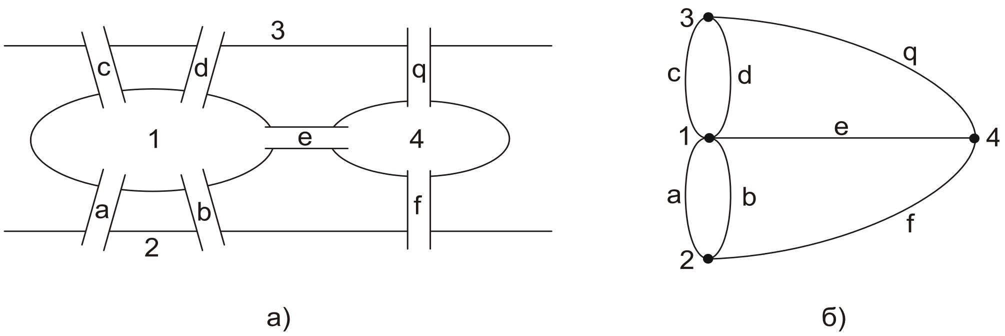


Рисунок 3.5 – Задача о кенигсбергских мостах

Обходу мостов соответствует последовательность ребер графа, в которой два соседних ребра имеют общую вершину [4]. Так как в конце обхода нужно вернуться в исходную часть города и на каждом мосту побывать по одному разу, такой обход должен быть простым циклом, содержащим все ребра графа. В дальнейшем такие циклы стали называть ***эй-***

леровыми, а графы, имеющие эйлеровые циклы – ***эйлеровыми графами*** [12]**.**

Эйлеров цикл можно вычертить, не отрывая пера от бумаги, причем процесс вычерчивания начинается и заканчивается в одной точке.

Оказывается, конечный неориентированный граф G эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

В графе, соответствующем задаче о кенигсбергских мостах, все вершины нечетны. Следовательно, эта задача неразрешима.

С другой задачей – задачей раскраски графов связана так называемая «задача четырех цветов». Это задача раскраски карты, т.е. разбиения плоскости на связные области. Достаточно ли четырех цветов для раскраски любой карты? По некоторым сведениям, еще в 1840 г. об этой задаче знал известный немецкий математик А.Ф. Мебиус. Только сравнительно недавно два американских математика доказали разрешимость этой задачи, используя компьютер.

В практических приложениях имеет большое значение задача нахождения кратчайшего пути между двумя вершинами связного неориентированного графа. К такой задаче сводятся многие задачи выбора наиболее экономичного (с точки зрения расстояния, времени, стоимости, энергозатрат, трудоемкости) маршрута по имеющейся карте дорог (задача коммивояжера) и т. д.

Имеется транспортная задача, решение которой определяет рациональный план перевозок, который обеспечивает, например, их минимальную стоимость или доставку в кратчайшее время.

Еще одной практически важной группой задач, решаемых с использованием аппарата теории графов, являются варианты так называемой задачи коммивояжера.

Пусть имеется k городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжер отправляется в путь из одного из них с тем, чтобы посетить остальные k -1 городов ровно по одному разу и вернуться в исходный город. Совершить свое путешествие он должен по наилучшему, в некотором смысле, маршруту.

Решение данной задачи может быть разделено на два этапа. На первом этапе нужно найти маршруты, которые в принципе решают задачу, т. е. позволяют посетить все города по одному разу и вернуться в исходную точку. На втором этапе из допустимых решений нужно выбрать наилучшее. Решение первой подзадачи связано с построением гамильтонового цикла.

Графы используются при анализе и синтезе систем с конечным числом состояний. Вершины графа в этом случае соответствуют состояниям дискретной системы, а дуги, например, условиям перехода между состояниями или вероятностям перехода между ними. Часто также используются граф-схемы алгоритмов, о которых будет речь идти в дальнейшем.

Графом можно описать схемы технических устройств, например, линии связей печатной платы, топологию микросхем т.д.

Гамильтоновым циклом называется простой цикл, проходящий через все вершины рассматриваемого графа. Если данный маршрут не замкнут, он называется ***гамильтоновой цепью***.

Легко видеть, что сформулированная ранее задача коммивояжера есть задача отыскания на графе гамильтонова цикла. Внешне она похожа на задачу отыскания эйлерова цикла и кажется легко разрешимой. Однако это не так. В настоящее время не удалось сформулировать необходимых условий, которым должен удовлетворять граф, чтобы на нем можно было проложить гамильтонов цикл.

Примеры решения задач на графах

Задача 1

По графу (рис.3.6) получить матрицу смежности и проверить справедливость теоремы о сумме степеней вершин.

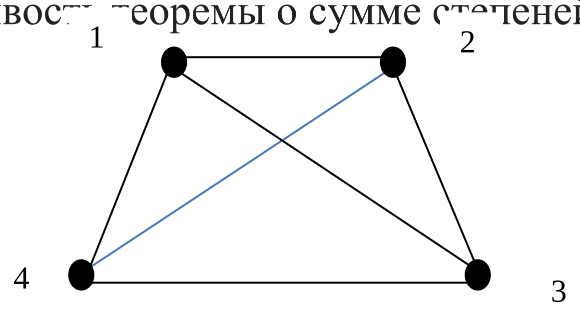


Рисунок 3.6. – Графическое представление графа

Решение

Диагональ матрицы равна нулю, т.е. граф полный, без петель (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Матрица смежности

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

По матрице смежности можно получить степени вершин: все они равны 3 (три единицы в строке), т.е. каждая вершина связана с тремя другими:

deg(1)=3 deg(2)=3 deg(3)=3 deg(4)=3

В графе 6 ребер, т.е. m=6. 2m=12, т.е. удвоенное число вершин равно сумме степеней вершин графа:

$$2m = \sum_{i=1}^{m} \deg(i) = 6$$

Задача 2

Построить матрицу инцидентности ориентированного графа (рис. 3.7).

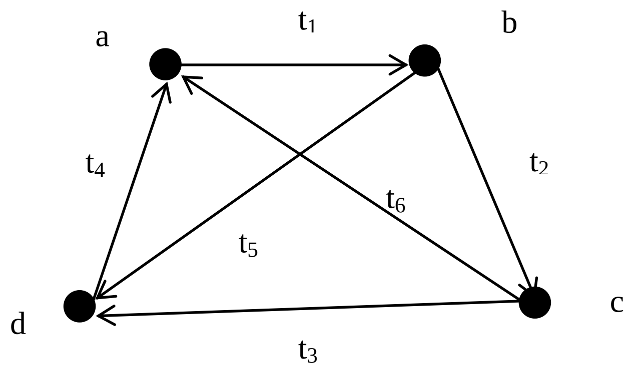


Рисунок 3.7 – Ориентированный граф

Решение

Строки матрицы – вершины, столбцы – ребра (табл. 3.2). В клетках таблица ставим значение 1, если ребро входит в вершину; -1, если ребро исходит из вершины; о, если ребро не связано с вершиной.

Таблица 3.2 – Матрица инцидентности

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
a	-1	0	0	1	0	1
b	1	-1	0	0	-1	0
c	0	1	-1	0	0	-1
d	0	0	1	-1	1	0

Задача 3

Получить теоретико-множественное задание графа, показанного на рисунке 3.8.

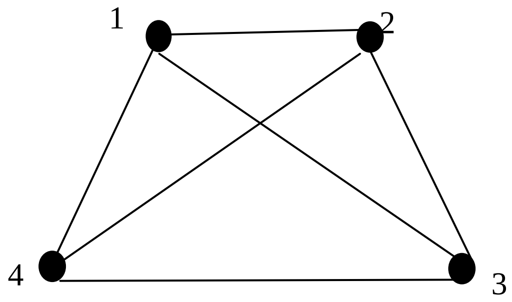


Рисунок 3.8 – Графическое представление графа

Решение

Теоретико-множественное Задача графа – это Задача несущего множества и бинарного отношения в аналитическом виде.

Несущее множество – множество вершин M={1,2,3,4};

бинарное отношение – множество пар:

T={(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)} Всего 12 пар.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1

Граф задан множеством вершин V={a, b, c, d, e, f} и множеством ребер E={(a,c), (a,f), (b,c), (c,d), (d,f)}. Нарисовать этот граф, построить для него матрицы смежности и инцидентности.

Задача 2

Задан граф соединений четырех торговых точек (рис. 3.9).

а) Определить степени вершин.

б) Определить цикломатическое число.

в) Определить хроматическое число.

г) Построить матрицу смежности.

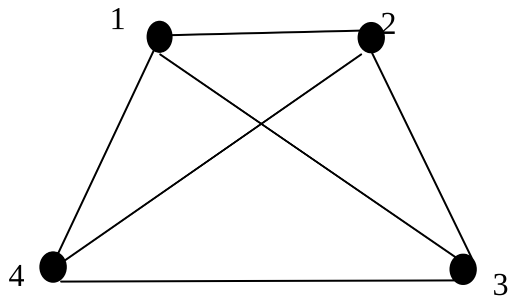


Рисунок 3.9 – Граф соединения торговых точек

Задача 3

Построить матрицу инцидентности для графа, заданного списками смежности: a: b,d; b:a,c,d,f; c: b,f; d: a,b,f; e: ;f: b,c,d

Задача 4

В графе 30 вершин и 80 ребер, каждая вершина имеет степень 5 или 6. Сколько в нем вершин степени 5?

Задача 5

В графе каждая вершина имеет степень 3, а число ребер заключено между 16 и 20. Сколько вершин в этом графе?

Задача 6

В таблице 3.3 содержатся сведения о протяжённости дорог (в километрах) между населенными пунктами П1, П2, П3, П4, П5, П6. На рисунке 3.10 представлена схема дорог, связывающих населенные пункты А, Б, В, Г, Д, Е.

Обозначения населённых пунктов в таблице никак не связаны с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова протяжённость дороги из пункта Б в пункт В. В ответе запишите целое число — так, как оно указано в таблице.

Таблица 3.3 – Протяженность дорог

	П1	П2	П3	П4	П5	П6
П1		10			8	5
П2	10			20	12	
П3				4		
П4		20	4		15	
П5	8	12		15		7
П6	5				7	

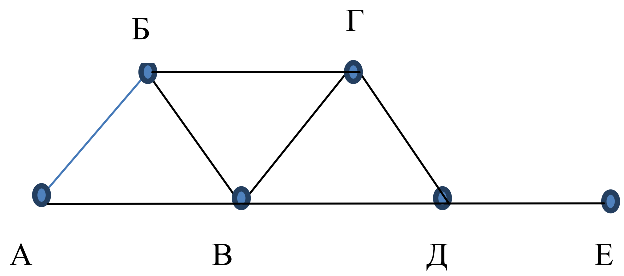


Рисунок 3.10 – Схема дорог

Задача 7

Задан ориентированный граф (рис.3.11).

Построить для него матрицу инцидентности.

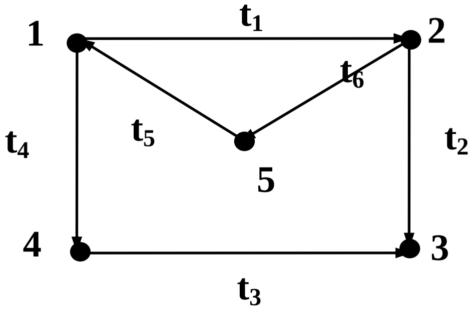


Рисунок 3.11 – Ориентированный граф

Задача 8

Задан некоторый граф (рис.3.12).

Построить для графа матрицу инцидентности.

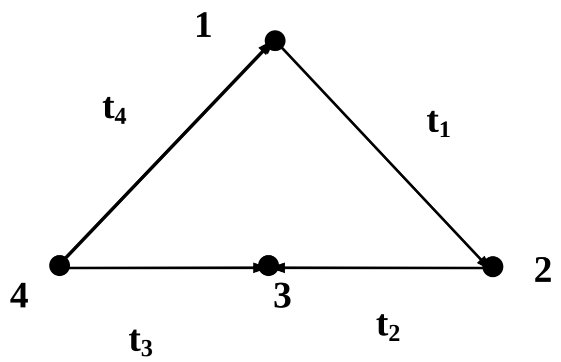


Рисунок 3.12 – Некоторый граф

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать определение графа.
2. Перечислить основные виды графов.
3. Перечислить способы задания графов.
4. Какой граф называется ациклическим?
5. Что понимается под степенью вершины графа?
6. Сформулировать и записать лемму о рукопожатиях.
7. Что такое хроматическое число графа?
8. Что такое цикломатическое число графа?
9. Какие графы называются эйлеровыми?
10. Что понимается под гамильтоновой цепью?

Глава 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

4.1. Понятие о переключательных функциях

Переключательной функцией (ПФ) или функцией k-значной логики называется функция, принимающая значение из множества {0,1,…,k–1}, аргументы которой принимают значения из этого же множества.

Функция может быть определена на множествах:

- бинарное множество B={0, 1};
- тернарное множество T={0,1,2};
- квадро –множество Q={0,1,2,3};
- иное k-элементное множество.

Наибольшее применение нашли двоичные ПФ, заданные на бинарном множестве B. Другие названия ПФ - логическая функция, булева функция – по имени основателя алгебры логики Джорджа Буля (1815 – 1864). Двоичная переключательная функция, булева функция, логическая функция – синонимы.

4.2. Способы задания переключательных функций

Функция f, зависящая от n переменных называется *двоичной переключательной (булевой)*, если она и любой из ее аргументов $x_i,\ i = \overline{1,n}$ принимают значение только из конечного множества, содержащего два элемента.

Двоичная переключательная функция может быть задана одним из следующих способов:

- табличный (матричный);
- геометрический;
- аналитический.

Табличный (матричный) способ задания

Функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задается таблицей ее значений – таблицей истинности (ТИ), где указываются наборы переменных и соответствующие им значения функции. Количество наборов соответствует значению 2^n, где n – количество аргументов функции. Наборы удобно рассматривать как двоичные числа, называемые номером набора. Как правило, их располагают в порядке возрастания.

Пример: функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицей истинности (ТИ) (табл. 4.1).

Таблица 4.1- Таблица истинности функции $f(x_1, x_2, x_3)$

номер набора

№	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_1}$	**y**
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

слово

Наборы аргументов называют:

- ***рабочими*** (на них функция истинна, т.е. ее значение равно 1);
- ***запрещенными*** (на них функция ложна, т.е. ее значение равно 0);

- ***условными*** (на них функция не определена, значение функции обозначают символом «~» - тильда).

В таблице каждому набору переменных поставлено в соответствие значение функции 0 или 1, то есть образовано восьмибуквенное слово в двоичном алфавите. Таких слов может быть 2^{2^n}, где n – число переменных.

В нашем примере функция задана для всех наборов, то есть полностью определена.

Существуют функции частично определенные или недоопределенные.

Возможен более простой вариант задания переключательной функции, который вытекает из таблицы истинности – указанием рабочих и запрещенных наборов в какой-либо системе счисления. Так функция, описанная выше таблицей истинности, может быть задана так называемой символической формой с восьмеричной нумерацией наборов:

$$f(x_1, x_2, x_3)_8 = \underbrace{0,\ 2,\ 3,\ 6}_{\text{Номера рабочих наборов}}\ [\ \underbrace{1,\ 4,\ 5,\ 7}_{\text{Номера запрещенных наборов}}\ ]$$

Это значит, что функция принимает значение 1 на наборах 0, 2, 3, 6 и значение 0 на наборах 1, 4, 5, 7.

Для недоопределенной функции это может быть записано так:

$f(x_1, x_2, x_3)_8$ = 1,3,5 [0, 2, 4] {6, 7}, то есть функция не определена на наборах 6 и 7. Очевидно, что последнее множество наборов можно не указывать.

Полностью определенную функцию можно задать перечислением только рабочих наборов.

В наших примерах номера наборов заданы в восьмеричной системе счисления, но могут быть заданы в десятиной или шестнадцатеричной системах счисления.

Из таблицы истинности вытекает еще один способ задания полностью определенной функции – *номером (числом)* в восьми-, десяти-, шестнадцатеричной системах счисления. Столбец значений функции может быть рассмотрен как код числа. При этом младшие разряды числа располагаются в верхних строках таблицы, старшие – внизу. Таким образом, функция, представленная выше таблицей истинности, может быть записана следующим образом:

$f(x_1, x_2, x_3)$=01001101_2 = 115_8 = $4D_{16}$ = 77

Геометрический способ задания переключательной функции

При геометрическом способе задания переключательная функция задается с помощью n-мерного куба, который представляет собой решетку Хассэ. На рисунке 4.1 представлена функция $f(x_1, x_2, x_3)$=10101110_2.

Вершины куба, соответствующие рабочим наборам функции, каким-либо образом помечаются.

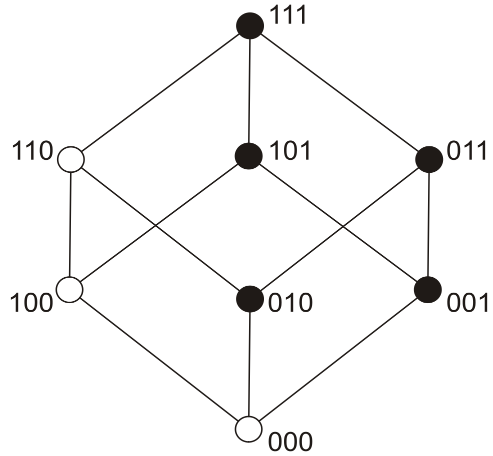


Рисунок 4.1 – Решетка Хассэ

Аналитический способ задания переключательной функции

Переключательная функция может быть представлена выражением, где переменные связаны знаками логических операций. Такое представление носит название аналитического.

4.3. Основные логические операции

Конъюнкцией называется бинарная логическая операция, соединяющая две двоичных переменных a и b, принадлежащих множеству {0,1}, в такую переключательную функцию, которая равна 1 (истинна) только тогда, когда равны 1 (истинны) обе переменных. Обозначение операции:

$\boldsymbol{y = a \wedge b}$ или $\boldsymbol{y = a}\&b$ или $\boldsymbol{y = a \cdot b}$ или $\boldsymbol{y = ab}$

Таблица истинности имеет вид:

Таблица 4.2 – Таблица истинности для функции $y = ab$

a	b	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкцией называется бинарная логическая операция, соединяющая две переменные a и b в такую переключательную функцию, которая равна 0 (ложна) только тогда, когда равны 0 (ложны) обе переменные.

Обозначение операции: $\boldsymbol{y = a \vee b.}$

Таблица истинности имеет вид:

Таблица 4.3 Таблица истинности для функции $y = a \vee b$

a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операции конъюнкция и дизъюнкция могут быть как двуместными, так и многоместными.

Инверсией называется переключательная функция, полученная отрицанием данной ПФ. Операция является унарной. Обозначение операции: $\boldsymbol{y = \bar{a}}$. Таблица истинности имеет вид:

Таблица 4.4 Таблица истинности для функции $y = \bar{a}$

a	y
0	1
1	0

Импликацией (следованием) называется бинарная логическая операция, соединяющая две переменных a и b в такую переключательную функцию, которая равна 0 (ложна) только тогда, когда a истинно, a b ложно. Обозначение операции: $\boldsymbol{y = a \longrightarrow b}$. Это означает импликация a в b или следование b из a. Операция является бинарной. Таблица истинности имеет вид:

Таблица 4.5 – Таблица истинности для функции $y = a \longrightarrow b$

a	b	y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленцией (равнозначностью) называется бинарная логическая операция, соединяющая две переменных в такую ПФ, которая истинна тогда, когда обе образующих ее переменных одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначение операции: **y= a ↔ b**.

Таблица истинности имеет вид:

Таблица 4.6 – Таблица истинности для функции y= a ↔ b

a	b	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Сумма по модулю два (исключающее ИЛИ, неравнозначность) – бинарная логическая операция, соединяющая переменные в такую ПФ, которая истинна тогда, когда аргументы не равны. Обозначение операции: $\boldsymbol{y = a \oplus b}$. Таблица истинности имеет вид:

Таблица 4.7 – Таблица истинности для функции $y = a \oplus b$

a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Алгебра, несущим множеством которой является множество двоичных переключательных функций, а операциями дизъюнкция, конъюнкция, инверсия, называется ***булевой алгеброй переключательных функций.***

Область определения переключательной функции – множество всех наборов переменных, на которых функция определена.

4.4. Переключательные функции и переключательные схемы

Булева алгебра создавалась Дж. Булем для математизации логики, но оказалось, что она, как нельзя лучше, подходит для описания функционирования переключательных схем, построенных на механических переключателях и электромагнитных реле, а в дальнейшем и на электронных элементах, имеющих два состояния. Отсюда и другое название логических функций – переключательные.

Простейшее электромагнитное реле состоит из сердечника, обмотки (вместе образуют электромагнит), якоря и контактов.

При пропускании тока через обмотку реле сердечник притягивает якорь, который через диэлектрическую проставку замыкает или размыкает контакты. На электрических схемах реле обозначают буквой К и порядковым номером (рис. 4.2).

Изображенное реле имеет две контактные группы. Пунктирная линия указывает, к какому реле относятся контактные группы.

Различают контакты:

- нормально-разомкнутые (НР);
- нормально-замкнутые (НЗ);
- перекидные (комбинация НЗ и НР контактов) (рис.4.3).

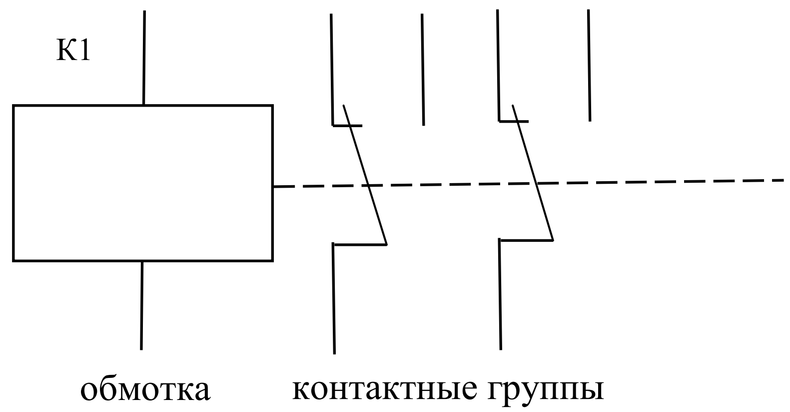


Рисунок 4.2 – Обозначение реле на электрических схемах

Название отражает состояние контактов реле при отсутствии управляющего воздействия, т. е. тогда, когда по обмотке не протекает ток. Если изобразить на рисунке управляющее воздействие, то оно должно быть направлено либо сверху вниз, либо слева направо (естественное направление для чтения и письма). Это позволяет не допустить ошибку в изображении контактов на схеме или в толковании схемы.

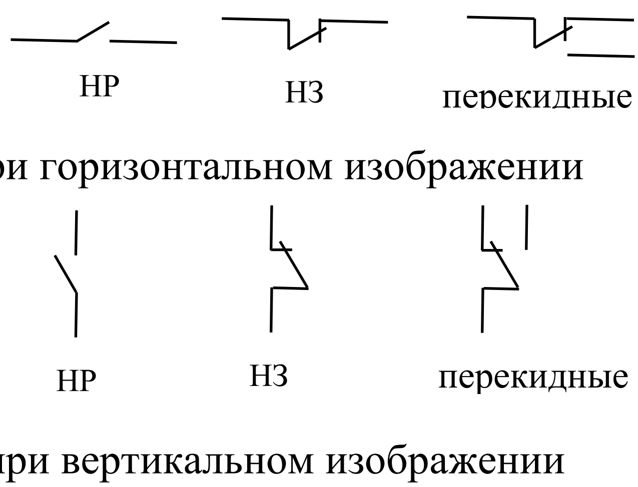


Рисунок 4.3 – Виды контактов

Электромагнитные реле используются во всех областях техники, выпускаются в большом ассортименте на различные напряжения и токи срабатывания, на различную коммутируемую мощность с самым разным числом контактных пар (групп).

Переключательные схемы на реле могут выполнять логические операции. Приведем пример такой переключательной схемы (рис. 4.4). Здесь шина $+U_{пит}$ является положительным полюсом источника питания, отрицательным полюсом является шина GND (граунд, земля, общий провод).

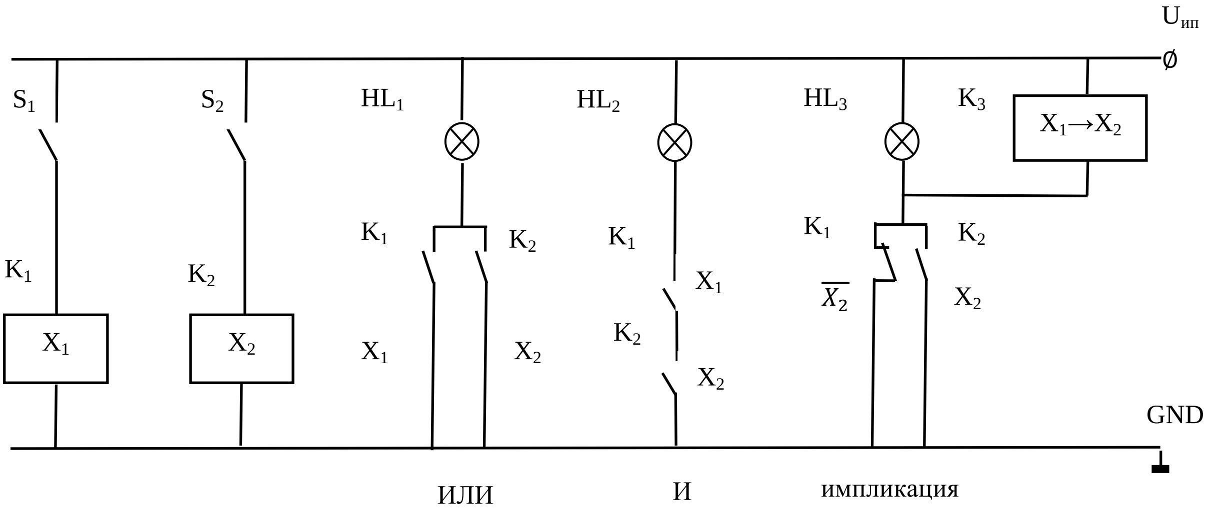


Рисунок 4.4 – Пример переключательной схемы

Здесь:

S_1, S_2 – механические переключатели (тумблеры), задающие значения логическим переменным X_1, X_2 ;

K_1, K_2, K_3 – электромагнитные реле;

HL_1, HL_2, HL_3 – индикаторные лампы накаливания.

Если невозможно связать обмотку реле с контактами пунктирной линией, то контакты подписываются наименованием реле, т.е. K_1, K_2, K_3.

Очевидно, лампа HL_1 будет гореть при включенных тумблерах S_1, S_2, либо одного из них. Следовательно, здесь реализована операция ИЛИ: $x_1 \vee x_2$.

HL_2 будет указывать на истинность операции И, а HL_3 – импликации $x_1 \rightarrow x_2$.

Все известные нам логические (переключательные) функции могут быть реализованы на реле.

Счетная техника на реле производилась еще в 60-е годы прошлого века (например, бухгалтерские машины), однако невысокая надежность, чрезвычайно низкое быстродействие, большие габариты и масса, большое энергопотребление требовали электронной элементной базы.

В качестве такой базы для первого поколения ЭВМ использовались электронные лампы. В Перми первая ламповая ЭВМ «Арагац», произведенная в столице Армянской ССР г. Ереване (всего Ереванский экспериментальный завод «Научно - исследовательский институт математических машин» выпустил три таких машины) появилась в конце 50-х годов прошлого столетия в Пермском государственном университете и доработала до 1971 года. Это была первая ЭВМ на Западном Урале. Для обучения программированию пермскими авторами Т.А. Голощаповой, Ю.В. Девингталем и Ю.Ф. Фоминых был написан и издан первый в Перми учебник по программированию на машинном языке «Программирование для электронной вычислительной машины Арагац». Книга давно стала библиографической редкостью. Личный, много лет хранимый, экземпляр этого учебника принес в дар кафедре информационных систем и телекоммуникаций для кафедральной экспозиции по истории цифровой техники заведующий кафедрой высшей математики Пермского ГАТУ Аюпов Васыл Вафович.

60-е годы примечательны вторым поколением ЭВМ по элементной базе – это отдельные (дискретные) полупроводниковые приборы – диоды, транзисторы, резисторы, конденсаторы и другие компоненты, связанные на плате печатным монтажом.

В 70-е годы появившиеся интегральные технологии позволили значительно повысить плотность монтажа, а вместе с этим повысить надежность, быстродействие и улучшить габаритно-массовые показатели. Логические элементы, реализованные в интегральных микросхемах (ИМС) малой и средней степени интеграции обозначали так, как показано на рисунке 4.5.

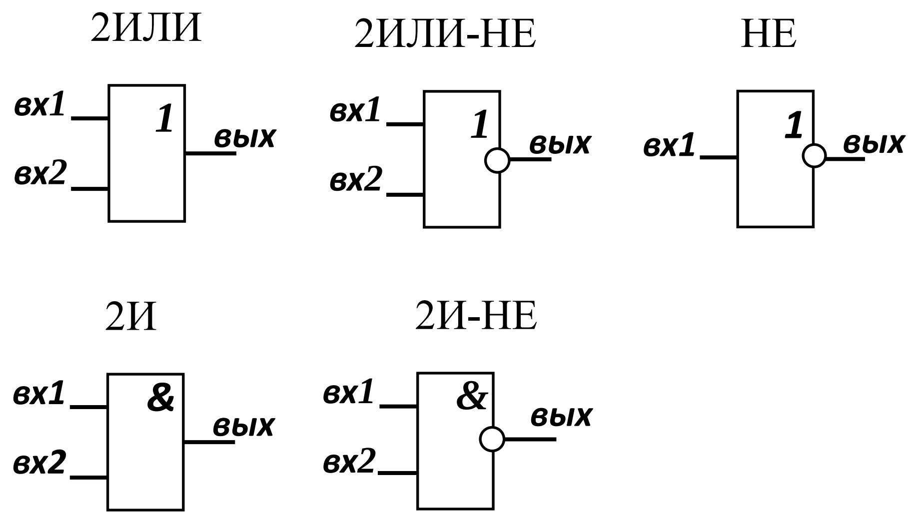


Рисунок 4.5 – Обозначение логических элементов

Самые массовые ИМС малой степени интеграции – это логические элементы. Так, например, ИМС К155 ЛА3 имеет структуру 4х(2И-НЕ). Это означает, что в одном корпусе содержатся четыре двухвходовых элемента 2И-НЕ (рис. 4.6, 4.7).

Размеры ИМС – 18,8х6,5 мм, толщина 3,3 мм (без выводов).

Корпус ИМС – DIP-14 (14 выводов). Сокращение dip образовано от англ. «dual in line packed», означает, что выводы сгруппированы в две линии. ИМС создана по технологии транзисторно-транзисторной логики (ТТЛ). Так как логика двухступенчатая, первая ступень – логика И реализована на транзисторах, вторая ступень – логика НЕ также построена на транзисторах.

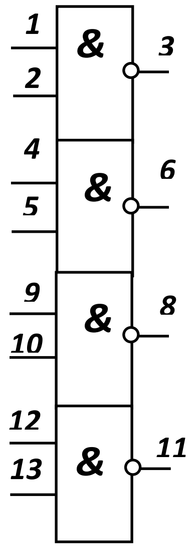


Рисунок 4.6 – Изображение ИМС К155 ЛА3
на принципиальной схеме

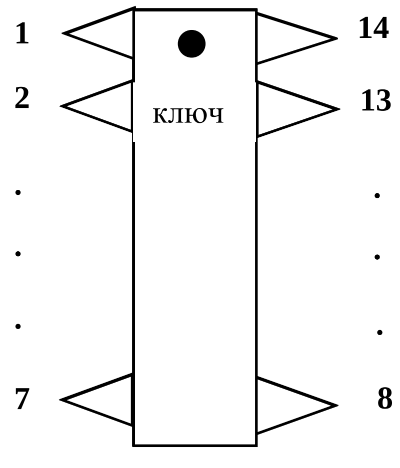


Рисунок 4.7 – Нумерация выводов ИМС (вид сверху)

Существуют ИМС технологий:
- ДТЛ – диодно-транзисторная логика;
- РТЛ – резистивно-транзисторная логика;

- КМОП – элементы на комплементарных парах полевых транзисторов;
- ЭСЛ – эмиттерно-связанная логика и другие.

Выводы питающего напряжения и цепи питания не изображают, чтобы не загромождать схему.

Вывод 14 – +5В.

Вывод 7 – GND (общий).

Значение логической переменной кодируют различными уровнями напряжения.

Так, напряжение логического нуля U_0 меньше 0,5 В, а напряжение логической единицы U_1 больше 2,5 В. Говорят, что это логические уровни ТТЛ. Зарубежным аналогом является микросхема 7400, совместимая по структуре, логическим уровням сигналов и габаритно-присоединительным размерам.

Напряжение питания и логические уровни ИМС различных технологий чаще всего разные и их совместное применение в одной схеме бывает невозможно без специальных технических решений.

Принципы и основы построения цифровых узлов и устройств, вопросы выбора элементной базы, совместного использования ИМС различных технологий, повышения надежности функционирования и помехоустойчивости изучает дисциплина «Цифровая схемотехника» [8].

У термина «схема» [греч. schema – образ, вид, форма] помимо значения «устройство, изделие, прибор и т. д.» есть другой смысл. Схема – это документ, в котором показаны в виде условных изображений или обозначений составные части изделия и связи между ними. Очень хорошо смысл передает немецкое слово «Stromlaufplan», что буквально переводится как «план движения тока»

Поскольку цифровая техника использует электрические сигналы, то все схемы называются электрическими. В других предметных областях схемы бывают механическими, гидравлическими и др.

Существует три основных уровня электрических схем.

Структурная электрическая схема (обозначение на чертеже Э1) – документ, отображающий основные функциональные части изделия, их назначение и взаимосвязи; служит для общего ознакомления с изделием (установкой). При проектировании структурная схема выполняется первой. На этих схемах изображаются все основные функциональные части изделия [8].

Функциональная электрическая схема (Э2) – документ, разъясняющий определенные процессы в изделии в целом или в отдельных его функциональных цепях.

Принципиальная электрическая схема (Э3) – документ, определяющий полный состав элементов и связей между ними и дающий по сравнению с двумя предыдущими типами схем более детальное представление о принципах работы изделия (установки).

В курсе дискретной математики мы должны научиться строить простые цифровые схемы по их описанию на языке переключательных функций [8].

4.5. Элементарные двоичные переключательные функции

Любая логическая функция может быть задана аналитическим выражением через элементарные логические функции. Элементарными принято называть логические функции, число аргументов которых не более двух. Число различных логических функций от n аргументов вычисляется по формуле: $N_n=2^{2^n}$.

Рассмотрим все переключательные функции от одного аргумента. Таких функций будет $2^2=4$ (таб. 4.8).

Таблица 4.8 – Переключательные функции одной переменной

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Таким образом, имеется четыре логических функции одной переменной, две из них – константы, их значения не зависят от значений переменной x: $f_0(x)=0$ – константа нуля, $f_3(x)=1$– константа единицы. Функция $f_2(x)=x$, т.е. совпадает со значением переменной и называется функцией повторения или тавтологией. Функция $f_1(x)=\overline{x}$ – это инверсия.

Можно заметить, что для каждой функции существует инверсная ей функция: $f_0=\overline{f_3}$ и $f_1=\overline{f_2}$

Рассмотрим все элементарные логические функции от двух аргументов (табл. 4.9).Всего таких функций будет $2^{2^2}=16$.

Таблица 4.9 – Переключательные функции двух переменных

x_1	x_2	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Охарактеризуем эти функции.

1) $y_0 = 0$ при любом наборе x_1 , x_2 . Называется ***константой «нуль».***

2) $y_1 = 1$ только при $x_1 = x_2 = 1$. Называется ***конъюнкцией***, *а* операция отыскания – логическим умножением (операция «И»).

$$y_1 = x_1x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2 = x_1 \;\&\; x_2.$$

Конъюнкция может быть функцией любого числа аргументов.

3) y_2 принимает единичное значение лишь тогда, когда $x_1 = 1$, а $x_2 = 0$. Называется функцией ***запрета*** по аргументу x_2 . Операция отыскания называется операцией запрета по x_2 или операцией «НЕТ» по x_2.

$$y_2 = x_1 \nabla x_2.$$

4) y_3 повторяет значения x_1. Называется ***тавтологией***. Операция отыскания называется повторением.

$$y_3 = x_1.$$

5) y_4 принимает единичное значение лишь тогда, когда $x_1 = 0$, а $x_2 = 1$. Функция ***запрета*** по аргументу x_1.

$$y_4 = x_2 \nabla x_1.$$

6) y_5 повторяет значения x_2. ***Тавтология***.

$$y_5 = x_2.$$

7) y_6 принимает единичные значения, когда ее аргументы принимают разные значения, и нулевые, когда аргументы равны. Называется функцией ***неравнозначности*** (сложение по модулю 2, «исключающее ИЛИ»).

$$y_6 = x_1 \oplus x_2.$$

Операция отыскания функции называется операцией отрицания равнозначности.

Может быть функцией любого числа аргументов.

8) y_7 принимает единичное значение, если хотя бы один ее аргумент равен единице. Называется ***дизъюнкцией***, а операция отыскания называется логическим сложением или операцией «ИЛИ».

$$y_7 = x_1 \vee x_2.$$

9) y_8 =1 только тогда, когда $x_1 = x_2 = 0$. Такая функция называется функцией Даггера или ***стрелкой Пирса***. Операция ее отыскания – «ИЛИ–НЕ».

$$y_8 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 \vee x_2}$$

10) y_9 принимает единичное значение тогда, когда ее аргументы принимают одинаковые значения. Называется ***эквиваленцией***, а операция отыскивания – операцией равнозначности.

$$y_9 = x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = x_1 \leftrightarrow x_2$$

11) y_{10} принимает значения, противоположные аргументу x_2 и является ***инверсией*** $\mathbf{x_2}$.

$$y_{10} = \overline{x}_2.$$

12) y_{11} принимает нулевое значение, когда аргумент x_1 = 0, а аргумент x_2 = 1. Называется ***импликацией*** $\mathbf{x_2}$, а операция отыскания – операцией следования из x_2.

$$y_{11} = x_2 \rightarrow x_1.$$

13) y_{12} принимает значения, противоположные аргументу x_1 и является ***инверсией*** $\mathbf{x_1}$.

$$y_{12} = \overline{x}_1.$$

14) y_{13} принимает нулевое значение, когда аргумент x_2 = 0, а аргумент x_1 = 1. Называется ***импликацией*** $\mathbf{x_1}$, а операция отыскания – операцией следования из x_1.

$$y_{13} = x_1 \rightarrow x_2.$$

15) y_{14} принимает нулевое значение только тогда, когда оба ее аргумента $x_1 = x_2$ =1. Называется функцией ***Шеффера (штрих Шеффера)***, а операция ее отыскания – «И–НЕ».

$$y_{14} = x_1 | x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

16) y_{15} сохраняет единичное значение при всех наборах аргументов. Называется ***константой «единица».***

$$y_{15} = 1.$$

Среди функций есть такие, которые зависят только от одной переменной, есть такие, которые вообще не зависят от переменных, например, const “0” и const “1”. Такие функции называются частично или полностью вырожденными.

4.6. Функциональная полнота систем переключательных функций

Подставляя в качестве аргументов одни переключательные функции в другие, можно получить новые функции. Эта операция называется суперпозицией.

При использовании суперпозиции возникает следующий вопрос – каким должен быть минимальный состав элементарных логических функций, который позволяет путем их суперпозиции получить любую сколь угодно сложную логическую функцию от конечного числа переменных. Эта проблема называется проблемой функциональной полноты ПФ. Для решения этой проблемы были выделены следующие классы логических функций [4,5].

*1. **Класс функций, сохраняющих константу 0.*** В этот класс входят функции, которые на нулевом наборе переменных принимают нулевое значение: $f(0,0\ldots0)=0$. Такова, например, конъюнкция $f_8(0,0)=0\cdot0=0$.

*2. **Класс функций, сохраняющих константу 1.*** В этот класс входят функции, которые на единичном наборе переменных принимают единичное значение: $f(1,1)=1$. Этим свойством также обладает конъюнкция $f_8(11)=1\cdot1=1$. Классы 1, 2 легко устанавливаются по таблице истинности;

*3. **Класс самодвойственных функций.*** Переключательные (логические) функции $f(x_{1,}x_{2,}\ldots x_n)$ и $g(x_{1,}x_{2,}\ldots x_n)$ называются двойственными, если имеет место равенство $f(x_{1,}x_{2,}\ldots x_n)=\overline{g}(\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n)$, т.е. одна функция получается из другой, если провести замену всех переменных на их инверсии и провести инверсию функции [3,4].

Например, $f_8(x_{1,}x_2)=x_1x_2$ и $f_{14}(x_{1,}x_2)=x_1\vee x_2$ двойственны:.

Это можно доказать, построив таблицу истинности:

Таблица 4.10 – Таблица истинности

x_1	x_2	x_1V x_2	x_1x_2
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Переключательная функция называется самодвойственной, если она двойственна по отношению к самой себе: $f(x_{1,}x_{2,}\ldots x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n)$ [3,5].

Такова, например, функция $f_{10}(x_1,x_2)=x_2$.

Самодвойственность устанавливается по таблице истинности следующим образом: значения функции, симметричные относительно середины наборов, взаимно инверсны (табл. 4.11).

Таблица 4.11 – Таблица истинности для функции $f_{10}(x_1,x_2)=x_2$

x_1	x_2	f_{10}
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

4. ***Класс линейных функций.*** Переключательная функция называется линейной, если возможно ее представление в виде линейного полинома, использующего функцию сложения по модулю 2:

$f(x_1,x_2)=c_0\oplus c_1x_1\oplus c_2x_2$, где c_0,c_1,c_2 – константы 0, 1.

Например, для функции $f_6(x_1x_2)=x_1\oplus x_2$ при $c_0=0$, $c_1=c_2=1$:

$f_6(x_1x_2)=0\oplus 1\cdot x_1\oplus 1x_2$.

Рассмотрим все линейные функции двух аргументов, задав все возможные значения c_i (табл. 4.12).

Таблица 4.12 – Линейные функции двух переменных

c_0	c_1	c_2	Вид полинома	Примечание
0	0	0	0	Const 0
0	0	1	x_2	x_2
0	1	0	x_1	x_1
0	1	1	$x_1\oplus x_2$	неравнозначность
1	0	0	1	Const 1
1	0	1	$1\oplus x_2$	$\overline{x}_2$
1	1	0	$1\oplus x_1$	$\overline{x}_1$
1	1	1	$1\oplus x_1\oplus x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$

Из таблицы видно, что каждая линейная функция имеет инверсную ей функцию: константа 0 – константа 1; повторение x_1, x_2 – инверсия $\overline{x}_1, \overline{x}_2$; сложение по модулю 2 $x_1\oplus x_2$ – эквиваленция $x_1\leftrightarrow x_2$.

5. ***Класс монотонных функций.*** Монотонная функция на большем сравнимом наборе переменных по всем путям из начальной вершины в конечную принимает не меньшие значения [5]. Монотонность функции удобно проверять на решетках Хассэ. Так, для двух переменных решетка имеет вид:

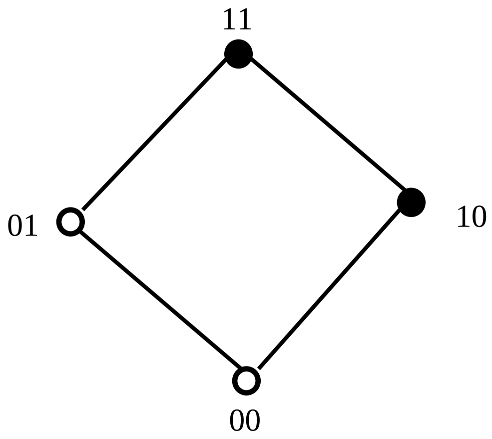


Рисунок 4.8 – Решетка Хассэ для двух переменных
с указанием значений $f_{10}(x_1, x_2)=x_1$

На рис. 4.8 проставлены значения монотонной функции x_1. Видно, что 00<01<11, 00<10<11 (частично упорядоченное множество наборов).

Очевидно, что константы 0, 1, дизъюнкция и конъюнкция, повторения x_1, x_2 – монотонные функции.

Система логических функций называется функционально полной (ФПС), если любая произвольная переключательная (логическая) функция от любого числа переменных может быть представлена в виде суперпозиции логических функций из этой системы.

Функционально полная система логических функций называется ***минимальной***, если удаление из нее хотя бы одной функции превращает ее в неполную. Критерий функциональной полноты логических функций устанавливает ***теорема Поста-Яблонского,*** в которой утверждается, что для функциональной полноты систем логических функций необходимо и достаточно, чтобы они содержали следующие функции:

- не сохраняющую константу 0;

- не сохраняющую константу 1;
- несамодвойственную;
- нелинейную;
- немонотонную.

4.7. Базисы представления переключательных функций

Функциональная полнота систем переключательных функций представляет собой базис. Всего может быть получено 17 различных минимальных базисов из функций от двух переменных [7].

Имеются функции, обладающие всеми пятью свойствами, это ИЛИ – НЕ (базис Вебба (Пирса)) и И – НЕ (базис Шеффера).

Приведем примеры некоторых базисов:

1. И, ИЛИ, НЕ –основной базис, ОФПС, ОФПН, булев базис;
2. ИЛИ – НЕ – базис Пирса;
3. И – НЕ – базис Шеффера;
4. $\oplus$, И, НЕ – базис Жегалкина.

4.8. Основные законы булевой алгебры переключательных функций

1. ***Закон тождества*** $x \equiv x$ – (мысль, заключенная в некотором высказывании, соответствующем двоичной переключательной функции остается неизменной на протяжении всего рассуждения).

2. ***Закон противоречия*** $x \cdot \bar{x} = 0$ (никакое утверждение не может быть истинным одновременно со своим отрицанием).

3. ***Закон исключенного третьего*** (для каждого высказывания имеется лишь две возможности: быть либо истинным, либо ложным; третьего не дано): $x \vee \bar{x} \equiv 1$

4. ***Закон двойного отрицания*** $\bar{\bar{x}}$ =0.

5. $x \cdot x \equiv x;$

$x \vee x \equiv x$ - ***закон идемпотентности*** для конъюнкции и дизъюнкции (от латинского idem – то же, potentio – сила).

6. $x \cdot y \equiv y \cdot x;$

$x \vee y \equiv y \vee x$ – ***закон коммутативности (переместительный)***.

7. $x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z;$

$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ***закон ассоциативности (сочетательный)***.

8. $x \cdot (y \vee z) \equiv xy \vee xz;$

$x \vee yz \equiv (x \vee y)(x \vee z)$ – ***закон дистрибутивности (распределительный)***.

Причем, если первая формула изоморфна распределительному закону алгебры, то вторая формула не имеет аналога.

9. ***Закон де Моргана:***

$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}\,;$

$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$

10. ***Закон поглощения:***

$x \vee xy = x;$

$x(x \vee y) = x.$

11. ***Закон склеивания:***

$xy \vee x\bar{y} = x;$

$(x \vee y) \cdot (x \vee \bar{y}) = x.$

Кроме законов действуют следующие соотношения, вытекающие из определения дизъюнкции и конъюнкции:

$x \vee 0 = x \qquad x \cdot 0 = 0$

$x \vee 1 = 1 \qquad x \cdot 1 = x$

В булевой алгебре ПФ установлен следующий порядок действий:

- инверсия;
- конъюнкция;
- дизъюнкция.

Для изменения установленного порядка используются скобки.

4.9. Преобразование форм представления переключательных функций

Одним из способов задания переключательных функций является их представление в виде аналитических выражений (формул).

Различают следующие формы аналитических выражений:

- дизъюнктивные;
- конъюнктивные;
- смешанные (скобочные).

а) Дизъюнктивные формы

Выражение вида $\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} \cdot ... \widetilde{x_n}$, содержащее множество попарно различных переменных или их инверсий, называется элементарной конъюнкцией (ЭК).

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – это *дизъюнкция элементарных конъюнкций*, соответствующих рабочим наборам ПФ, причем, если переменная в наборе равна нулю, то она входит в элементарную конъюнкцию с инверсией [7].

Если хотя бы одна ЭК не содержит все переменные, от которых зависит ПФ, то такая форма называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Рассмотрим на примере ПФ z=a⊕b. Таблица истинности функции представлена ниже.

Таблица 4.13 – Таблица истинности функции z=a⊕b

a	b	z=a⊕b	
0	0	0	
0	1	1	$ЭК_1$
1	0	1	$ЭК_2$
1	1	0	

СДНФ имеет вид: z(a,b)= $\bar{a}b \ \vee a\bar{b}$

Элементарные конъюнкции, входящие в состав СДНФ, называются конституентами единицы. Таким образом, конституента единица – функция, принимающая единичное значение только на одном наборе значений аргументов.

Для преобразования ДНФ в СДНФ необходимо каждую элементарную конъюнкцию с недостающей переменной дополнить конъюнкцией с тождественно истинным выражением $x_i \vee \bar{x_i}$ относительно той переменной, которой недостает [3].

Пример: функция $f(a, b, c) = ab \vee \bar{a}c$ представлена в ДНФ. В первой элементарной конъюнкции отсутствует переменная c, во второй – переменная b. Преобразуем ДНФ в СДНФ следующим образом:

$$f(a, b, c) = ab \vee \bar{a}c = ab(c \vee \bar{c}) \vee \bar{a}c(b \vee \bar{b}) = abc \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{b}c$$

Преобразования форм ПФ, выполняемые по схеме:
ТИ ↔ символическая форма ↔ СДНФ, достаточно простые.

Для преобразования СДНФ в ДНФ необходимо использовать закон склеивания, этот процесс называется минимизацией.

б) Конъюнктивные формы

Выражение вида $\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \ldots \vee \widetilde{x_n}$, содержащее множество попарно различных переменных или их инверсий, называется элементарной дизъюнкцией (ЭД).

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) – это конъюнкция элементарных дизъюнкций, соответствующих запрещенным наборам ПФ, причем, если переменная в наборе равна единице, то она входит в элементарную дизъюнкцию с инверсией.

Если хотя бы одна ЭД не содержит все переменные, от которых зависит ПФ, то такая форма называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Рассмотрим на примере ПФ $z(a,b) = a \oplus b$ получение СКНФ (табл. 4.14).

Таблица 4.14 –Таблица истинности функции $z(a,b) = a \oplus b$

a	b	z=a⊕b	
0	0	0	$ЭД_1$
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	$ЭД_2$

СКНФ будет иметь вид: $z(a,b) = (a \vee b) \cdot (\bar{a} \vee \bar{b})$.

Элементарные дизъюнкции, входящие в состав СКНФ, называются *конституентами нуля.* Таким образом, конституента нуля – это функция, принимающая нулевое значение только на одном наборе значений аргументов.

Для преобразования КНФ в СКНФ необходимо каждую элементарную дизъюнкцию с недостающей переменной дополнить дизъюнкцией с тождественно ложным выражением $x_i \cdot \overline{x_i}$ относительно той переменной, которой недостает, затем применить распределительный закон и произвести необходимые упрощения [13].

Пример:

$$f(a,b,c) = a(\bar{b} \vee c) = (a \vee b\bar{b} \vee c\bar{c})(a\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) =$$

$$= (a \vee b\bar{b} \vee c)(a \vee b\bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) =$$

$$= (a \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee$$

$$\vee c) = (a \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee \bar{c})(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$$ – СКНФ.

Таким образом, преобразования форм ПФ, выполняемые по схеме

ТИ ↔ символическая форма ↔ СКНФ, достаточно простые.

Для преобразования СКНФ в КНФ необходимо использовать методы минимизации в классе КНФ.

4.10. Цель минимизации переключательных функций

При технической реализации переключательных функций возникает задача нахождения наиболее экономичного их представления; поскольку каждая логическая операция выполняется логическим элементом, который имеет габариты и массу, стоимость, потребляет электроэнергию.

Таким образом, упрощение формулы конечной реализации ПФ преследует цели уменьшения числа элементов устройстве, уменьшения связей между элементами, повышение надежности устройства.

В дальнейшем поставим целью упрощения выражения нахождение наиболее простого представления переключательной функции в смысле наименьшего числа входящих в нее символов (букв).

Число символов – суммарное вхождение переменных в выражение.

Процесс получения такого представления – ***минимизация***.

Примеры:

$z_1(a,b,c)=ab \vee \bar{a}c \vee bc$ – 6 символов;

$z_2(a,b,c)=ab \vee \bar{a}c$ – 4 символов.

Очевидно, что уменьшение числа букв приводит к уменьшению числа логических операций. При этом задача минимизации сводится к нахождению такой формы ПФ, которая содержит минимальное число логических операций (не, или, и).

Будем рассматривать минимизацию ПФ в классе ДНФ, не требуя минимизации числа инверсий.

4.11. Основные понятия и определения, используемые при минимизации

Наиболее часто в процессе преобразования формул используются следующие действия:

- вынос за скобки – $y=ab \vee ac = a(b \vee c)$;

- склеивание –$y = x_1x_2 \vee \overline{x_1}x_2 = x_2(x_1 \vee \overline{x_1}) = x_2$ - склеивание по переменной x_1

- поглощение – $y = x_1 \vee x_1x_2 = x_1(1 \vee x_2) = x_1$

При минимизации используются понятия:

- *импликанта (простая импликанта)* – класс ДНФ;

- *имплицента (простая имплицента)* – класс КНФ.

Переключательная функция g(x) называется ***импликантой*** переключательной функции f(x), если множество рабочих (единичных) наборов функции g(x) совпадает или является подмножеством множества рабочих наборов функции f(x).

Переключательная функция p(x) называется ***имплицентой*** переключательной функции f(x), если множество запрещенных (нулевых) наборов функции p(x) совпадает или является подмножеством множества запрещенных наборов функции f(x).

Под понятие «импликанта» попадает как сама функция f(x), так и любая дизъюнкция или ее часть, получившаяся в результате преобразований. На практике чаще всего используют более «узкое» определение импликанты: ***импликантой*** называется конъюнкция, полученная в результате склеивания двух и более конституент единицы [4].

Простой импликантой функции f(x) называется любая элементарная конъюнкция, являющаяся импликантой, но при этом никакая ее собственная часть не является импликантой. Иначе: простая импликанта – та, которая более ни с какой другой конъюнкцией не склеивается [4].

Пусть $f(x_1, x_2, x_2) = x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3$ – импликанта по определению.

Проведем склеивание первой и третьей, второй и третьей конституент единицы:

$f(x_1, x_2, x_2) = x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2(\overline{x_3} \vee x_3) \vee x_1x_3(\overline{x_2} \vee x_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3$

Таким образом, $g_1 = x_1x_2$ и $g_2 = x_1x_3$ – простые импликанты, так как дальнейшее их склеивание невозможно.

В булевой алгебре переключательных функций утверждается и доказывается:

1) любая переключательная функция равносильна дизъюнкции всех своих простых импликант, и такая форма ее представления называется сокращенной ДНФ (СкДНФ);

2) дизъюнкция любого числа импликант переключательной функции также является импликантой этой функции.

Получение СкДНФ – первый этап минимизации.

Второй этап: из СкДНФ удалить одну или несколько простых импликант без нарушения равносильности.

СкДНФ называется *тупиковой (ТДНФ)*, если в ней отсутствуют лишние простые импликанты. Процесс исключения лишних простых импликант из СкДНФ не является однозначным, то есть тупиковых ДНФ может быть несколько [3].

Тупиковые ДНФ, содержащие минимальное число букв, являются *минимальными (МДНФ)***.** Минимальных ДНФ тоже может быть несколько. Поскольку процесс перебора затруднен, то, как правило, находят одну или несколько ТДНФ, из которых выбирают минимальную.

4.12. Метод Квайна

Рассмотрим метод Квайна, названный в честь Уилларда Ван Ормана Квайна (1908-2000), американского логика, философа. Метод основан на совместном применении законов склеивания и поглощения. Суть метода заключается в том, что одна и та же конституента единицы может склеиваться по разным переменным с несколькими другими конституентами еденицы.

Из закона идемпотентности ($x \vee x \vee x \vee \ldots = x$) Квайн сделал вывод, что конституенты единицы, входящие в состав СДНФ, можно размножать, то есть считать, что любая из вошедших в СДНФ конституент единиицы входит в дизъюнкцию многократно. Поэтому ее можно склеивать одновременно с несколькими конституентами единицы и, кроме того, сохранять в составе ДНФ наряду с импликантами, полученными в результате склеивания.

Метод Квайна заключается в выполнении всех возможных операций попарного склеивания и последующего поглощения с целью получения такого набора простых импликант, которые поглощают наибольшее число конституент единицы [13].

Пусть задана функция $f(x_1, x_2, x_3)_8$ = 0,2,4,5,7 [1,3,6]. Преобразуем символическую форму в СДНФ:

$y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

На первом этапе разобьем конституенты единицы на группы по числу неинвертированных переменных:

1) $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$
2) $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$	
$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$
3) $x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$
4) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_3$

В результате склеивания получены простые импликанты, так как дальнейшее склеивание невозможно.

На втором этапе необходимо исключить лишние простые импликанты. Это делается с помощью импликантной матрицы Квайна, которую также называют таблицей покрытий (табл. 4.15) [3]. Она имеет столько столбцов, сколько конституент единицы в исходной СДНФ, и столько строк, сколько простых импликант было получено.

Говорят: импликанта $\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$ покрывает $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$ и $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$, что означает поглощение:

$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$

$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$

Таким образом, получили ТДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot x_3$

Таблица 4.15 - Таблица покрытий

	Простые импликанты	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
A	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$	*	*			
B	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	*		*		
C	$x_1 \cdot \overline{x_2}$			*	*	
D	$x_1 \cdot x_3$				*	*

Простая импликанта $\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$ – лишняя, так как покрывает конституенты, уже покрытые другими простыми импликантами.

Для больших таблиц трудно выявить возможные покрытия, поэтому рассмотрим метод, предложенный в 1956 году американским учёным Стэнли Роем Петриком. Метод позволяет получить все тупиковые ДНФ по импликантной таблице путем ее конъюнктивного представления [4,13].

Для этого обозначим все простые импликанты переменными A, B, C, D. Затем для столбца строится дизъюнкция всех переменных, обозначающих строки таблицы, а затем – конъюнкция столбцов:

K=(A∨B)·A·(B∨C)·(C∨D)·D – получили пять членов конъюнкции по числу столбцов. Воспользуемся законом поглощения: (A∨B)·A = A;·(C∨D)·D = D.

В результате получим:

K=A·(B∨C)·D = (A·B ∨ A·C)·D = A·B·D ∨ A·C·D

Две конъюнкции означают наличие двух тупиковых ДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_3$ – (A·B·D)

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot x_3$ – (A·C·D)

Из двух тупиковых ДНФ можно выбрать любую, но у второй формы меньше количество инвертированных переменных.

4.13. Метод Квайна – Мак-Класки

Метод минимизации Квайна – Мак-Класки представляет собой формализацию метода Квайна. Формализация заключается в записи конституент единицы исходной СДНФ их двоичными номерами [12]. Получается аналогия:

$1 \longrightarrow x_i$

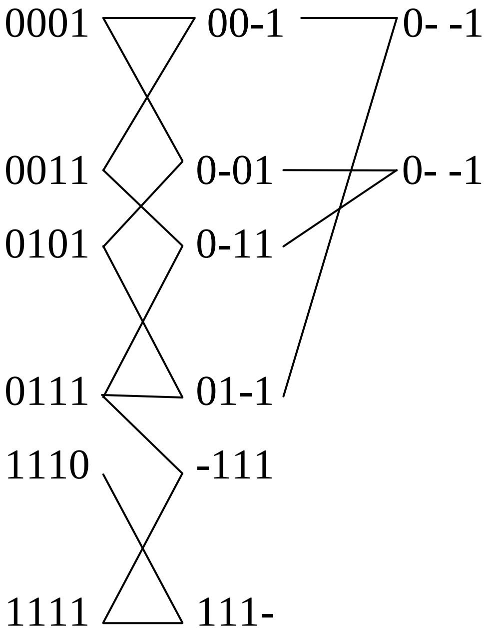
$0 \longrightarrow \overline{x_i}$

Все номера разбиваются на непересекающиеся группы по числу нулей (инверсий) в двоичном номере. Нетрудно заметить, что возможны склеивания только между соседними группами. Ликвидируемый разряд обозначается знаком «–» (тире, прочерк).

Дальнейшие группы из полученных импликант образуются с учетом одинакового расположения тире. Такое обозначение конституент единицы и импликант называется *обобщенными кодами.*

Пример: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)_8$=1,3,5,7,16,17

y=0001 ∨ 0011 ∨ 0101 ∨ 0111 ∨ 1110 ∨ 1111



Таким образом, после склеивания остались: 0- -1, 0- -1, -111, 111-. Дальнейшее склеивание невозможно. Строим импликантную матрицу (табл. 4.16)

Таблица 4.16 – Импликантная матрица

	Простые импликанты	0001	0011	0101	0111	1110	1111
A	0- -1	*	*	*	*		
B	-111				*		*
C	111-					*	*

Здесь также можно применить метод Петрика:

K=AAA(A∨B)C(B∨C)=AAAC=AC

Отсюда: Y=(0- -1) ∨ (111-)

Таким образом, получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Метод Квайна – Мак-Класки не дает ответа на вопрос: как доопределить недоопределенные переключательные функции для получения минимальной формы.

4.14. Задание переключательных функций картой Карно

Карта Карно – это таблица истинности, в которой наборы переменных и значения функции на этих наборах расположены двумерным массивом, причем каждому набору переменных поставлена в соответствие одна клетка. В эту клетку записывается значение функции (0 или 1) на данном наборе [7]. Входные переменные располагаются по внешним сторонам карты напротив её строк и столбцов. На рисунке 4.9 показан пример карт Карно для одной и двух переменных.

Число клеток карты Карно равно числу строк таблицы истинности, т.е. 2^n, где n – число входных переменных. Каждая входная переменная делит карту Карно на две равные части, в одной эта переменная равна 1, в другой – 0. Каждой клетке соответствует один определенный набор переменных (рис. 4.9). С введением каждой новой переменной число клеток удваивается.

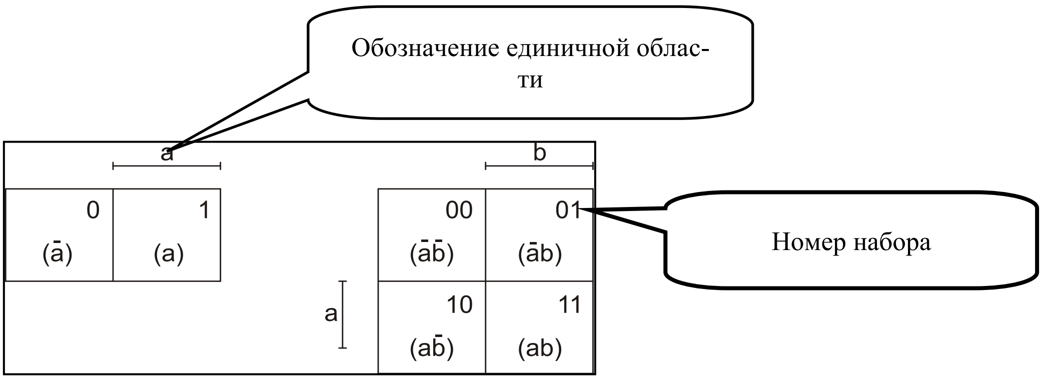


Рисунок 4.9 – Карты Карно для переключательных функций от одной и дух переменных

Зададим таблицей истинности функцию Z(a,b,c,):

Таблица 4.17 – Таблица истинности для функции Z(a,b,c,)

Входной набор			z
a	b	c	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Функция Z – это мажоритарная функция. Представим ее в виде карты Карно (рис. 4.10).

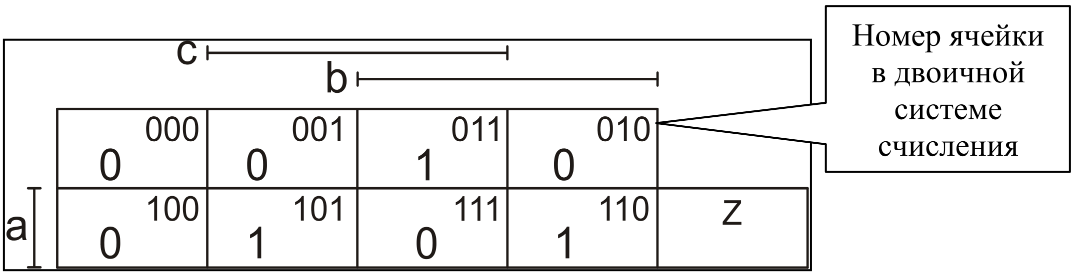


Рисунок 4.10 – Карта Карно для мажоритарной функции

Карту Карно можно представить и в другом виде, не указывая единичные области. Примеры карт Карно для трех и четырех переменных приведены на рисунках 4.11 и 4.12.

a	bc			
	00	01	11	10
0	1 ^{0}	0 ^{1}	0 ^{3}	1 ^{2}
1	0 ^{4}	1 ^{5}	0 ^{7}	0 ^{6}

Рисунок 4.11 – Карта Карно для трех переменных

ab	cd			
	00	01	11	10
00	1^{0}	0^{1}	0^{3}	1^{2}
01	0^{4}	$\sim^{5}$	0^{7}	0^{6}
11	0^{12}	1^{13}	0^{15}	0^{14}
10	0^{8}	0^{9}	0^{11}	0^{10}

Номер ячейки в десятичной системе счисления

Рисунок 4.12 – Карта Карно для четырех переменных

4.15. Минимизация ПФ с помощью карт Карно

Карты Карно обладают следующим свойством: наборы значений переменных для клеток, стоящих рядом (соседние клетки), отличаются значением лишь одной переменной. При переходе от одной клетки в соседнюю всегда изменяется значение лишь одной переменной («1» на «0» или наоборот). Такие наборы, отличающиеся значением лишь одной переменной, называются соседними. Соседними также являются крайние левые – крайние правые, крайние верхние – крайние нижние клетки (рис. 4.13). В теории кодирования «соседними» называются кодовые комбинации, отличающиеся лишь в одном разряде.

0 000	1 001	3 011	2 010
4 100	5 101	7 111	6 110

Рисунок 4.13 – К понятию соседних клеток карты Карно

Из рисунка видно, что соседними клетками являются: нулевая и первая, нулевая и вторая, нулевая и четвертая и т.д.

Минимизация ПФ по карте Карно в классе СДНФ заключается в покрытии ее единиц *минимальным количеством максимальных правильных контуров*. Контуры могут пересекаться, но не могут включать друг друга.

4.16. Типовые контуры карты Карно

Правильными контурами для карт Карно на четыре переменных могут быть:

- одноклеточный – одна клетка с единицей, окруженная нулями (не склеивается);
- двухклеточный – две соседние клетки (склеивание под одной переменной);
- четырехклеточный - четыре соседние клетки (склеивание по двум переменным);
- восьмиклеточный – куб из соседних восьми клеток (склеивание по трем переменным).

Если в клетках карты Карно есть знак «~», то его также можно включить в контур, полагая, что значение функции в этой клетке доопределено до «единицы» на этом наборе (рис. 4.14).

Простая импликанта находится так: в нее входят те переменные, которые во всех клетках контура не меняют своего значения

ab	cd			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	~	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

Рисунок 4.14 – Пример правильных контуров

Рассмотрим пример минимизации переключательной функции вида: f(a,b,c,d) = 0,2,8,11,13 [1,4,7,9,14]. Символическая форма позволяет представить функцию с помощью карты Карно и выделить правильные контуры (рис. 4.15).

ab	cd			
	00	01	11	10
00	0 1	1 0	3 ∼	2 1
01	4 0	5 ∼	7 0	6 ∼
11	12 ∼	13 1	15 ∼	14 0
10	8 1	9 0	11 1	10 ∼

Рисунок 4.15 – Карта Карно для функции
f(a,b,c,d) = 0,2,8,11,13 [1,4,7,9,14]

Отыскиваем простые импликанты сначала по горизонтали, потом по вертикали:

f=(0∨2 ∨ 8 ∨ 10) ∨ (3 ∨2 ∨11 ∨10) ∨ (13 ∨ 15)=

= (- 0 - 0) ∨ (- 0 1 -) ∨ (1 1 - 1) = $\bar{b}\bar{d} \vee \bar{b}c \vee abd$

4.17. Минимизация ПФ на кубе соседних чисел

Рассмотрим метод минимизации ПФ с помощью куба соседних чисел на примере функции ПФ №174_{10}. Таблица истинности для нее представлена в таблице 4.18.

Таблица 4.18 – Таблица истинности ПФ №174_{10}

Переменные			f(a,b,c)
a	b	c	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Представим эту же функцию на кубе соседних чисел (рис. 4.16).

Рабочие вершины куба образуют следующие элементы:

Грань 111 ∨ 011 ∨ 101 ∨ 001 – соответствует обобщенному коду – импликанте (- - 1)

Ребро 010 ∨ 011 соответствует обобщенному коду – импликанте (01–)

ДНФ ПФ имеет вид: (- - 1) ∨ (0 1 -), т.е $f(a,b,c)=c \vee \bar{a}b$

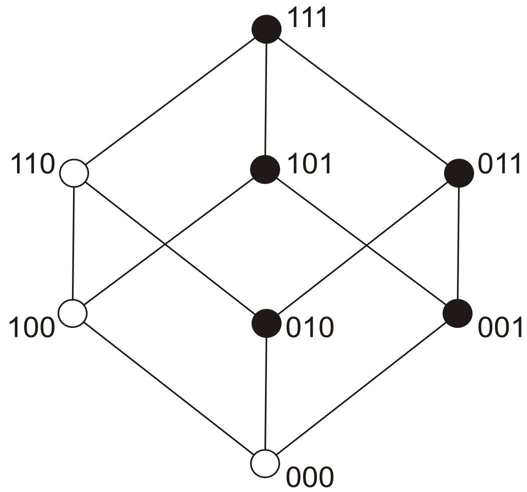


Рисунок 4.16 – Куб соседних чисел для функции №174_{10}

4.18. Минимизация ПФ методом Л.Ф. Викентьева

Существует множество формализованных методов минимизации. Выбор метода определяется количеством аргументов ПФ, степенью ее определенности. Очевидно, что все изученные нами методы сложны и трудоемки при большом (5-6 и более) числе аргументов. А такие методы как карта Карно и куб соседних чисел – вообще трудно представимы.

Поскольку минимизация переключательных функций от большого числа переменных затруднена, то по методу пермского ученого Леонида Федоровича Викентьева такая минимизация сводится к минимизации переключательной функции не более, чем от трех аргументов. А минимизация ПФ от трех аргументов может быть выполнена на кубе соседних чисел [4,5].

Рассмотрим суть метода Л.Ф. Викентьева. Исходная функция задается в символической форме в восьмеричной системе счисления. Для каждого разряда восьмеричного рабочего набора определяются запрещенные цифры, которые в совокупности с другими восьмеричными разрядами приведут к получению запрещенных наборов функции. Эти наборы исключаются, а оставшиеся (рабочие) минимизируются, возможно, по кубу соседних чисел.

Так минимизируются все разряды. По полученным обобщенным кодам для каждого восьмеричного разряда определяют ДНФ для всего рабочего набора. По полученному покрытию определяют, какие еще рабочие наборы покрываются полученной импликантой. Эти наборы исключаются (вычеркиваются). Оставшиеся наборы вновь подвергают минимизации по тому же алгоритму.

Метод эффективен для недоопределенных функций.

Рассмотрим *пример.* Задана функция $f(x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)_8 = 03, 41\ [00, 36]$.

Всего для функции от шести переменных существует 2^6=64 набора переменных. Для нашей функции два набора – рабочие, два – запрещенные, остальные – условные, то есть функция существенно недоопределена. Каждый рабочий набор – это конституента единицы в СДНФ. Восьмеричная система легко позволяет переходить к СДНФ:

$f(x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = 000011 \vee 100001 =$

$= \overline{x_6} \cdot \overline{x_5} \cdot \overline{x_4} \cdot \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_1 \vee x_6 \cdot \overline{x_5} \cdot \overline{x_4} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot x_1$.

Выполним анализ рабочих наборов. Для наглядности следует изобразить куб соседних чисел (рис. 4.17).

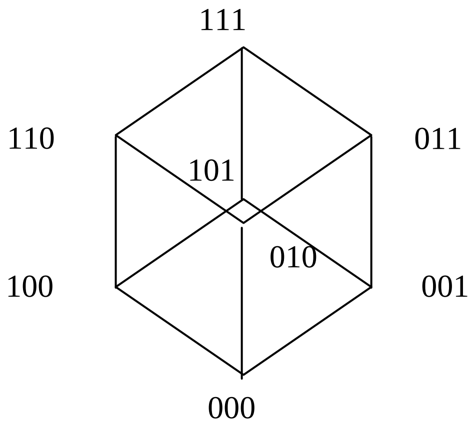


Рисунок 4.17 – Куб соседних чисел

Определим запрещенные цифры для старшего разряда числа 03, то есть для нуля. Будем подставлять вместо первого разряда возможные числа, а их всего 7, так как используем восьмеричную систему счисления. Получаем: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73. Видим, что ни одно из полученных чисел не совпадает с запрещенными наборами 00 и 36. Таким образом, в нашем случае запрещенных цифр для старшего разряда числа 03 нет. Запишем это так:

$$03 \longrightarrow \frac{0}{-}3$$

Означает, что запрещенных разрядов нет

Следовательно, в старшем разряде номер набора может быть доопределен до полного восьмеричного куба: $(0 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 7)$.

Теперь нужно аналогичным образом минимизировать младший разряд рабочего числа. Определим возможные наборы, которые могут получиться путем соединения покрытия $(0 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 7)$ и второго разряда, который может принимать значения 0,1,2,3,4,5,6,7. Очевидно, что в этом случае мы получим запрещенные наборы 00, 36. Запишем это так:

$(0 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 7)\frac{3}{0,6} \longrightarrow$

$\longrightarrow (0 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 7)(1 \vee 3 \vee 5 \vee 7) \longrightarrow$

$\longrightarrow$ (- - -)(- - 1)=x_1

Эта же импликанта покрывает и второй рабочий набор 41_8. Следовательно, $f(x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = x_1$

Примеры решения задач на применение законов алгебры переключательных функций и методов минимизации

Задача 1

Определить свойства переключательной функции, задана номером в десятичной системе счисления:

f(x_1,x_2, x_3)=186_{10}.

Решение

Прежде всего, переведем номер функции в двоичную систему счисления и получим: f(x_1, x_2, x_3)=10111010_2.

Далее построим таблицу истинности (табл. 4.19)

Таблица 4.19 - Таблица истинности для функции № 186_{10}

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1.Функция сохраняет const «0», так как f(o,o,o)=0.

2.Функция сохраняет const «1», так как f(1,1,1)=1.

3.Функция несамодвойственна, так как не выполняется условие: f(a,b,c)=$\bar{f}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Симметричные разряды 3 и 4 не противоположны, значит функция несамодвойственная (табл. 4.20).

Таблица 4.20 – Проверка самодвойственности функции

7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0

4.Определим, обладает ли функция свойством линейности (табл.4.21).

Таблица 4.21 – Определение свойств линейности

c_0	c_1	c_2	c_3	Вид полинома	Функция
0	0	0	0	0	Const “0”
0	0	0	1	x_3	Тавтология x_3
0	0	1	0	x_2	Тавтология x_2
0	0	1	1	$x_2 \oplus x_3$	$x_2 \oplus x_3$
0	1	0	0	x_1	Тавтология x_1
0	1	0	1	$x_1 \oplus x_3$	$x_1 \oplus x_3$
0	1	1	0	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	1	1	1	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
1	0	0	0	1	const “1”
1	0	0	1	$1 \oplus x_3$	Инверсия x_3
1	0	1	0	$1 \oplus x_2$	Инверсия x_2
1	0	1	1	$1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$\overline{x_2 \oplus x_3}$
1	1	0	0	$1 \oplus x_1$	Инверсия x_1
1	1	0	1	$1 \oplus x_1 \oplus x_3$	$\overline{x_1 \oplus x_3}$
1	1	1	0	$1 \oplus x_1 \oplus x_2$	$\overline{x_1 \oplus x_2}$
1	1	1	1	$1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}$

Для этого она должна быть представлена линейным полиномом вида:

$$f = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus c_3 x_3, \text{ где } c_i \in \{0,1\}.$$

Получили все линейные функции от 3-х аргументов. Если наша функция – одна из них, то можно сделать вывод о линейности, иначе – нет. Для некоторых функций такое сравнение не осуществить, не получив их векторы (табл. 4.22).

Таблица 4.22 – Линейные функции трех переменных

x_1	x_2	x_3	f$_3$	f$_5$	f$_6$	f$_7$	f$_{11}$	f$_{13}$	f$_{14}$	f$_{15}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
			$x_2 \oplus x_3$	$x_1 \oplus x_3$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$\overline{x_2 \oplus x_3}$	$\overline{x_1 \oplus x_3}$	$\overline{x_1 \oplus x_2}$	$\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}$

Функция нелинейна, т.к. ее вектор не совпадает с вектором ни одной из линейных функций от трех аргументов.

1. Определение монотонности

Построим решетку Хассэ (куб соседних чисел) и зададим на ней нашу переключательную функцию (рис. 4.18).

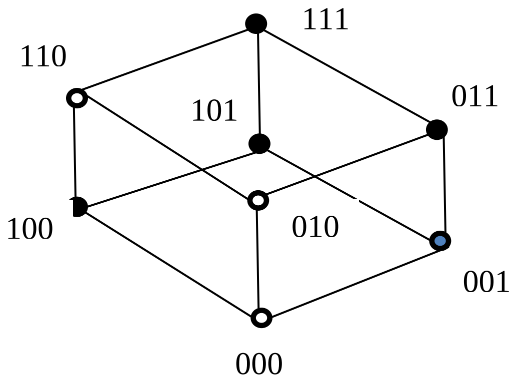


Рисунок 4.18 – Решетка Хассэ f(x_1,x_2, x_3)=186_{10}

Проверим все возможные пути из начальной вершины в конечную (табл. 4.23).

Таблица 4.23 - Маршруты решетки Хассэ

0		1		0		1
000	<	100	<	110	<	111
0		1		1		1
000	<	100	<	101	<	111
0		0		1		1
000	<	010	<	011	<	111
0		0		0		1
000	<	010	<	110	<	111
0		1		1		1
000	<	001	<	011	<	111
0		1		1		1
000	<	001	<	101	<	111

По одному из путей: 000 – 100 – 110 – 111 на большем наборе функция принимает меньшее значение, следовательно функция немонотонна.

Составим вектор свойств функции (таб. 4.24).

Таблица 4.24 – Вектор свойств функции

Номер свойства	1	2	3	4	5
Наличие свойства	1	1	0	0	0

Задача 2

Переключательная функций $z=a(b\vee c)\vee bc$ представлена в смешанной форме. Необходимо:

а) получить дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ);

б) получить совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ);

в) получить конъюнктивную нормальную форму (КНФ);

г) получить совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ);

д) построить таблицу истинности (ТИ);

е) получить символическую форму представления переключательной функции.

Решение

а) Применим дистрибутивный закон и получим ДНФ:

$z=a(b\vee c)\vee bc = ab \vee ac \vee bc$

б) Для получения СДНФ каждую элементарную конъюнкцию дополним конъюнкцией с тождественно истинным выражением вида $x_i \vee \overline{x_i}$ и применим сначала дистрибутивный закон, а затем закон идемпотентности:

$z = ab \vee ac \vee bc= ab(c\vee\bar{c}) \vee ac(b\vee\bar{b}) \vee bc\ (a\vee\bar{a}) =$

$= abc \vee ab\bar{c} \vee abc \vee a\bar{b}c \vee abc \vee \bar{a}bc = abc \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c}$

в) Для получения из ДНФ КНФ воспользуемся сначала дистрибутивным законом, затем законом поглощения, снова дистрибутивным законом и, наконец, законом идемпотентности:

$z=ab\vee ac\vee bc=(ab\vee ac\vee b)(ab\vee ac\vee c)=(ac\vee b)(ab\vee c)=$

$=(a\vee b)(b\vee c)(a\vee c)(b\vee c)= (a\vee b)(b\vee c)(a\vee c)$

г) Для получения СКНФ добавим в каждую скобку недостающую переменную, используя закон противоречия $x\bar{x}$=0. Затем применим дистрибутивный закон и закон идемпотентности:

$z=(a\vee b)(b\vee c)(a\vee c)= (a\vee b\vee c\bar{c})(a\bar{a}\vee b\vee c)(a\vee b\bar{b}\vee c)=$

$=(a\vee b\vee c)\ (a\vee b\vee \bar{c})\ (a\vee b\vee c)\ (\bar{a}\vee b\vee c)\ (a\vee b\vee c)\ (a\vee \bar{b}\vee c)=$

$=(a\vee b\vee c)\ (a\vee b\vee \bar{c})(\bar{a}\vee b\vee c)(a\vee \bar{b}\vee c)$

д) Построим ТИ (табл. 4.25).

Таблица 4.25 – Таблица истинности для функции z=a(b∨c)∨bc

a	b	c	b∨c	a(b∨c)	bc	a(b∨c)∨bc
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Проверим по ТИ корректность получения СКНФ. Для этого выделим сначала все наборы, где z=0; если переменная в наборе =1, то она входит в элементарную дизъюнкцию с инверсией:

$z=(a \vee b \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{a} \vee b \vee c)$

Далее проверим по ТИ корректность построения СДНФ. Для этого выделим сначала все наборы, где z=1; если переменная в наборе =0, то она входит в элементарную конъюнкцию с инверсией: $z= abc \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c}$

е) По ТИ получим символическую форму представления переключательной функции. Для этого сначала перечислим номера рабочих наборов, где z=1, затем в скобках – нерабочих, где z=0. Получим: z(a,b,c) = 3,5,6,7 [0,1,2,4].

Задача 3

Переключательная функция представлена в символической форме:

$f(a,b,c,d)_8$ = 3,4,5,7,11,13,14,15 [0,1,2,6,10,12,16,17].

Необходимо минимизировать функцию методом Квайна-Мак-Класки.

Решение

Используя символическую форму, получим обобщенные коды:

f=0011 ∨ 0100 ∨ 0101 ∨ 0111 ∨ 1001 ∨ 1011 ∨ 1100 ∨ 1101

Далее сгруппируем коды по возрастанию количества единиц и, используя закон склеивания, отыщем все простые импликанты.

Таким образом, получили 6 простых импликант (СкДНФ). Построим импликантную матрицу Квайна (таблицу покрытий) (табл. 4.26).

Для определения возможных покрытий используем метод Петрика.

$K=(B\vee C)A\cancel{(A\vee D)}(B\vee D)(E\vee F)(C\vee E)\cancel{A}(A\vee F)=$

$=A(B\vee C)(B\vee D)(E\vee F)(C\vee E)=$

$=A(B\vee CD)(E\vee FC)=ABE\vee ACDE\vee ABFC\vee ADCF$

$ТДНФ_1\quad ДНФ_2\quad ТДНФ_3\quad ТДНФ_4$

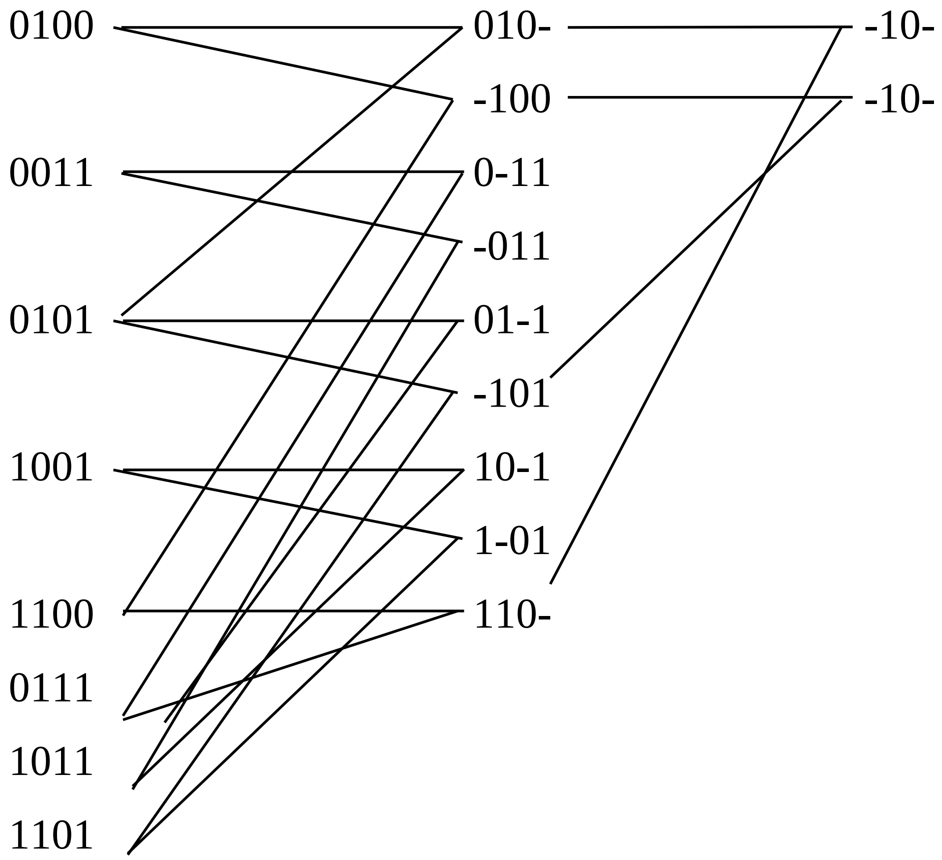


Таблица 4.26– Импликантная матрица

Простые импликанты	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
-10- A		+	+				+	+
0-11 B	+			+				
-011 C	+					+		
01-1 D			+	+				
10-1 E					+	+		
1-01 F					+			+

Получили 4 покрытия, минимальным из которых будет ТДНФ$_1$: f(a,b,c,d) = $b\bar{c} \vee \bar{a}cd \vee a\bar{b}d$

Задача 4

Переключательная функция от четырех аргументов задана в символическом виде:

$f(a,b,c,d)_{10}$ =0,2,8,11,13[1,4,7,9,14].

Минимизировать функцию по карте Карно.

Решение

Представим функцию в виде карты Карно (табл. 4.27). Выделим в карте Карно минимальное количество максимально правильных контуров, для этого доопределим функцию за счет условных наборов.

Таблица 4.27 – Карта Карно

ab	cd			
	00	01	11	10
00	1 [0]	0 [1]	~ [3]	1 [2]
01	0 [4]	~ [5]	0 [7]	~ [6]
11	~ [12]	1 [13]	~ [15]	0 [14]
10	1 [8]	0 [9]	1 [11]	~ [10]

$f = (0 \vee 8 \vee 2 \vee 10) \vee (3 \vee 2 \vee 10 \vee 11) \vee (12 \vee 13) = (-0-0) \vee (-01-) \vee (110-) = \bar{b}\bar{d} \vee \bar{b}c \vee ab\bar{c}$

Задача 5

Минимизировать переключательную функцию вида $f(a,b,c)_8$ = 0,1,2,4[3,5,6,7], используя куб соседних чисел.

Решение

Построим куб соседних чисел, каждая вершина которого соответствует одному из восьми наборов переменных. Отметим вершины, соответствующие рабочим наборам функции 0,1,2,4 (рис. 4.19). Рабочие вершины куба образуют следующие элементы:

1. Ребро 000∨100 – соответствует обобщенному коду – импликанте (-00).
2. Ребро 000∨010 – соответствует обобщенному коду – импликанте (0-0).
3. Ребро 000∨001- соответствует обобщенному коду – импликанте (00-).

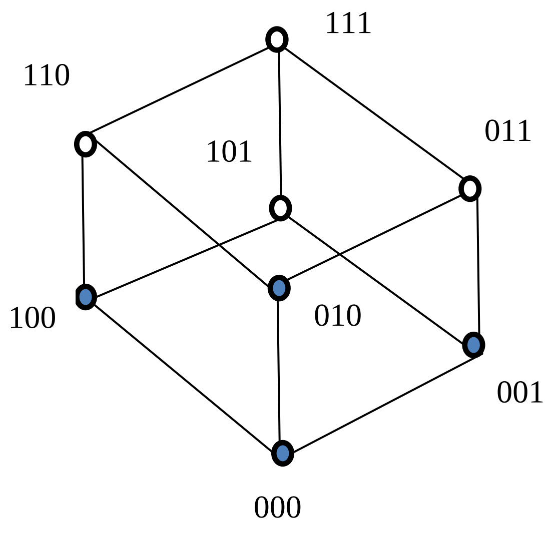


Рисунок 4.19 – Куб соседних чисел

В итоге ДНФ переключательной функции имеет вид: (-00) ∨ (0-0) ∨ (00-), то есть $f(a,b,c) = \bar{b}\bar{c} \vee \bar{a}\bar{c} \vee \bar{a}\bar{b}$.

Задача 6

Минимизировать переключательную функцию вида $f(x_6 - x_1) = 07,14,15,16,17[00,01,02,05]$, используя метод Л.Ф. Викентьева.

Решение

Видно, что функция определена частично.

Определим запрещенные наборы для старшего разряда числа 07. Очевидно, что они отсутствуют. Перейдем к минимизации младшего разряда, в результате чего получим:

$$07 \longrightarrow (0\vee1\vee2\vee3\vee4\vee5\vee6\vee7)\frac{7}{0,1,2,5} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (0\vee1\vee2\vee3\vee4\vee5\vee6\vee7)(\,3\vee7) \longrightarrow (---)(-11)$$

Не трудно заметить, что полученная импликанта покрывает набор 17.

Аналогично проанализируем следующие рабочие наборы и получим:

$$14 \longrightarrow (0\vee1\vee2\vee3\vee4\vee5\vee6\vee7)\frac{4}{0,1,2,5} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (0\vee1\vee2\vee3\vee4\vee5\vee6\vee7)(\,4\vee6) \longrightarrow (---)(1-0).$$

Полученная импликанта покрывает набор 16.

Проанализируем последний рабочий набор 15:

$$15 \longrightarrow \frac{1}{0}5 \longrightarrow (1\vee3\vee5\vee7)\frac{5}{-} \longrightarrow (--1)(---).$$

Полученная импликанта покрывает все наборы, кроме 07.

Таким образом, $f(x_6 - x_1) = x_2x_1 \vee x_4$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1

Определить свойства ПФ, заданной номером № 174_{10}; № 165_{10}.

Задача 2

Переключательная функция от трех аргументов задана номером № 165_{10}. Необходимо:

1. Получить номер ПФ в двоичном, восьмеричном кодах.

2. Построить таблицу истинности.

3. Определить по таблице СДНФ, СКНФ, символическую форму функции с восьмеричной нумерацией наборов.

Задача 3

Переключательная функция от трех аргументов задана номером № 67_8. Необходимо:

1. Получить номер ПФ в двоичном, десятичном кодах.

2. Построить таблицу истинности.

3. Определить по таблице СДНФ, СКНФ, символическую форму функции с восьмеричной нумерацией наборов.

Задача 4

Переключательная функция от трех аргументов задана номером № 10100101_2. Необходимо:

1.Получить номер ПФ в восьмеричном, десятичном кодах.

2. Построить таблицу истинности.

3.Определить по таблице СДНФ, СКНФ, символическую форму функции с восьмеричной нумерацией наборов.

Задача 5

Переключательная функция представлена в КНФ: $f(a,b,c) = \bar{a}(\bar{b} \vee c)$. Требуется получить СКНФ, СДНФ и символическую форму представления переключательной функции. Обойтись без таблицы истинности.

Задача 6

Переключательная функция представлена в смешанной форме: $f(a,b,c) = a \rightarrow (b \oplus c)$. Требуется привести функцию к булеву базису, получить СДНФ, СКНФ и символическую форму представления функции.

Задача 7

Переключательная функция представлена в смешанной форме: $f(a,b,c) = a(b \vee c) \vee \bar{b}\bar{c}$. Требуется получить СКНФ, СДНФ и символическую форму представления переключательной функции. Обойтись без таблицы истинности.

Задача 8

Переключательная функция представлена в ДНФ: $f(a,b,c) = ab \vee ac \vee bc$. Требуется получить СКНФ, СДНФ и символическую форму представления переключательной функции. Обойтись без таблицы истинности.

Задача 9

Переключательная функция представлена в смешанной форме:

$$f(a,b,c,d) = b[\bar{a}c \vee bd \vee c(a \vee \bar{b})(\bar{c}d \vee ca \vee ac)].$$

Требуется получить СКНФ, СДНФ и символическую форму представления переключательной функции. Обойтись без таблицы истинности.

Задача 10

Доказать равенство:

$$\left(a \vee \bar{b}\right)c \vee (\bar{a} \vee b)c\left(a \vee \bar{b}\right) = (a \vee \bar{b})c$$

Задача 11

Минимизировать методом Квайна-Мак-Класки следующую переключательную функцию:

$f(a,b,c,d)_8 = 0,1,2,5,6,7,10,11,14,15$

Задача 12

Минимизировать с помощью карт Карно следующие переключательные функции:

а) ПФ № 55_{10}

б) ПФ № 245_8

в) ПФ № 10100101_2

г) $f(a,b,c,d)_{10} = 2,3,4,5,6,7,12,14,15$ [0,1,8,9,13]

д) $f(a,b,c,d)_{10} = 4,5,6,10,12$[0,1,7,8,9,14]

е) $f(a,b,c,d)_{10} = 3,4,5,6,11,15$ [1,8,9,10,13,14] ж) $f(a,b,c,d)_{10}$ = 1,3,4,5,6,15[0,2,8,10,12,14]

Задача 13

Минимизировать следующие переключательные функции, используя карту Карно и куб соседних чисел. Сравнить результаты минимизации.

а) $f(a,b,c)$ =1,2,3,4[0,5,6,7];

б) $f(a,b,c)$ =0,2,4,6,7[1,3,5];

в) $f(a,b,c)$ =1,4,5,6[0,2,3].

Задача 14

Минимизировать следующие переключательные функции, используя метод Л.Ф. Викентьева:

а) $f(x_6\text{-}x_1)$= 21,25,33,37,54,56[20,22,24,26,30,32,34,36];

б) $f(x_9\text{-}x_1)$= 701,601,700[000,770,077,777].

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать понятие переключательной функции.
2. Перечислить способы задания переключательных функций.
3. Как формулируется и записывается закон поглощения для переключательной функции?
4. Как записывается закон дистрибутивности для переключательной функции?
5. Сформулировать теорему Поста-Яблонского.
6. Привести примеры базисов представления переключательных функций.
7. Как преобразовать ДНФ в СДНФ?
8. Как преобразовать КНФ в СКНФ?
9. Сформулировать цель минимизации переключательных функций.
10. Сформулировать основные понятия, используемые при минимизации переключательных функций.
11. Что такое тупиковая ДНФ?
12. В чем заключается суть метода Квайна?
13. В чем заключается основное свойство карты Карно?
14. В чем состоит сущность минимизации ПФ в классе ДНФ по карте Карно?
15. В чем заключается сущность минимизации ПФ в классе ДНФ с использованием куба соседних чисел?
16. В чем состоится сущность минимизации ПФ методом Л.Ф. Викентьева?

Глава 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

5.1. Основные определения теории автоматов

Конечным автоматом (КА) называется система вида:

$$S=<X,Y,Z,\varphi,\psi>,$$

где $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_i\}$ – конечное входное множество (входной алфавит);

$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_j\}$ – конечное множество внутренних состояний автомата (алфавит состояний);

$Z=\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ – конечное выходное множество (выходной алфавит);

φ – функция переходов из состояния в другие состояния;

ψ – функция выходов [5].

Функция переходов имеет вид:

$$y(t+1)=\varphi[x(t),y(t)],$$

где t – текущий такт, t+1 – последующий такт.

Функция переходов определяет последующее состояние автомата по заданному текущему состоянию и входной переменной (входному символу).

Функция выходов имеет вид:

$z(t)=\psi[x(t),y(t)]$ – для автомата Мили (Джордж Х. Мили (31 декабря 1927 — 21 июня 2010), американский математик и учёный-компьютерщик);

$z(t)=\psi[y(t)]$ – для автомата Мура (Эдвард Форест Мур, 23 ноября 1925 — 14 июня 2003), американский профессор математики и информатики.

Рассмотрим два класса автоматов.

Автомат называется *комбинационным* (автоматом без памяти), если для любого входного символа и любых состояний y_i, y_j справедливо $\varphi(x,y_i)=\varphi(x,y_j)$, то есть выходной символ z не зависит от состояния и определяется текущим входным символом (частный случай конечного автомата). Выходной символ зависит от комбинации входных символов. Такой автомат задается тройкой [5]:

$$S=<X,Z,\psi>.$$

Говорят, что у такого автомата все состояния эквивалентны и, следовательно, комбинационный автомат имеет одно состояние.

Конечные автоматы, имеющие более одного внутреннего состояния, называются *последовательностными автоматами (автоматами с памятью)*[5].

5.2. Описание конечных автоматов графами и таблицами переходов-выходов

Поскольку функции переходов и выходов φ и ψ определены на конечных множествах, их можно задавать таблицами. Обычно две таблицы сводят в одну ($\varphi\times\psi$) и называют таблицей переходов-выходов (ТПВ) или просто таблицей переходов (ТП) или автоматной таблицей.

При задании автомата ориентированным графом (орграфом) его вершины сопоставляют с внутренними состояниями, а дуги – с переходами и условиями перехода из состояния в состояние. Рассмотрим граф переходов некоторого автомата Мили (рис. 5.1):

$X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$.

Дуги помечают дробью, в числителе которой входной сигнал, в знаменателе – выходной.

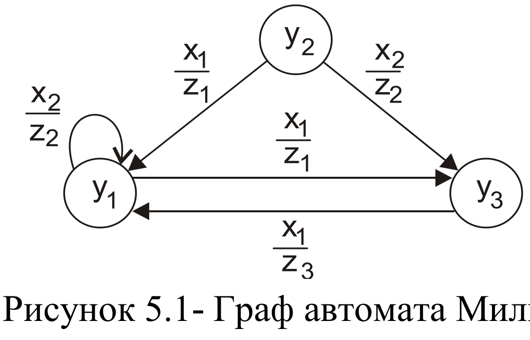


Рисунок 5.1- Граф автомата Мили

Представим этот же автомат Мили с помощью таблицы переходов выходов (табл. 5.1).

Таблица 5.1 – Таблица переходов выходов автомата Мили

Внутреннее состояние $y(t)$	Входной символ		
	x_1	x_2	
y_1	$\frac{y_3}{z_1}$	$\frac{y_1}{z_2}$	
y_2	$\frac{y_1}{z_1}$	$\frac{y_3}{z_2}$	
y_3	$\frac{y_1}{z_3}$	-	$\frac{y(t+1)}{z(t)}$

В клетках таблицы записывается дробь, в числителе которой указывается последующее внутреннее состояние $y(t+1)$, а в знаменателе – выходной символ $z(t)$. Это указано в специальной выноске таблицы ($\frac{y(t+1)}{z(t)}$). Видно, что автомат не полностью определен (клетка y_3x_2 не заполнена).

5.3. Техническая интерпретация конечных автоматов

Конечный автомат представляет собой модель дискретного (цифрового) вычислительного или управляющего устройства – дискретного автомата (ДА).

Под входным символом абстрактного описания автомата понимается комбинация (набор) сигналов на входах x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Эта комбинация сигналов на дискретных входах еще называется входным вектором (набором) $\vec{X}(t)$.

Под выходным символом понимается комбинация (набор) выходных сигналов $z_1, z_2, \ldots, z_m$ (выходной вектор $\vec{Z}(t)$).

Состояние автомата – комбинация состояний элементов памяти $y_1, y_2, \ldots, y_s$ в моменты времени t, $t+1$. Им соответствуют векторы $\vec{Y}(\mathrm{t})$ – текущее состояние, $\vec{Y}(t+1)$– последующее состояние.

Комбинационный автомат – это некоторая переключательная схема или логический преобразователь (рис. 5.2).

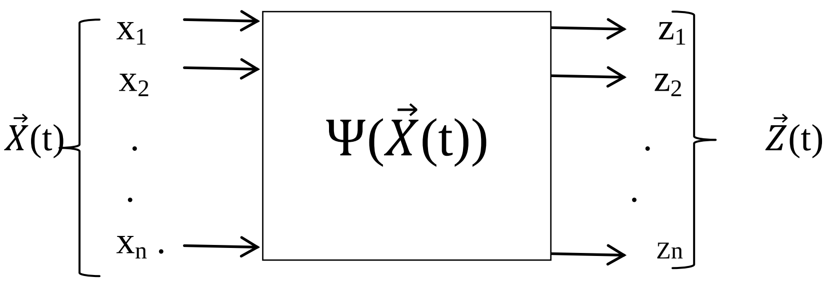


Рисунок 5.2 – Схема автомата

Последовательностный автомат может быть реализован как совокупность комбинационного автомата и задержек на один такт.

Реальные дискретные автоматы функционируют по тактам. *Такт* – отрезок времени произвольной длины, в течение которого состояние автомата остается неизменным. Такты обозначаются как t_0, t_1, …, t, t+1.

Такт называется *устойчивым*, если очередное изменение состояния автомата происходит только за счет изменения состояния входов, то есть после поступления очередного входного набора.

Такт называется *неустойчивым*, если очередное изменение состояния происходит только за счет изменения внутренних состояний элементов памяти. Наличие неустойчивых тактов объясняется переходными процессами в реальных автоматах.

Такты называются *эквивалентными*, если у них одинаковые входные и выходные сигналы.

Дискретные автоматы делятся на *синхронные*, у которых все такты равны, и *асинхронные*, у которых переходы осуществляются в произвольные моменты времени [5].

5.4. Методика синтеза комбинационных автоматов в заданном базисе

Комбинационный автомат – это переключательная схема (ПС) или логический преобразователь (ЛП).

Логический преобразователь – это узел ЭВМ, предназначенный для реализации одной или нескольких переключательных функций. Логические преобразователи относятся к классу дискретных автоматов без памяти.

Исходными данными для синтеза логического преобразователя являются:

- переключательная функция (функции), реализуемая логическим преобразователем;
- набор логических элементов (базис).

Переключательная функция, реализуемая логическим преобразователем, может быть задана как таблицей истинности, так и аналитическим выражением. Известно, что любая, сколь угодно сложная, логическая функция может быть представлена как суперпозиция элементарных функций, образующих функционально полную систему логических функций (ФПС). Таким образом, задача синтеза логического преобразователя может быть решена, если в качестве базиса заданы логические элементы, реализующие функции функционально полной системы (элементарные автоматы без памяти).

Логические элементы, реализующие функции ФПС, образуют функционально полный набор элементов (ФПН) .

Функционально полный набор элементов, реализующий функции основной функционально полной системы, носит название основного (ОФПН)

ОФПН включает в себя элементы:

–элемент И;

–элемент ИЛИ;

–элемент НЕ – инвертор.

С помощью такого набора логических элементов может быть построен логический преобразователь, реализующий любую, сколь угодно сложную, логическую функцию от конечного числа аргументов.

Существуют другие функционально полные наборы элементов. Например, функциональной полнотой обладают наборы, состоящие всего из одного элемента. Такими являются элементы И-НЕ, ИЛИ-НЕ, каждый из которых представляет ФПН элементов.

Предпочтительнее использовать в качестве базиса элементы И, ИЛИ, НЕ, так как именно эти логические операции связывают аргументы в СДНФ функции и с ними проще выполнить преобразования аналитического выражения функции, однако на практике чаще используют элементы И-НЕ. Элемент И-НЕ является основным элементом большинства современных серий интегральных микросхем.

Для построения функциональной схемы логического преобразователя (синтеза ЛП) необходимо выполнить ряд этапов:

• перейти от табличного задания к аналитическому выражению, используя СДНФ, если переключательная функция задана таблицей истинности (соответствия);

• упростить выражение переключательной функции (осуществить минимизацию), используя основные соотношения и законы алгебры логики;

• построить функциональную схему ЛП, если в качестве базиса задан ОФПН – элементы И, ИЛИ, НЕ.

Пример. Пусть переключательная функция, реализуемая ЛП, задана таблицей истинности (табл.5.2) и в качестве базиса задан ОФПН.

Таблица 5.2 – Таблица истинности для функции Y(x_1, x_2, x_3)

x_1	x_2	x_3	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Перейдем от таблицы истинности к аналитическому выражению переключательной функции. Выделим наборы аргументов, на которых функция принимает единичное значение, и запишем СДНФ функции:

$$Y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$$

Используя соотношения и законы алгебры логики, осуществим минимизацию выражения функции:

$$Y = \overline{x_1}(\overline{x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3}) \vee x_1x_2(\overline{x_3} \vee x_3) = \overline{x_1}(\overline{x_2}x_3 \vee$$
$x2x3 \vee x1x2$

Построим функциональную схему логического преобразователя, используя в качестве базиса элементы ОФПН – И, ИЛИ, НЕ (рис.5.3).

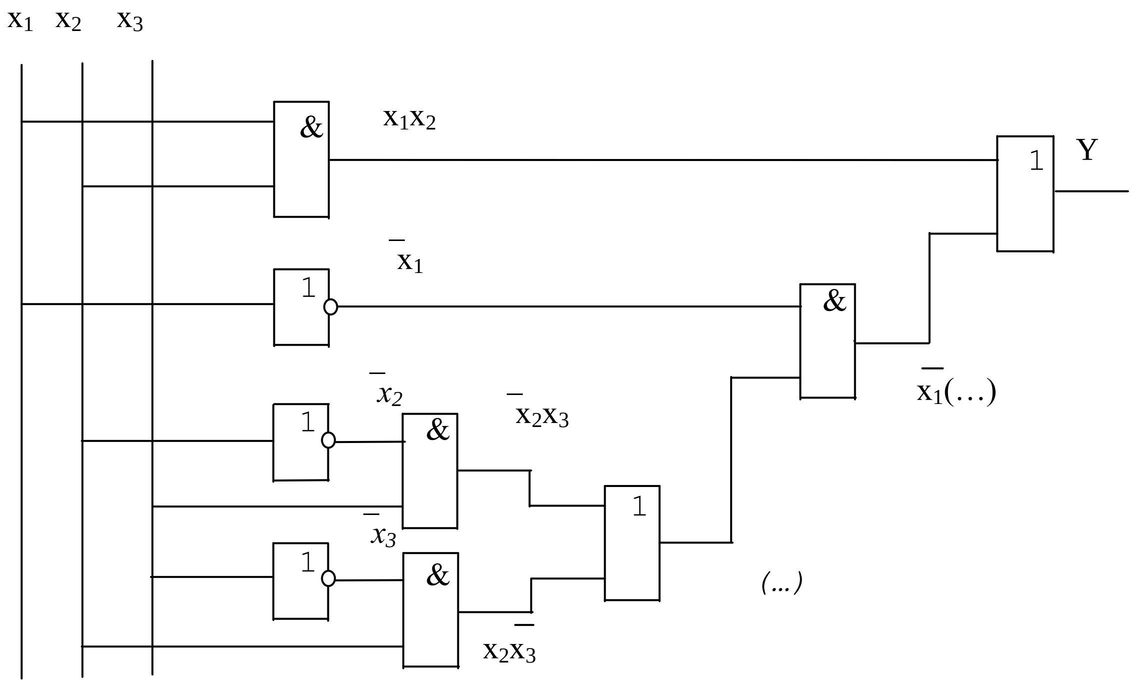


Рисунок 5.3 – Функциональная схема логического преобразователя

Таким образом, задача синтеза логического преобразователя в базисе И, ИЛИ, НЕ решена. Выбрав в качестве элементной базы некоторую серию интегральных микросхем, можно перейти к принципиальной схеме.

Если в качестве базиса задан другой функционально полный набор элементов, то для синтеза логического преобразователя существуют два способа:

а) *аналитический* – выражение логической функции преобразуется с помощью законов алгебры логики к виду, удобному для построения в заданном базисе;

б) *графоаналитический* – элементы основного набора (И, ИЛИ, НЕ) на функциональной схеме логического преобразователя замещаются комбинациями из элементов заданного набора, реализующими функциии И, ИЛИ, НЕ (рис.5.4), после чего производится упрощение схемы (сокращение двух последовательно стоящих инверторов).

Действительно, для использования элемента 2И-НЕ в роли инвертора достаточно подать одну и ту же логическую переменную x на оба входа, чтобы на выходе получить $Y = \overline{x}$.

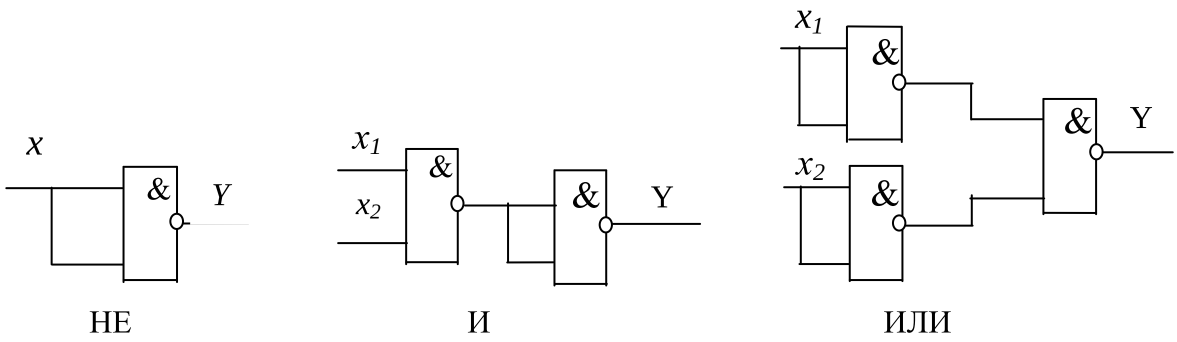


Рисунок 5.4 – Комбинации из элементов 2И-НЕ, замещающие элементы основного набора

Для построения комбинации, реализующей операцию И, нужно «нейтрализовать» инверсию на выходе элемента 2И-НЕ использованием еще одного элемента в роли инвертора:

$$Y = \overline{\overline{x_1 x_2}} = x_1 x_2$$

Для построения комбинации, реализующей операцию ИЛИ, необходимо использовать следствие, вытекающее из закона Де Моргана:

$$Y = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}$$

Рассмотренные выше способы и методика синтеза логических преобразователей применимы для решения задачи синтеза любых комбинационных узлов.

5.5. Абстрактный синтез автомата при недерминированной входной последовательности

Различают следующие этапы синтеза автоматов:

1.Абстрактный синтез – от высокоуровневого описания автомата до математической модели (таблица истинности, таблица переходов – выходов и далее к переключательным функциям).

2.Структурный синтез – минимизация переключательных функций, переход к заданному базису, построение функциональной электрической схемы (ФЭС).

3.Физический синтез – переход к принципиальной электрической схеме (ПЭС) и изготовление дискретного автомата.

Первый и второй этапы являются логическим проектированием автомата.

Абстрактный синтез автомата выполняется в следующей последовательности:

1) получение таблицы тактов;

2) получение первичной таблицы переходов (ПТП);

3) минимизация первичной таблицы переходов (МТП);

4) кодирование состояний (РТП);

5) получение ТПВ;

6) получение СДНФ функции выхода и функций возбуждения элементов памяти.

Недетерминированная последовательность – заранее необусловленная, случайная. Она может быть рассмотрена на примере набора кодов кодового замка, где коды бывают правильными и неправильными. Набор правильного кода будет соответствовать открытию замка, неправильного – вызывать сигнал тревоги.

Рассмотрим абстрактный синтез автомата – распознавателя кодовой последовательности [5].

Дано: кодовая последовательность $(0 – 1 – 3 – 2)_8$=(00-01-11-10)

Требуется: синтезировать дискретный автомат (рис. 5.5)

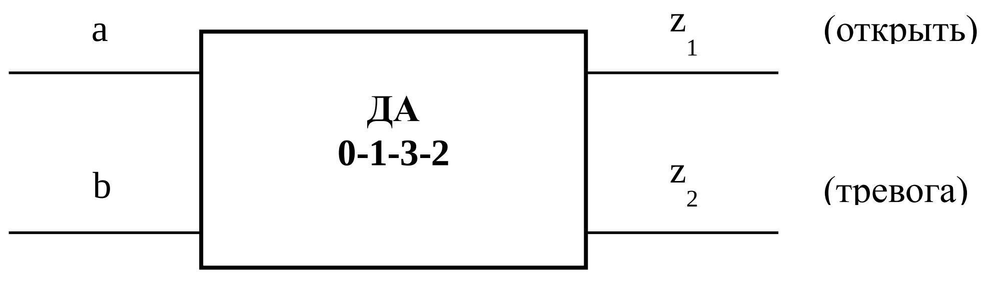


Рисунок 5.5 – Условно-графическое отображение работы автомата

Представим работу автомата таблицей анализа последовательностей (табл. 5.3).

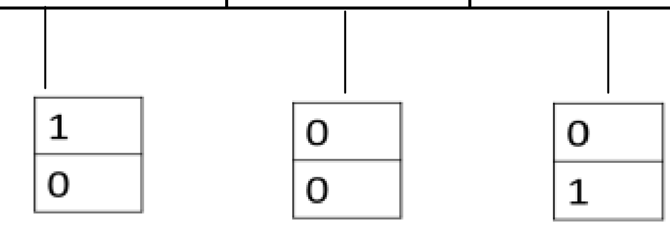
$0132_8 = (00), (01), (11), (10)$

Если a и b рассматривать как кнопки с фиксацией, то набор правильного кода будет:

- нажать b;
- нажать a;
- отжать b.

Таблица 5.3 – Таблица анализа последовательностей

a	0	0	1	1
b	0	1	1	0



Одновременное нажатие двух кнопок рассматривать не будем, так как все равно какая-либо кнопка будет нажата раньше.

Построим граф последовательности (рис. 5.6).

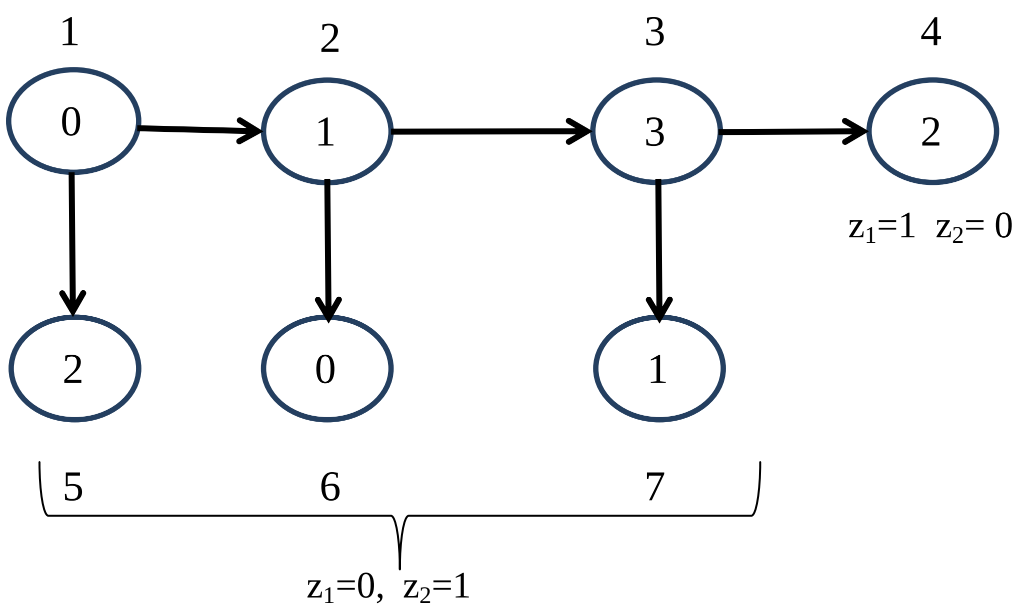


Рисунок 5.6 – Граф последовательности

Получим эти последовательности:

1) 01321 $z_1=1$, $z_2=0$
2) 02 $z_1=0$, $z_2=1$
3) 010 $z_1=0$, $z_2=1$
4) 0131 $z_1=0$, $z_2=1$

Построим таблицу тактов, в которой будут отображены соответствия входов и выходов (табл. 5.4).

Таблица 5.4 – Таблица тактов

ab	00	01	11	10	10	00	01
Z_1Z_2	00	00	00	10	01	01	01
	1	2	3	4	5	6	7

7 тактов

Анализ показывает, что эквивалентных тактов нет.

Составим теоретико-множественное описание ДА:

X = {00, 01, 10, 11};

Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};

Z = {00, 01, 10}.

Нбходимо опредеить функции переходов и выходов:

$\boldsymbol{\varphi}$=? $\boldsymbol{\psi}$=?.

Построим граф переходов автомата (рис. 5.7).

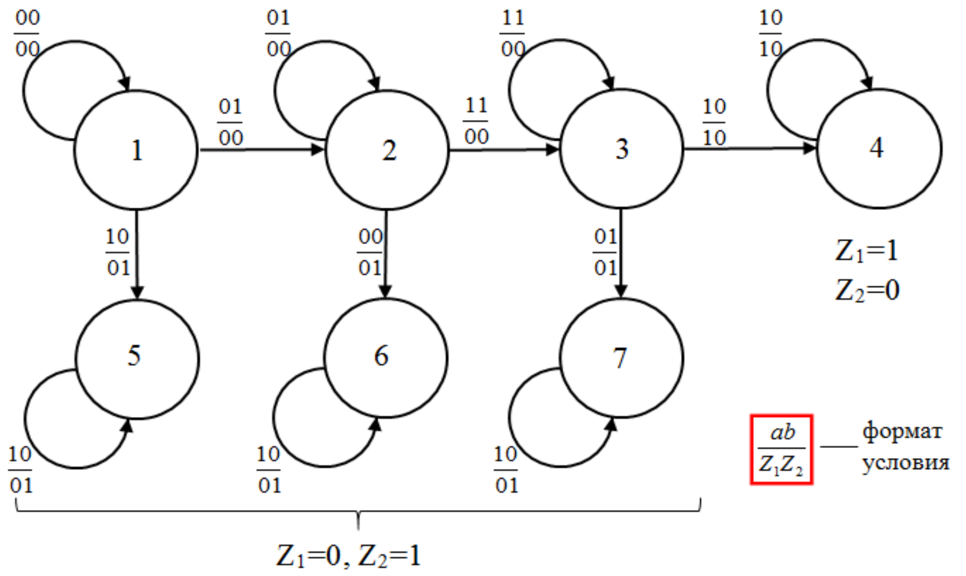


Рисунок 5.7 – Граф переходов автомата

Здесь вершины – состояния, а дуги – переходы между состояниями, на дугах – условия этих переходов. Петли вершин показывают, что без изменения входного сигнала ДА будет оставаться в этом состоянии (устойчивый такт). Переходы между вершинами соответствуют неустойчивым тактам.

Построим первичную таблицу переходов (ПТП), в которой каждому такту будет поставлено в соответствие состояние автомата (табл. 5.5). Число строк таблицы соответствует числу тактов. Размещение зон, где входные такты единичные, аналогично карте Карно. Устойчивые такты обозначим окружностью.

Таблица 5.5 – Первичная таблица переходов (ПТП)

№ такта	ab				z_1z_2
	00	01	11	10	
1	1	2		5	00
2	6	2	3		00
3		7	3	4	00
4				4	10
5				5	01
6	6				01
7		7			01

Автомат может быть построен и по первичной таблице переходов, но большое число строк ПТП (состояний автомата) требует большего числа элементов памяти Число элементов памяти автомата можно вычислить по формуле:

$S =]\log_2 N[$, где

][- округление до большего целого;

N – число состояний.

В результате получаем $S =]\log_2 7[= 3$

С целью уменьшения S число строк минимизируют путем слияния строк ПТП.

Объединятся могут:

- пустые клетки;
- пустые клетки и клетки с цифрами;
- одноимённые устойчивые и неустойчивые такты.

Строим граф объединения строк (ГОС) (рис.5.8). Вершины графа – это строки в ПТП. Дуги показывают объединяемые строки.

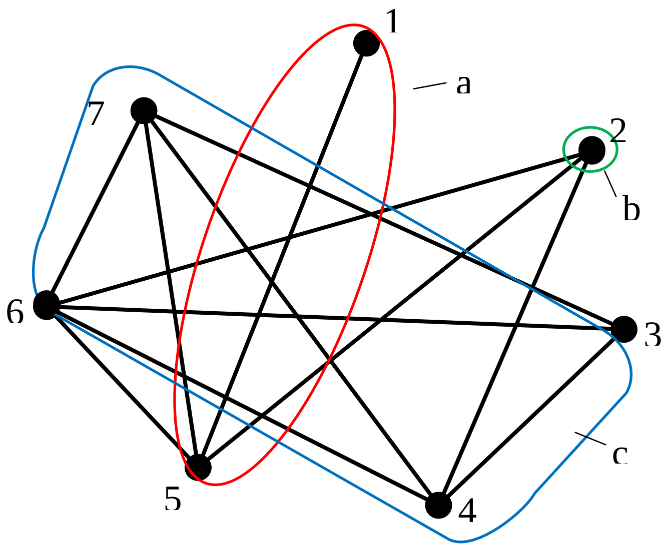


Рисунок 5.8 – Граф объединения строк

На ГОС необходимо выделить *минимальное число максимальных полных подграфов*. Обозначим их буквами a,b,c:

a – 1, 5 (две вершины);

b – 2 (одна вершина);

c – 3, 4, 6, 7 (четыре вершины).

Возможны и другие вариант объединения, однако меньшего числа строк не получить.

Граф объединения строк дает возможность построить минимизированную таблицу переходов (МТП) (табл. 5.6).

Таблица 5.6 – Минимизированная таблица переходов (МТП)

Сост.	ab			
	00	01	11	10
a	1	2		5
b	6	2	3	
c	6	7	3	4

Выполним кодирование состояний. Поскольку все переходы в МТП сверху вниз на одну строку при правильном наборе или вдоль строки, то «соседнее» кодирование очевидно, то есть при переходе должен изменять состояние лишь один элемент памяти: a – 00, b – 01, c – 11.

В результате строим реализуемую таблицу переходов (РТП) (табл. 5.7).

Таблица 5.7 – Реализуемая таблица переходов (РТП)

y_2y_1	ab			
	00	01	11	10
00	1 ^{0}	2 ^{1}	^{3}	5 ^{2}
01	6 ^{4}	2 ^{5}	3 ^{7}	^{6}
11	6 ^{14}	7 ^{15}	3 ^{17}	4 ^{16}

Определим число элементов памяти автомата:

S=]log$_2$N [

N – число состояний

S=]log$_2$3 [= 2

{y_2, y_1}

Построим таблицу переходов-выходов (ТПВ) (табл. 5.8). Исходной информацией для этого будут РТП и ПТП. В клетках ТПВ указываются состояния элементов памяти $y_2y_1(t+1)$, то есть после окончания изменения входного сигнала, и выходные сигналы после окончания переходного процесса, вызванного этим изменением.

Таблица 5.8 – Таблица переходов-выходов (ТПВ)

y_2y_1	ab				
	00	01	11	10	
00	$\frac{00}{00}$ 0	$\frac{01}{00}$ 1	3	$\frac{00}{10}$ 2	
01	$\frac{11}{10}$ 4	$\frac{01}{00}$ 5	$\frac{11}{00}$ 7	6	
11	$\frac{11}{10}$ 14	$\frac{11}{10}$ 15	$\frac{11}{00}$ 17	$\frac{11}{01}$ 16	$\frac{y_2y_1(t+1)}{z_2z_1}$

При построении ТПВ необходимо учесть следующие основные моменты:

- состояния $y_2y_1(t+1)$ для устойчивых тактов такие же, как $y_2y_1(t)$ этой строки, то есть при данном входном сигнале не изменяются;

- состояния $y_2y_1(t+1)$ для неустойчивых тактов соответствуют той строке, в которую осуществляется переход в РТП;

- значения выходных сигналов берутся из ПТП, в неустойчивых тактах они соответствуют значениям этих же устойчивых тактов.

Получим переключательные функции переходов и выходов, описывающие дискретный автомат – распознаватель кодовой последовательности в символической форме с восьмеричной нумерацией наборов.

$y_2(t+1)$ = 04, 07, 14, 15, 16, 17 [00, 01, 02, 05]

$y_1(t+1)$ = 01, 04, 05, 07, 14, 15, 16, 17 [00, 02]

$z_2(t)$ = 02, 04, 14, 15 [00, 01, 05, 07, 16, 17]

$z_1(t)$ = 16 [00, 01, 02, 04, 05, 07, 14, 15, 17]

На этом абстрактный синтез автомата закончен и можно переходить к структурному синтезу.

5.6. Структурный синтез автомата

Структурный синтез автомата выполняется в следующей последовательности:

- получение ТВЭП ПФ (таблицы возбуждения элементов памяти);
- получение ПФ возбуждения элементов памяти;
- минимизация ПФ, описывающих автомат и приведение к заданному базису (ПФ выхода и возбуждения элементов памяти);
- построение ФЭС автомата.

Элементарная ПФ – это функция от 1-ой или 2-х переменных. Элементарные автоматы памяти – автоматы, хранящие 1 бит информации, т.е. имеющие два состояния {0, 1}. Элементарные автоматы памяти способны под действием входного сигнала переходить из одного устойчивого состояния в другое. Такие автоматы называют триггерами. Триггеры (англ. – trigger) буквально «спусковой крючок» - подчеркивает главное качество – способность быстро, скачком переходить из одного состояния в другое. Они служат основными элементами системы большинства запоминающих устройств.

Рассмотрим условное графическое обозначение RS – триггера (рис. 5.9).

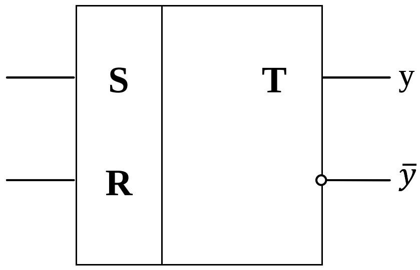


Рисунок 5.9 – Условное графическое обозначение триггера

S (Set) – установить; R (Reset) – сбросить.

При R=1 триггер устанавливается в нулевое состояние (y=0).

При S=1 триггер устанавливается в единичное состояние (y=1).

Состояние R=S=1 считается запрещенным, его необходимо исключать схемно, то есть проектируя дискретный автомат, где будут использоваться триггеры.

Наиболее просто реализуется RS-триггер с инверсным управлением, то есть действующими уровнями сигналов считаются нулевые уровни: S=0, R=0.

S=R=0 – запрещенная комбинация. Условное графическое обозначение RS-триггера с инверсным управлением представлено на рисунке 5.10.

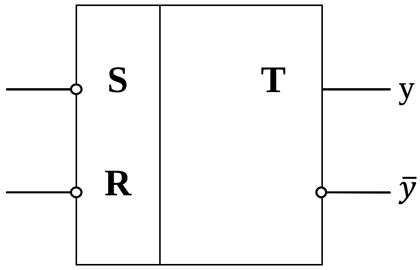


Рисунок 5.10 – Условное графическое обозначение триггера с инверсным управлением

Рассмотрим реализацию инверсного триггера в базисе И-НЕ (рис. 5.11).

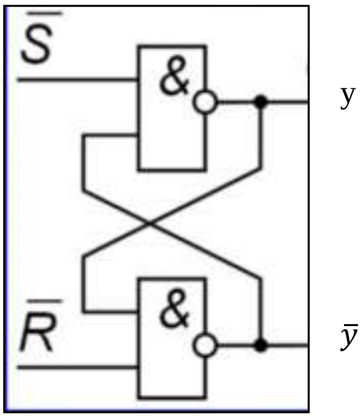


Рисунок 5.11 – Реализация триггера с инверсным управлением в базисе И-НЕ

Инверсии $\bar{S}$, $\bar{R}$ указывают, что действующий уровень «0». Наличие обратных связей характеризует автомат с памятью [8].

Поскольку выходная переменная одна и состояний автомата два, то опишем RS- триггер с инверсным управлением как автомат Мура (табл. 5.9).

ТПВ позволяет получить символические формы функций переходов и выходов:

y(t+1)=1,5,7 [2,3,6]

z(t)=y(t)

Таблица 5.9 – Таблица переходов-выходов элементарного автомата Мура

y(t)	SR				Z(t)
	00	01	11	10	
0	~	1	0	0	0
1	~	1	1	0	1

Для описания работы элементарных автоматов памяти используются таблицы возбуждения, указывающие условия перехода к новому состоянию. Так, для RS – триггера с инверсным управлением она будет иметь вид (табл. 5.10).

Таблица 5.10 – Таблица возбуждения триггера

y(t)	y(t+1)		
	0	1	
0	$\frac{1}{\sim}$	$\frac{0}{1}$	
1	$\frac{1}{0}$	$\frac{\sim}{1}$	$\frac{S}{\mathrm{R}}$

Получим таблицу возбуждения элементов памяти (ТВЭП), которая позволяет показать, какими должны быть входы всех ЭП для обеспечения переходов, указанных в ТПВ. Формат ТВЭП соответствует ТПВ, но в клетках указываются значения входов элементов памяти. Таким образом, исходными данными для построения ТВЭП являются ТПВ и таблица возбуждения триггера (табл. 5.11).

Получим ПФ управления элементами памяти ДА в символической форме:

S_2 = 00,01,02,05 [04,07]

R_2 = 04,07,14,15,16,17 ≡ 1

S_1 = 00,02 [01]

R_1 = 01,04,05,07,14,15,16,17 ≡ 1

Таблица 5.11 - Таблица возбуждения элементов памяти

y_2y_1	**ab**				
	00	01	11	10	
00	$\frac{\mathbf{1}}{\sim}\ \frac{\mathbf{1}}{\sim}$ 0	$\frac{\mathbf{1}}{\sim}\ \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}}$ 1	- 3	$\frac{\mathbf{1}}{\sim}\ \frac{\mathbf{1}}{\sim}$ 2	
01	$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}}\ \frac{\sim}{\mathbf{1}}$ 4	$\frac{\mathbf{1}}{\sim}\ \frac{\sim}{\mathbf{1}}$ 5	$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}}\ \frac{\sim}{\mathbf{1}}$ 7	- 6	
11	$\frac{\sim}{\mathbf{1}}\ \frac{\sim}{\mathbf{1}}$ 14	$\frac{\sim}{\mathbf{1}}\ \frac{\sim}{\mathbf{1}}$ 15	$\frac{\sim}{\mathbf{1}}\ \frac{\sim}{\mathbf{1}}$ 17	$\frac{\sim}{\mathbf{1}}\ \frac{\sim}{\mathbf{1}}$ 16	$\frac{\boldsymbol{S2}}{\boldsymbol{R2}}\ \frac{\boldsymbol{S1}}{\boldsymbol{R1}}$

Функции возбуждения R_1 и R_2 тождественно истинны ($R1 \equiv 1$, $R_2 \equiv 1$), так как у этих функций отсутствуют запрещенные наборы.

База ПФ $(y_2, y_1, a, b)_8$.

Таким образом, можно выбрать метод минимизации.

ТПВ представляет собой карту Карно сразу на четыре ПФ; нам нужны только функции выхода z_2, z_1

ТВЭП – карта Карно на четыре ПФ, которые реализуют функции переходов.

R_2 и R_1 оказались $\equiv$ ***1,*** далее получим S_2 и S_1

Таким образом в данной задаче понадобятся 4 карты Карно.

Выполним минимизацию S_2 = 00,01,02,05 [04,07] (табл. 5.12).

$S_2 = (0 \vee 1 \vee 3 \vee 2 \vee 10 \vee 11 \vee 13 \vee 12) \vee (1 \vee 5 \vee 15 \vee 11) = (-\ 0\ -\ -) \vee (-\ -\ 0\ 1) =$

$= \overline{y_1} \vee \overline{a}b$

Таблица 5.12 – Минимизация функции S_2 по карте Карно

y_2y_1	ab			
	00	01	11	10
00	1 [0]	1 [1]	~ [3]	1 [2]
01	0 [4]	1 [5]	0 [7]	~ [6]
11	~ [14]	~ [15]	~ [17]	~ [16]
10	~ [10]	~ [11]	~ [13]	~ [12]

Минимизируем S_1 = 00,02 [01] (табл. 5.13).

Таблица 5.13 – Минимизация функции S_1 по карте Карно

y_2y_1	ab			
	00	01	11	10
00	1 ^{0}	0 ^{1}	~ ^{3}	1 ^{2}
01	~ ^{4}	~ ^{5}	~ ^{7}	~ ^{6}
11	~ ^{14}	~ ^{15}	~ ^{17}	~ ^{16}
10	~ ^{10}	~ ^{11}	~ ^{13}	~ ^{12}

$S_1 = (0 \vee 4 \vee 14 \vee 10 \vee 2 \vee 6 \vee 16 \vee 12) = (- - - 0) = \bar{b}$

Выполним минимизацию $Z_2 =$ 02, 04, 14, 15 [00, 01, 05, 07, 16, 17] (табл. 5.14).

$Z_2 = (14 \vee 15 \vee 10 \vee 11) \vee (2 \vee 3 \vee 13 \vee 12) \vee (4 \vee 14) = (1 – 0-) \vee (- 0 1-) \vee (- 100) = y_2\bar{a} \vee \overline{y_1}\, a \vee y_1\, \bar{a}\, \bar{b}$

Таблица 5.14 – Минимизация функции Z_2 по карте Карно

y_2y_1	ab			
	00	01	11	10
00	0 ^{0}	0 ^{1}	~ ^{3}	1 ^{2}
01	1 ^{4}	0 ^{5}	0 ^{7}	~ ^{6}
11	1 ^{14}	1 ^{15}	0 ^{17}	0 ^{16}
10	~ ^{10}	~ ^{11}	~ ^{13}	~ ^{12}

Построим карту Карно для минимизации Z_1= 16 [00, 01, 02, 04, 05, 07, 14, 15, 17] (табл. 5.15).

Таблица 5.15 – Минимизация функции Z_1 по карте Карно

y_2y_1	ab			
	00	01	11	10
00	0 [0]	0 [1]	~ [3]	0 [2]
01	0 [4]	0 [5]	0 [7]	~ [6]
11	0 [14]	0 [15]	0 [17]	1 [16]
10	~ [10]	~ [11]	~ [13]	~ [12]

$Z_1 = 16 \vee 12 = (1 – 1\ 0) = y_2a\bar{b}$

Имеем для реализации на RS триггерах с инверсным управлением:

$S_2 = \bar{y}_1 \vee \bar{a}b$

$R_2 = 1$

$S_1 = \bar{b}$

$R_1 = 1$

$Z_2 = y_2\bar{a} \vee \overline{y_1}\,a \vee y_1\,\bar{a}\,\bar{b}$

$Z_1 = y_2a\bar{b}$

Для реализации в базисе И-НЕ (число входов не ограничено) необходимо привести функции к этому базису. В результате получим:

$S_2 = \bar{y}_1 \vee \bar{a}b = \overline{\overline{\bar{y}_1 \vee \bar{a}b}} = \overline{y_1 \cdot \overline{\bar{a}b}}$

$R_2 = 1$

$S_1 = \bar{b}$

$R_1 = 1$

$Z_2 = y_2\bar{a} \vee \overline{y_1}\,a \vee y_1\,\bar{a}\,\bar{b} = \overline{\overline{y_2\bar{a}} \cdot \overline{y_1\bar{a}\bar{b}} \cdot \overline{\bar{y}_1 a}}$

$Z_1 = y_1a\bar{b} = \overline{\overline{y_1a\bar{b}}}$

Для минимизации существенно недоопределенных функций также можно использовать метод Викентьева.

Далее строится функциональная электрическая схема (ФЭС) (приложение А).

5.7. Анализ автоматов

Основной задачей анализа дискретного автомата является определение условий их функционирования. Под условиями функционирования понимают соответствие между входными комбинациями (последовательностями комбинаций) и выходными сигналами (выходными последовательностями).

Правильной функциональной схемой комбинационного узла является схема, в которой никакие два или более выходов элементов не объединяются непосредственно, то есть без использования других элементов. Никакая из функций, реализуемых элементами, не является аргументом для самой себя (отсутствуют обратные связи).

Задача анализа возникает в случаях:

- при проверке спроектированного ДА (с целью проверки синтеза);

- при поиске неисправностей (диагностический анализ).

Этапы анализа:

1) По ФЭС определяются входы и выходы автомата, типы логических элементов, на которых он реализован. Входы и выходы на схеме, как правило, обозначены буквенно-цифровыми символами.

2) Для сложных схем определяется возможность разделения схемы на функциональные части, затем определяются переключательные функции, реализуемые этими частями.

3) По переключательным функциям, реализуемым частями ДА, определяются переключательные функции для всего ДА.

4) Получаемые выражения преобразуются в СДНФ, далее символическую форму или таблицу истинности.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1

ПФ от трех аргументов задана номером в десятичной системе счисления. Построить функциональную схему комбинационного автомата в базисах:

- И, ИЛИ, НЕ;
- И-НЕ;
- ИЛИ-НЕ.

Переход к заданному базису выполнить аналитическим и графо-аналитическим способами.

а) F(a, b, c) = 165
б) F(a, b, c) = 167
в) F(a, b, c) = 143
г) F(a, b, c) = 105
д) F(a, b, c) = 234
е) F(a, b, c) = 248
ж) F(a, b, c) = 183
з) F(a, b, c) = 241

Задача 2

Выполнить абстрактный и структурный синтез автомата-распознавателя кодовой последовательности на два бинарных входа при условии изменения в каждом такте состояния только одного бинарного входа. Элементарные автоматы памяти – RS-триггеры с инверсным управлением. Базис логического преобразователя И-НЕ.

а) 1023 б) 3231 в) 2023 г) 2310 д) 3102.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое конечный автомат?
2. Чем отличается автомат Мили от автомата Мура?
3. Что понимается под эквивалентными состояниями автомата?

4. Что такое последовательностный автомат?

5. С какой целью строится граф объединения строк?

6. Сформулировать правило построения графа объединения строк.

7. В какой последовательности выполняется абстрактный синтез автомата?

8. В какой последовательности выполняется структурный синтез автомата?

9. Как строится таблица возбуждения элементов памяти?

10. Перечислить этапы анализа конечного автомата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии изложены теоретические вопросы предметной области дискретной математики, а также прикладные методы решения инженерных и научных задач на множестве дискретных объектов. Структура учебного материала пособия такова, что она позволяет в часы самостоятельной работы студента успешно осваивать материал дисциплины.

Проведение аналогии между методами математики классической и математики дискретной в совокупности с системным построением дисциплины позволяет достичь положительной мотивации к обучению.

Изучение дисциплины формирует базу для изучения элементов, узлов и основ построения ЭВМ, а также для освоения дисциплин математическая логика, цифровая схемотехника, микропроцессорные системы и других.

Знание основ дискретной математики, владение ее методологическим аппаратом является непременным условием подготовки будущего специалиста по вычислительной технике и информационным технологиям.

Учебное пособие может быть использовано для обучения по направлениям подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии, 09.03.03 Прикладная информатика, 09.03.04 Программная инженерия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гашков, С. Б. Дискретная математика / С. Б. Гашков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 456 с. — ISBN 978-5-507-45940-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/292028 (дата обращения: 21.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Гутова, С. Г. Дискретная математика : учебное пособие / С. Г. Гутова, Е. С. Каган, М. А. Новосельцева. — Кемерово : КемГУ, [б. г.]. — Часть 2 — 2022. — 485 с. — ISBN 978-5-8353-2894-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/253241 (дата обращения: 21.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Дехтярь, М. И. Лекции по дискретной математике : учебник / М. И. Дехтярь, С. М. Дудаков, Б. Н. Карлов. — 3-е изд., испр. и доп. — Тверь : ТвГУ, 2021. — 528 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/326600 (дата обращения: 21.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Дискретная математика и математическая логика: учебник/ Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.

5. Дискретная математика: Практическая дискретная математика и математическая логика: учеб. пособие / С.Ф. Тюрин, Ю.А. Аляев. – Москва : Финансы и статистика, 2010 – 384 с.

6. Еремина, И.И. Введение в дискретную математику: теория и практика: учебное пособие / И.И. Еремина – Набережные Челны: Издательско-полиграфический центр НЧИ КФУ, 2015. – 208 с.

7. Каширская, Е. Н. Теория конечных автоматов : учебное пособие / Е. Н. Каширская, М. М. Клягин, В. А. Серебрянкин. — Москва : РТУ МИРЭА, 2021. — 100 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/226538 (дата обращения: 21.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

8. Кондратьев, А.В. Основы цифровой схемотехники: Учебное пособие / А.В. Кондратьев. – Пермь: Изд-во ФГОУ ВО «Пермская ГСХА», 2016. – 145 с.

9. Мальцев, И. А. Дискретная математика / И. А. Мальцев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 292 с. — ISBN 978-5-507-45354-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/265193 (дата обращения: 21.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

10. Моисеенкова, Т. В. Дискретная математика в примерах и задачах : учебное пособие / Т. В. Моисеенкова. — Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2018. — 132 с. — ISBN 978-5-7638-3967-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL:

https://www.iprbookshop.ru/100011.html (дата обращения: 04.02.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

11. Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач : учебное пособие / А. А. Глибичук, Д. Г. Ильинский, Д. В. Мусатов [и др.]. — 2-е изд. — Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллект», 2019. — 103 с. — ISBN 978-5-91559-259-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/103378.html (дата обращения: 04.02.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

12. Рыбин, С. В. Дискретная математика и информатика : учебник для вузов / С. В. Рыбин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 748 с. — ISBN 978-5-8114-8566-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/193326 (дата обращения: 21.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

13. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика : учебное пособие / Ю. П. Шевелев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 592 с. — ISBN 978-5-8114-4284-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/206510 (дата обращения: 21.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Дискретная математика : прикладные задачи и сложность алгоритмов: учебник и практикум для вузов / А. Е. Андреев, А. А. Болотов, К. В. Коляда, А. Б. Фролов. – 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2023. – 317 с. – URL: https://urait.ru/bcode/514434 .

2. Дискретная математика : учебное пособие / О. Ю. Барсукова, М. А. Алехина, П. Г. Пичугина [и др.]. — Пенза : ПГУ, 2019. — 96 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/162241.

3. Гутова, С. Г. Дискретная математика : учебное пособие / С. Г. Гутова. — Кемерово : КемГУ, 2019 — Часть 1 — 2019. — 491 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/135203.

4. Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2023. — 279 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/510824. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Баврин, И. И. Дискретная математика. Учебник и задачник : для вузов / И. И. Баврин. — Москва : Юрайт, 2023. — 193 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/511261. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

6. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / В. Б. Гисин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2023. — 468 с. // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/531659. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Дополнительная литература

1. Бекарева, Н. Д. Дискретная математика : учебное пособие / Н. Д. Бекарева. — Новосибирск : НГТУ, 2019. — 80 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/152270 .

2. Носов, В. В. Дискретная математика : учебное пособие / В. В. Носов. — Оренбург : ОГУ, 2019. — 144 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/159904.

БАЗЫ ДАННЫХ, ИНФОРМАЦИОННО-СПРАВОЧНЫЕ И ПОИСКОВЫЕ СИСТЕМЫ

1. Электронный каталог библиотеки Пермского ГАТУ : базы данных, содержащие сведения обо всех видах литературы, поступающей в фонд Научной библиотеки Пермского ГАТУ. – URL: https://pgsha.ru/generalinfo/library/webirbis/.

2. Электронная библиотека / Пермский государственный аграрно-технологический университет имени академика Д. Н. Прянишникова. – URL: https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/.

3. ConsultantPlus (КонсультантПлюс) : компьютерная справочно-правовая система. – URL: https://www.consultant.ru/. – Режим доступа: для авторизированных пользователей. – Доступ из корпусов ПГАТУ.

4. eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека. – URL: https://elibrary.ru/defaultx.asp. – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей.

5. Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/. – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей.

6. Юрайт : электронно-библиотечная система. – URL: https://urait.ru/. – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей.

7. Сетевая электронная библиотека (СЭБ). – URL: https://e.lanbook.com/. – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей.

8. Polpred.com (Полпред.ком) : электронно-библиотечная система. – URL: https://polpred.com/news.

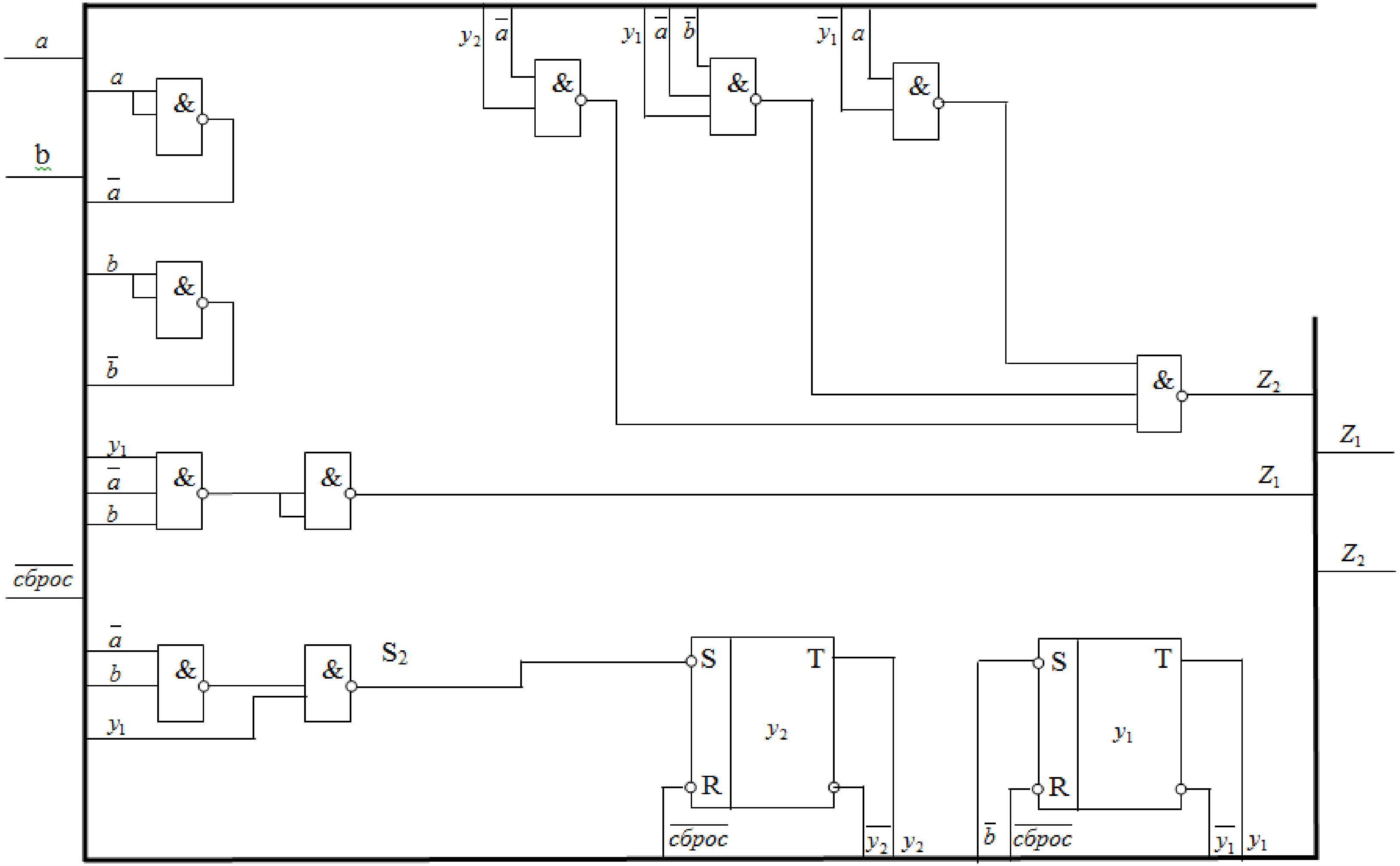
9. Национальная электронная библиотека (НЭБ): https://rusneb.ru/ – Доступ из читальных залов НБ ПГАТУ.

10. Электронные информационные ресурсы ФГБНУ ЦНСХБ: https://cnshb.ru/. – Режим доступа: для авторизированных пользователей. – Доступ из читальных залов НБ ПГАТУ.

11. Информационные услуги (периодика) ООО «ИВИС» : https://eivis.ru. – Режим доступа: для авторизированных пользователей.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Функциональная схема дискретного автомата -распознавателя кодовой последовательности 0132



Учебное издание

Глотина Ирина Михайловна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Подписано в печать 07.06.24.
Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 9,69.
Тираж 30 экз. Заказ №32

ИПЦ «ПрокростЪ»
Пермского государственного аграрно-технологического университета
имени академика Д.Н. Прянишникова,
614990, Россия, г. Пермь, ул. Петропавловская, 23
тел. (342)217-95-42