Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д. Н. Прянишникова"

Н. В. Деменева

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Пермь
ИПЦ "Прокростъ"
2022

УДК 51
ББК 22.1
Д-30

Рецензенты:

Г. Г. Шеремет, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики (ПГНИУ);

Т. А. Акентьева, кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой общей химии (ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ);

В. В. Аюпов, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и физики (ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ).

Д-30 Деменева, Н. В.

Математика: учебно-методическое пособие / Н. В. Деменева; Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пермский государственный аграрно-технологический университет имени академика Д. Н. Прянишникова". – Пермь: ИПЦ "Прокростъ", 2022. – 196 с.; 29 см. – Библиогр.: с. 178-180. – 30 экз. – ISBN 978-5-94279-546-7. – Текст : непосредственный.

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные вопросы комплексных чисел, элементов линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики. Приведён справочный материал по теории, примеры с подробным решением и упражнения с ответами. В упражнения включены как типовые задачи дисциплины, так и задачи из области естествознания. Весь материал разбит на три уровня сложности.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации контактной и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки: 35.03.06 Агроинженерия, 05.03.06 Экология и природопользование, 06.03.01 Биология, 06.03.02 Почвоведение.

УДК 51
ББК 22.1

Утверждено в качестве учебно-методического пособия методической комиссией инженерного факультета (протокол №4 от 14.12.2021).

Учебное издание

Деменева Надежда Валерьевна

МАТЕМАТИКА
Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 25.01.22. Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 24,5. Тираж 30 экз. Заказ № 8
ИПЦ «Прокростъ»
Пермского государственного аграрно-технологического
университета имени академика Д.Н. Прянишникова,
614990, Россия, Пермь, ул. Петропавловская, 23,
тел. (342) 217-95-42

ISBN 978-5-94279-546-7

Оглавление

Введение

Учебно-методическое пособие «Математика» предназначено для организации контактной и самостоятельной работы по дисциплине «Математика» обучающихся направлений подготовки: 35.03.06 Агроинженерия, 05.03.06 Экология и природопользование, 06.03.01 Биология, 06.03.02 Почвоведение.

Цель пособия состоит в формировании у обучающихся умений и навыков, необходимых для использования математического аппарата при решении профессиональных задач, а именно, задач из области естествознания.

Решение таких задач основано на умении составлять математические модели, использовать математические методы, в том числе методы обработки данных. С этой целью в упражнения включены задачи, предполагающие математическое моделирование объектов или процессов в области естествознания, а также исследование готовых математических моделей.

Так, в главе *Элементы линейной алгебры* предложена для решения задача на биологическую интерпретацию элементов матрицы потребления в экосистеме и нахождение общего энергетического дохода каждой особи в этой экосистеме.

В главе *Аналитическая геометрия* предложена для решения задача на составление уравнения прямой линии при отражении световых лучей, задача на определение фокуса параболы при рассмотрении зеркала прожектора, задача на вычисление скалярного произведения векторов при определении работы силы, задача на вычисление координат точки, делящей отрезок в заданном отношении, при определении центра масс однородной пластины.

В главе *Введение в математический анализ* предложена для решения задача на составление функциональной зависимости при падении напряжения в электрической цепи, задача на составление функциональной зависимости при росте лесного участка.

В главе *Дифференциальное исчисление функции одной переменной* предложена для решения задача на нахождение производной функции при определении скорости тела, его кинетической энергии, линейной плотности стержня, скорости роста популяции, угла провеса висячего моста в определённой точке. Предложена задача на нахождение экстремума функции при определении максимальной реакции организма на лекарство.

В главе *Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных* предложена для решения задача на нахождение концентрации веществ химической реакции, при которых скорость реакции максимальна.

В главе *Интегральное исчисление функции одной переменной* предложена для решения задача на нахождение пути, пройденного телом, при известной скорости прямолинейного движения.

В главе *Дифференциальные уравнения* предложена для решения задача на составление и решение дифференциальных уравнений при нахождении закона движения тела, закона размножения бактерий, закона охлаждения тела, при определении начального количества вещества в процессе преобразования его в другое вещество.

В главе *Ряды* предложена для решения задача на использование степенных рядов при рассмотрении зависимости длины столба ртути в барометре от температуры.

В главе *Теория вероятностей и математическая статистика* предложена для решения задача на использование вероятностных методов при исследовании всхожести семян.

Задачи, перечисленные выше, показывают важную роль математического образования в подготовке кадров для агропромышленного комплекса.

В упражнения включены также типовые задачи, направленные на формирование умений и навыков, предусмотренных в рамках изучения данной дисциплины.

Весь материал пособия разбит на три уровня сложности, что позволяет:

– поэтапно подвести обучающихся к выполнению сложного задания;

– сориентировать обучающихся об уровне сложности выполняемого задания и, соответственно, оценить уровень усвоения изучаемого раздела;

– сориентировать преподавателя об уровне сложности выполняемого обучающимся задания и, соответственно, оценить уровень усвоения изучаемого раздела, выставить объективную оценку.

Содержание пособия соответствует рабочей программе по дисциплине «Математика» для направлений подготовки: 35.03.06 Агроинженерия, 05.03.06 Экология и природопользование, 06.03.01 Биология, 06.03.02 Почвоведение.

В процессе выполнения упражнений у обучающихся формируются следующие умения:

– правильно употреблять математическую символику;

– выбирать и применять методы элементов линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики для решения как типовых задач дисциплины, так и прикладных, в том числе задач в области естествознания;

− составлять и исследовать математические модели объектов или процессов в области естествознания;

– анализировать полученные результаты, вырабатывать на их основе практические рекомендации;

− самостоятельно осваивать новые математические методы.

Также у обучающихся формируются следующие навыки:

− владение математическим аппаратом для решения типовых задач данной дисциплины;

– владение основами математического моделирования объектов или процессов в области естествознания с последующим выбором или разработкой рациональных методов исследования созданных моделей и проведением их качественного анализа.

Пособие охватывает все разделы дисциплины «Математика»: комплексные числа, элементы линейной алгебры, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, дифференциальное исчисление функции нескольких переменных, интегральное исчисление функции одной переменной, дифференциальные уравнения, ряды, элементы теории вероятностей и математической статистики.

Каждый раздел представлен отдельной главой, включающей три уровня сложности. На каждом уровне представлен справочный материал по теории, примеры и упражнения. Соответствие уровней сохраняется между главами, когда материал определённого уровня опирается на материал другой главы, но с того же или более низкого уровня. Для контроля правильности выполнения упражнений приведены ответы.

Таким образом, достоинства предлагаемого пособия состоят в следующем:

– наличие задач из естествознания;

– трёхуровневая система сложности;

– охват всех разделов дисциплины.

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Первый уровень сложности

Справочный материал.

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа; i – *мнимая единица*, определяемая как $i = \sqrt{-1}$ и соответственно $i^2 = -1$. Число x называется *действительной частью* комплексного числа, y – *мнимой частью*. Обозначение: $x = Re\, z$, $y = Im\, z$. Выражение $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся знаком мнимой части, называются *сопряжёнными*.

Комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка $M(x; y)$ плоскости Oxy (рис. 1.1.1). И наоборот, каждой точке $M(x; y)$ плоскости Oxy соответствует комплексное число $z = x + iy$. Комплексному числу соответствует также вектор $\overline{OM}$ плоскости Oxy. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

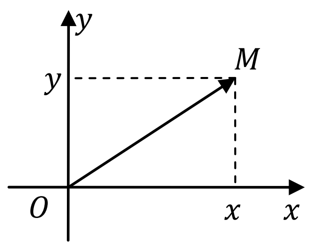

Рис. 1.1.1.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, то есть при сложении комплексных чисел в алгебраической форме складывают действительные и мнимые части.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$, то есть при вычитании комплексных чисел в алгебраической форме вычитают действительные и мнимые части.

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$, то есть комплексные числа в алгебраической форме умножают как двучлены по правилам алгебры.

Частным двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} +$

$+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}$, то есть при делении комплексных чисел в алгебраической форме числитель и знаменатель умножают на число, сопряжённое знаменателю.

Пример 1.1.1. Указать действительную и мнимую части чисел:
1) $z = 2 - 4i$; 2) $z = 3i$; 3) $z = 5$.

Решение. Все числа заданы в алгебраической форме $z = x + iy$, где x –действительная часть комплексного числа, y – мнимая часть. Тогда:
1) $x = 2, y = -4$; 2) $x = 0, y = 3$; 3) $x = 5, y = 0$;

Пример 1.1.2. Найти степень числа i: 1) i^{10}; 2) i^{13}.

Решение. Воспользуемся формулой $i^2 = -1$.
1) $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$;
2) $i^{13} = i^{12} \cdot i = (i^2)^6 \cdot i = (-1)^6 \cdot i = i$.

Ответ: 2) –1; 2) i.

Пример 1.1.3. Найти комплексные числа, сопряжённые данным числам: 1) $z = -3 + 2i$; 2) $z = -4i$; 3) $z = 2$.

Решение. Сопряжённое число отличается от исходного знаком мнимой части. Тогда: 1) $\bar{z} = -3 - 2i$; 2) $\bar{z} = 4i$; 3) $\bar{z} = 2$.

Пример 1.1.4. Изобразить комплексные числа в комплексной плоскости: 1) $z = -\sqrt{3} + i$; 2) $z = 4$; 3) $z = -2i$.

Решение. Числу $z = x + iy$ в комплексной плоскости Oxy соответствует точка $M(x; y)$ или вектор $\overline{OM}$. Тогда:

1) числу $z = -\sqrt{3} + i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-\sqrt{3}; 1)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 1.1.2);

2) числу $z = 4$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(4; 0)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 1.1.3);

3) числу $z = -2i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0; -2)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 1.1.4).

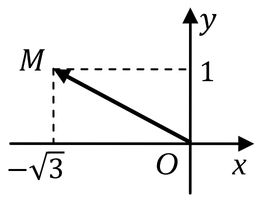

Рис. 1.1.2

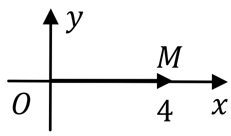

Рис. 1.1.3

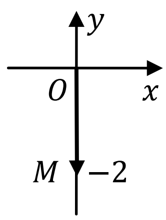

Рис. 1.1.4.

Пример 1.1.5. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 5 + i$ в алгебраической форме.

Решение.

Найдём сумму чисел, учитывая, что при сложении комплексных чисел в алгебраической форме складывают действительные и мнимые части:
$z_1 + z_2 = (-2 + 5) + i(3 + 1) = 3 + 4i$.

Найдём разность чисел, учитывая, что при вычитании комплексных чисел в алгебраической форме вычитают действительные и мнимые части:
$z_1 - z_2 = (-2 - 5) + i(3 - 1) = -7 + 2i$.

Найдём произведение чисел, учитывая, что комплексные числа в алгебраической форме умножают как двучлены по правилам алгебры:

$z_1 z_2 = (-2+3i)(5+i\,) = -10-2i+15i+3i^2 = -10+13i-$
$-3 = -13+13i.$

Найдём частное чисел, учитывая, что при делении комплексных чисел в алгебраической форме числитель и знаменатель умножают на число, сопряжённое знаменателю:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{5+i} = \frac{(-2+3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{-10+2i+15i-3i^2}{5^2-i^2} = \frac{-10+17i+3}{25-(-1)} =$
$= \frac{-7+17i}{25+1} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i.$

Ответ: $z_1+z_2 = 3+4i$, $z_1-z_2 = -7+2i$, $z_1 z_2 = -13+13i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i.$

<u>Пример 1.1.6.</u> Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-2x+5=0$.

<u>Решение.</u>

1) Выразим x, учитывая, что $i=\sqrt{-1}$:

$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i.$

2) Найдём корни квадратного уравнения, учитывая, что $i=\sqrt{-1}$:

$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{2\pm 4i}{2} = 1\pm 2i.$

Ответ: 1) $x_{1,2} = \pm 5i$; 2) $x_{1,2} = 1\pm 2i$.

Упражнения

1. Указать действительную и мнимую части чисел:

1) $z=-3+2i$; 2) $z=6$; 3) $z=-i$.

2. Найти степень числа i: 1) i^4; 2) i^{19}.

3. Найти числа, сопряжённые данным числам:

1) $z=4-7i$; 2) $z=-3$; 3) $z=2i$.

4. Изобразить комплексные числа в комплексной плоскости:

1) $z=-4-2i$; 2) $z=-2$; 3) $z=3i$.

5. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1=1+5i$ и $z_2=4-2i$ в алгебраической форме.

6. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

1) $x^2+16=0$; 2) $x^2+2x+10=0$.

Второй уровень сложности

<u>Справочный материал.</u>

Тригонометрической формой записи комплексного числа называется выражение вида:

$$z = r(cos\varphi + i\,sin\,\varphi),$$

где r – *модуль* комплексного числа; используют также обозначение $|z|$; φ – *аргумент* комплексного числа, определяемый с точностью до слагаемого $2\pi k,\ k\in Z$; используют также обозначение $Argz$. Значение аргумента φ, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\le\pi$, называется *главным* и обозначается $argz$. Величины $|z|$ и $argz$ находят по формулам:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\ arg z = \varphi = \begin{cases} arctg\ \frac{y}{x},\ z \in I \text{ или } IV \text{ четвертям}, \\ \pi + arctg\ \frac{y}{x},\ z \in II \text{ четверти}, \\ -\pi + arctg\ \frac{y}{x},\ z \in III \text{ четверти}. \end{cases}$$

Величина r обозначает длину вектора $\overline{OM}$, изображающего данное комплексное число на плоскости; величина φ обозначает угол между вектором $\overline{OM}$ и положительным направлением оси Ox (рис. 2.1.1).

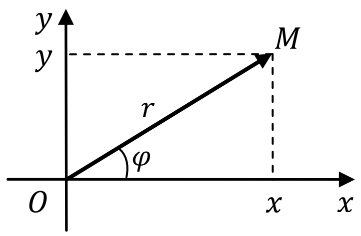

Рис. 2.1.1

Показательной формой записи комплексного числа называется выражение вида:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ называется комплексное число:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

то есть при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножают, а аргументы складывают.

Частным двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ называется комплексное число:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

то есть при делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делят, а аргументы вычитают.

Степенью n комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется комплексное число:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

то есть при возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (формула Муавра).

Корнем степени n из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется комплексное число:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = \overline{0, n-1},$$

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое (то есть действительное и положительное) значение корня из положительного числа r.

Пример 2.1.1. Представить комплексные числа в тригонометрической и показательной формах: 1) $z = -\sqrt{3} + i$; 2) $z = -2$; 3) $z = i$.

Решение.

1) Найдём модуль и аргумент числа: $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2,$

$\varphi = \pi + arctg\ \frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Тригонометрическая форма числа: $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, показательная форма числа: $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

2) Найдём модуль и аргумент числа: $r = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, $\varphi = \pi$. Тригонометрическая форма числа: $z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, показательная форма числа: $z = 2e^{\pi i}$.

3) Найдём модуль и аргумент числа: $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тригонометрическая форма числа: $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, показательная форма: $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Ответ: 1) $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$;

2) $z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z = 2e^{\pi i}$; 3) $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Пример 2.1.2. Найти произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Решение. Представим каждое число в тригонометрической форме:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Найдём произведение чисел:

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

Найдём частное чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right).$$

Ответ: $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$;
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$.

Пример 2.1.3. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра: $(-1 - i)^7$.

Решение. Представим комплексное число $z = -1 - i$ в тригонометрической форме:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$(-1 - i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 7\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 7\right)\right) =$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= 8\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -8 + 8i.$$

Ответ: $-8 + 8i$.

Пример 2.1.4. Найти все значения корня из комплексных чисел:

1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}\,i}$.

Решение.

1) Представим комплексное число $z=-1$ в тригонометрической форме:

$z=1(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Выполним извлечение корня:

$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}, k=\overline{0,2}.$

Распишем все значения корня:

при $k=0$: $z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

при $k=1$: $z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1$;

при $k=2$: $z_3=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2) Представим комплексное число $z=-2+2\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме:

$z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Выполним извлечение корня:

$\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}=\sqrt{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)=$

$=2\left(\cos\frac{\pi+3\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+3\pi k}{3}\right), k=\overline{0,1}.$

Распишем все значения корня:

при $k=0$: $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}\,i$;

при $k=1$: $z_2=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-\sqrt{3}\,i$.

Ответ: 1) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $z_1=1+\sqrt{3}\,i$, $z_2=-1-\sqrt{3}\,i$.

Пример 2.1.5. Решить уравнение $x^3-8=0$ на множестве комплексных чисел.

Решение. Выразим из уравнения x: $x=\sqrt[3]{8}$ и найдём все значения корня. Для этого представим число $z=8$ в тригонометрической форме:

$z=8(\cos 0+i\sin 0)$.

По формуле извлечения корня из комплексного числа получаем:

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right), k=\overline{0,2}.$

Распишем все значения корня:

при $k=0$: $x_1=2(\cos 0+i\sin 0)=2(1+i\cdot 0)=2$;

при $k=1$: $x_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+\sqrt{3}\,i$;

при $k=2$: $x_3=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-\sqrt{3}\,i$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{3}\,i$, $x_3=-1-\sqrt{3}\,i$.

Упражнения

1. Представить комплексное число $z=\sqrt{3}+i$ в тригонометрической и показательной формах.

2. Найти произведение и частное двух комплексных чисел $z_1=1+$

$+\sqrt{3}i$ и $z_2 = 1 - i$ в тригонометрической форме.

3. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра: $\left(-\sqrt{3} - i\right)^6$.

4. Найти все значения корня из комплексных чисел: 1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt{-1+i}$.

5. Решить уравнение $x^3 - i = 0$ на множестве комплексных чисел.

Третий уровень сложности

Справочный материал. Из формулы вычитания комплексных чисел следует, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа:

$$d = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Этот факт используют при построении областей в комплексной плоскости.

Пример 3.1.1. В комплексной плоскости построить область, заданную условиями: $|z - 4| \leq 2$, $Rez > 4$.

Решение. Выражение $|z - 4|$ будем рассматривать как модуль разности комплексных чисел $z = x + iy$ и $z_0 = 4$. Тогда первое условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 4$ на расстояние, не большее 2, то есть определяет круг с центром в точке $(4;\ 0)$ радиуса 2, включая границу круга.

Второе условие определяет множество точек, абсциссы которых больше 4, то есть определяет область, расположенную правее прямой, заданной уравнением $x = 4$, исключая точки прямой.

Окончательно, заданная область определяет правую половину круга радиуса 2 с центром в точке $(4;\ 0)$, включая границу круга и исключая точки прямой $x = 4$ (рис. 3.1.1).

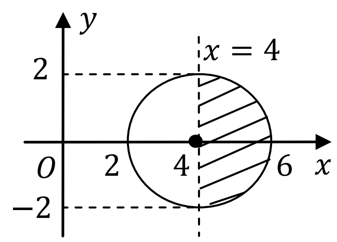

Рис. 3.1.1

Упражнения

1. В комплексной плоскости построить область, заданную условиями:

1) $|z| > 3$;
2) $|z - 2i| \leq 2$, $Rez \geq 0$;
3) $|z - 3| < 3$, $Imz < 2$;
4) $|z + 3 - 3i| \geq 3$, $\frac{2\pi}{3} \leq argz \leq \frac{3\pi}{4}$.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Первый уровень сложности

2.1. Матрицы

Справочный материал.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – действительные числа, называемые элементами матрицы, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Матрица содержит m строк и n столбцов.

Произведение $m \times n$ называется *размерностью* матрицы.

Матрица называется *квадратной*, если $m = n$, то есть число её строк равно числу столбцов. В этом случае число строк или столбцов матрицы называется её *порядком*.

Элементы матрицы, у которых номер строки равен номеру столбца, называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все недиагональные элементы матрицы равны нулю.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Над матрицами можно выполнять следующие действия: сложение, умножение на число, вычитание, транспонирование, умножение матриц.

Сложение. Складывать можно матрицы одинаковой размерности, при этом получается матрица той же размерности, что и исходные, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

Умножение на число. При умножении матрицы на число получается матрица, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента исходной матрицы на это число.

Вычитание. Вычитать можно матрицы одинаковой размерности, при этом получается матрица той же размерности, что и исходные, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов исходных матриц.

Умножение матриц. Умножение матриц определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, при этом каждый элемент новой матрицы равен сумме произведений элементов i-ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-ого столбца второй матрицы:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}\,, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

где c_{ij} – элемент новой матрицы, a_{is} – элемент первой матрицы размерности $m \times k$, b_{sj} – элемент второй матрицы размерности $k \times n$.

Транспонирование. При транспонировании строки матрицы заменяют столбцами, сохраняя их порядок.

Квадратной матрице A можно поставить в соответствие число, называемое её определителем. Используется обозначение: Δ или $|A|$.

Определителем матрицы $A = (a_{ij})$ *второго порядка, или определителем второго порядка,* называется число:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Определителем матрицы $A = (a_{ij})$ *третьего порядка, или определителем третьего порядка,* называется число:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$+a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$ (правило треугольника).

<u>Пример 1.2.1.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Найти следующие матрицы: $A + B$, $A - B$, $3A$, AB, A^T.

<u>Решение.</u>

Матрицы A и B имеют одинаковую размерность, поэтому их можно складывать. Получаем:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2+5 & 3+2 \\ 0+1 & 4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B имеют одинаковую размерность, поэтому их можно вычитать. Получаем:

$$A - B = \begin{pmatrix} -2-5 & 3-2 \\ 0-1 & 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Умножать на число можно матрицу любой размерности. Получаем:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A имеет размерность 2x2 и матрица B имеет размерность 2x2, то есть число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы, то умножение матрицы A на матрицу B возможно. Выполняем умножение.

Первую строку матрицы A умножаем на первый столбец матрицы B:

$$c_{11} = (-2 \quad 3)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = -7.$$

Первую строку матрицы A умножаем на второй столбец матрицы B:

$$c_{12} = (-2 \quad 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 17.$$

Вторую строку матрицы A умножаем на первый столбец матрицы B:

$$c_{21} = (0 \quad 4)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 4.$$

Вторую строку матрицы A умножаем на второй столбец матрицы B:

$$c_{22} = (0 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 28.$$

Полученные результаты записываем в матрицу:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 17 \\ 4 & 28 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование. Первую строку матрицы A заменяем её первым столбцом, вторую строку матрицы A заменяем её вторым столбцом:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 17 \\ 4 & 28 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 1.2.2.</u> Вычислить определитель второго порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 2 + 12 = 14.$$

Ответ: 14.

<u>Пример 1.2.3.</u> Вычислить определитель третьего порядка по правилу треугольника: $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 6 & 3 & -7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u>

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 6 & 3 & -7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 \cdot 5 + 9 \cdot (-7) \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$-6 \cdot 9 \cdot 5 - 4 \cdot (-7) \cdot 8 = 120 - 126 + 24 - 6 - 270 + 224 = -34.$$

Ответ. -34.

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

<u>Справочный материал.</u>

Система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – действительные числа, называемые коэффициентами при неизвестных, $i = m,\ j = \overline{1, n}$; b_i – действительные числа, называемые свободными элементами; x_j – неизвестные.

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Правило Крамера.

Правило Крамера применимо, когда число уравнений равно числу неизвестных, то есть матрица системы является квадратной ($m = n$).

Теорема. Пусть Δ − определитель матрицы системы, а Δ_j − определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой j-ого столбца столбцом свободных элементов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1,n}$.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.

1) Вычислить определитель матрицы системы Δ.

2) Вычислить определитель матрицы Δ_j, полученной из матрицы системы заменой j-ого столбца столбцом свободных элементов.

3) Найти неизвестные x_j.

Пример 1.2.4. Решить систему линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$

Решение.

Так как число уравнений равно числу неизвестных, то правило Крамера применимо. Используем алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.

1) Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 22 \neq 0,$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

2) Вычислим определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой первого столбца столбцом свободных элементов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -44.$$

Вычислим определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой второго столбца столбцом свободных элементов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 110.$$

Вычислим определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой третьего столбца столбцом свободных элементов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 132.$$

3) Находим неизвестные:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{110}{22} = 5$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{132}{22} = 6$.

Ответ: $(-2; 5; 6)$.

Упражнения

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$. Найти следующие матрицы: $A + B$, $A - B$, $3A$, AB, A^T.

2. В экосистеме существует три конкурирующих вида. Потребление особями одного вида особей другого вида задано матрицей третьего порядка $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – среднее число особей j-ого вида, потребляемое в день особью i-ого вида. Дать биологическую интерпретацию каждого элемента матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. В условиях задачи 2 задана матрица-столбец $R = (r_{i1})$ размерности 3×1, где r_{i1} – энергетический доход в калориях, получаемый от потребления одной особи i-ого вида. Найти общий энергетический доход в калориях, получаемый каждой особью в день, если $R = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель второго порядка: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель третьего порядка по правилу треугольника: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 5 & -8 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -8, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -11. \end{cases}$

Второй уровень сложности

2.1. Матрицы

Справочный материал.

Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца. Используется обозначение: M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы называется число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Определителем матрицы $A = (a_{ij})$ n-ого порядка, *или определителем* n-ого *порядка*, называется число, равное сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$$

(разложение по строке)

или

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj}\cdot A_{nj}$$

(разложение по столбцу).

Если A – квадратная матрица, то *обратной* для неё называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условиям: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

Обратная матрица существует при условии, что исходная матрица A невырожденная ($|A| \neq 0$).

Обратную матрицу можно найти по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A^*$, где A^* – присоединённая матрица (получена транспонированием матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A). Можно записать:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2.1. Найти минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} матрицы $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. M_{32} – это минор элемента матрицы, находящегося на пересечении третьей строки и второго столбца матрицы. Для нахождения указанного минора вычеркнем в матрице третью строку и второй столбец. Оставшиеся элементы образуют матрицу, определитель которой и является искомым минором:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -20.$$

A_{32} – это алгебраическое дополнение элемента матрицы, находящегося на пересечении третьей строки и второго столбца матрицы. Используя формулу для нахождения алгебраического дополнения, получаем:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot M_{32} = -1\cdot(-20) = 20.$$

Ответ: $M_{32} = -20$, $A_{32} = 20$.

Пример 2.2.2. Вычислить определитель третьего порядка разложением по строке или столбцу: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель разложением, например, по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 3\cdot A_{12} + 4\cdot A_{13} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+2}\cdot M_{12} + 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 3\cdot(-31) + 4\cdot(-11) = 7 + 93 - 44 = 56.$$

Ответ: 56.

Пример 2.2.3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти для неё обратную A^{-1}.

Решение.

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и для неё существует обратная.

Найдём алгебраические дополнения всех элементов матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$.

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Справочный материал.

Система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – действительные числа, называемые коэффициентами при неизвестных, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$; b_i – действительные числа, называемые свободными элементами; x_j – неизвестные.

Запишем 3 матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – *матрица системы*, то есть матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных; X – *матрица неизвестных*; B – матрица свободных элементов.

Матричная форма системы уравнений имеет вид: $AX = B$.

Метод обратной матрицы.

Метод обратной матрицы применим, когда выполняются 2 условия:

1) число уравнений равно числу неизвестных, то есть матрица системы является квадратной ($m = n$);

2) матрица системы невырожденная, то есть определитель матрицы системы отличен от нуля ($|A| \neq 0$).

Матрицу неизвестных находят по формуле: $X = A^{-1}B$.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.

1) Записать матрицы $A,\ X, B$.

2) Найти обратную матрицу A^{-1}.

3) Найти матрицу неизвестных X.

Пример 2.2.4. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$

Решение.

Применяем алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.

1) Запишем матрицу системы A, матрицу неизвестных X, матрицу свободных элементов B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Так как число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы $|A| = 22 \neq 0$, то метод обратной матрицы применим.

2) Найдём обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 7 \\ -6 & 20 & -12 \\ -11 & 22 & -11 \end{pmatrix}.$$

3) Найдём матрицу неизвестных X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 7 \\ -6 & 20 & -12 \\ -11 & 22 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -44 \\ 110 \\ 132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(-2; 5; 6)$.

Упражнения

1. Найти минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{12} для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка разложением по строке или столбцу: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти для неё обратную A^{-1}.

4. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4, \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -8. \end{cases}$

Третий уровень сложности

2.1. Матрицы

Справочный материал.

Простейшие матричные уравнения могут быть трёх видов:

1. $AX = B$, где X – неизвестная матрица; если матрица A невырожденная ($|A| \neq 0$), то решение матричного уравнения записывается в виде $X = A^{-1}B$;

2. $XA = B$, где X – неизвестная матрица; если матрица A невырожденная ($|A| \neq 0$), то решение матричного уравнения записывается в виде $X = BA^{-1}$;

3. $AXB = C$, где X – неизвестная матрица; если матрицы A и B невырожденные ($|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$), то решение матричного уравнения записывается в виде $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Во всех трёх случаях матрицы A, B, C, X имеют такую размерность, что используемые операции умножения определены, при этом левая и правая части матричного уравнения представляют собой матрицы одинаковой размерности.

Пример 3.2.1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде $AXB = C$, где $A =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Решением этого уравнения является матрица $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Найдём матрицы A^{-1} и B^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдём матрицу неизвестных:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{29}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{29}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$.

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Справочный материал.

Система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – действительные числа, называемые коэффициентами при неизвестных, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$; b_i – действительные числа, называемые свободными элементами; x_j – неизвестные.

Расширенной матрицей системы называется матрица вида:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Системы уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Элементарные преобразования, приводящие к эквивалентной системе.

1. Перестановка уравнений.
2. Умножение уравнения на любое действительное число.
3. Сложение уравнений.

Матрица называется *ступенчатой*, если все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Метод Гаусса. Метод Гаусса применим для систем с любым числом уравнений и неизвестных. Этот метод основан на приведении расширенной матрицы системы с помощью элементарных преобразований, приводящих к эквивалентной системе, к ступенчатому виду с последующим постепенным нахождением неизвестных, начиная с последней неизвестной.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

1) Составить расширенную матрицу системы.

2) Привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.

3) Записать систему уравнений.

4) Найти неизвестные.

Пример 3.2.2. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$

Решение. Применяем алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

1) Составим расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & 6 & 3 \end{array}\right).$$

2) Приведём расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, приводящих к эквивалентной системе.

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 8 \\ 4 & -5 & 6 & 3 \end{array}\right);$$

Поменяем первую и вторую строки местами:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 6 & 3 \end{array}\right);$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на (-2); к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-4):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 11 & -12 & -17 \\ 0 & 11 & -14 & -29 \end{array}\right);$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 11 & -12 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \end{array}\right).$$

3) Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 8, \\ 11x_2 - 12x_3 = -17, \\ -2x_3 = -12. \end{cases}$$

4) Найдём неизвестные. Из последнего уравнения находим $x_3 = 6$. Подставляем $x_3 = 6$ во второе уравнение: $11x_2 - 12 \cdot 6 = -17$. Отсюда $11x_2 = 55$ и $x_2 = 5$. Подставляем $x_2 = 5$ и $x_3 = 6$ в первое уравнение: $x_1 - 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 8$. Отсюда $x_1 = -2$.

Ответ: $(-2; 5; 6)$.

Упражнения

1. Решить матричные уравнения:

1) $X\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5 & 8\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных алгебраических методом Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1+8x_2-x_3=-8,\\ 5x_1-2x_2+9x_3=-12,\\ 2x_1+3x_2+4x_3=4.\end{cases}$$

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Первый уровень сложности

3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Справочный материал.

Расстояние между двумя точками плоскости $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ находят по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Координаты точки $M(x;y)$ *– середины отрезка, расположенного между точками* $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, находят по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Пример 1.3.1. Найти расстояние между точками $M_1(1;\ 6)$ и $M_2(3;\ -2)$.

Решение. Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Получаем:

$d=\sqrt{(3-1)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$.

Ответ: $2\sqrt{17}$.

Пример 1.3.2. Найти координаты середины отрезка, расположенного между точками $M_1(-4;\ 1)$ и $M_2(2;\ 5)$.

Решение. Воспользуемся формулами нахождения координат середины отрезка: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. Получаем:

$x=\frac{-4+2}{2}=-1,\ y=\frac{1+5}{2}=3$.

Ответ: $(-1;\ 3)$.

3.2. Прямая линия на плоскости

Справочный материал.

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, находят по формуле:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y=kx+b,$$

где k – угловой коэффициент прямой, причём $k = tg\alpha$, α – угол наклона прямой, то есть угол, который прямая образует с положительным направлением оси Ox; b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k – угловой коэффициент прямой, $M_0(x_0; y_0)$ – данная точка прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

где $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ – две данные точки прямой.

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B, C – действительные числа, причём $A^2 + B^2 \neq 0$.

Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b – величины отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.

Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ находят по формуле:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Условие параллельности прямых имеет вид:

$$k_1 = k_2$$

Условие перпендикулярности прямых имеет вид:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

При решении ряда задач это равенство удобно записать в виде:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$ находят по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. 1.3.3. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки: 1) $M_1(2;\ -4)$ и $M_2(5;\ 1)$; 2) $M_1(3;\ 2)$ и $M_2(7;\ 2)$; 3) $M_1(-1;\ 2)$ и $M_2(-1;\ 4)$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения углового коэффициента прямой через координаты двух известных точек прямой: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1) $k = \frac{1-(-4)}{5-2} = \frac{5}{3}$.

2) $k = \frac{2-2}{7-3} = \frac{0}{4} = 0$.

3) Так как $x_2 - x_1 = -1 - (-1) = 0$, то выражение $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ не имеет смысла. Поэтому угловой коэффициент прямой не определён и, следовательно, прямая параллельна оси Oy.

Ответ: 1) $\frac{5}{3}$; 2) 0; 3) угловой коэффициент не определён.

Пример. 1.3.4 Прямая задана уравнением $y = -4x + 3$. Найти угловой коэффициент прямой и величину отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат.

Решение. Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом: $y = kx + b$. Поэтому угловой коэффициент прямой $k = -4$ и величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, $b = 3$.

Ответ: $k = -4$, $b = 3$.

Пример. 1.3.5. Составить уравнение прямой, зная, что её угловой коэффициент равен $\frac{2}{3}$ и величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, равна -1.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$. Получаем: $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Ответ: $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Пример. 1.3.6. Построить прямые, заданные следующими уравнениями:

1) $y = 3x + 4$; 2) $y = -\frac{1}{2}x - 3$; 3) $y = 2x$;

4) $y = 0$; 5) $x = -3$.

Решение. Для построения прямой достаточно знать две её точки. Все прямые, кроме 5), заданы уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. Поэтому для данных прямых известна точка их пересечения с осью ординат: $B(0; b)$. Осталось найти ещё одну точку.

1) Прямая, заданная уравнением $y = 3x + 4$, пересекает ось ординат в точке $B(0; 4)$. Найдём вторую точку. Возьмём, например, $x = -2$. Тогда $y = -2$ и вторая точка прямой $A(-2; -2)$ (рис. 1.3.1).

2) Прямая, заданная уравнением $y = -\frac{1}{2}x - 3$, пересекает ось ординат в точке $B(0; -3)$. Найдём вторую точку. Возьмём, например, $x = -2$. Тогда $y = -2$ и вторая точка прямой $A(-2; -2)$ (рис.1.3.2).

3) Прямая $y = 2x$ задана уравнением вида $y = kx$. Такая прямая всегда проходит через начало координат. Найдём вторую точку. Возьмём, например, $x = 2$. Тогда $y = 4$ и вторая точка прямой $A(2; 4)$ (рис. 1.3.3).

4) Прямая, заданная уравнением $y = 0$, представляет множество точек, ординаты которых равны нулю, то есть прямая совпадает с осью Ox (рис. 1.3.4).

5) Прямая, заданная уравнением $x = -3$, представляет множество точек, абсциссы которых равны -3, то есть прямая параллельна оси Oy (рис. 1.3.5).

Пример. 1.3.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 4)$ и имеющей угловой коэффициент, равный 3.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Получаем: $y - 4 = 3\big(x - (-1)\big)$. После преобразований получаем: $y = 3x + 7$.

Ответ: $y = 3x + 7$.

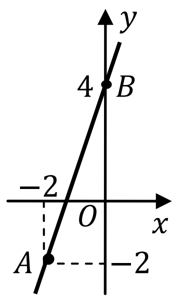

Рис. 1.3.1

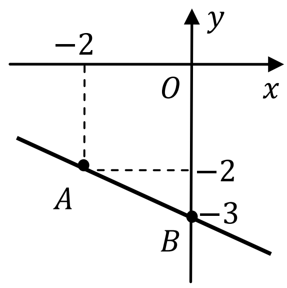

Рис. 1.3.2

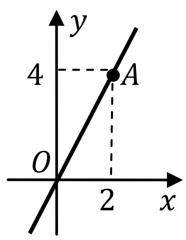

Рис. 1.3.3

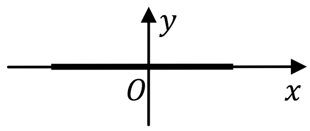

Рис. 1.3.4

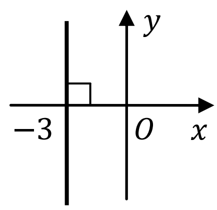

Рис. 1.3.5

Пример. 1.3.8. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-2;3)$ и $M_2(4;1)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Получаем: $\frac{x-(-2)}{4-(-2)}=\frac{y-3}{1-3}$.

Преобразуем к уравнению с угловым коэффициентом:

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

Пример. 1.3.9. Преобразовать данные уравнения к уравнению прямой в отрезках и построить эти прямые:

1) $3x+2y-6=0$; 2) $4x-7y-5=0$; 3) $x-2y=0$.

Решение. Все прямые заданы общим уравнением. Преобразуем данные уравнения к виду $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

1) Перенесём числовое слагаемое в правую часть:

$3x+2y=6$.

Затем разделим уравнение на 6:

$\frac{3x}{6}+\frac{2y}{6}=1$.

Преобразуем:

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

Получили уравнение прямой в отрезках. На оси абсцисс прямая отсекает отрезок, величина которого равна 2, на оси ординат отсекает отрезок, величина которого равна 3 (рис. 1.3.6).

2) Перенесём числовое слагаемое в правую часть:

$4x-7y=5$.

Затем разделим уравнение на 5:

$\frac{4x}{5} - \frac{7y}{5} = 1.$

Разделим числитель и знаменатель первой дроби на 4, второй дроби – на 7 и уберём "минус" перед второй дробью в знаменатель. Получаем:

$\frac{x}{\frac{5}{4}} + \frac{y}{-\frac{5}{7}} = 1.$

Получили уравнение прямой в отрезках. На оси абсцисс прямая отсекает отрезок, величина которого равна $\frac{5}{4}$, на оси ординат отсекает отрезок, величина которого равна $-\frac{5}{7}$ (рис.1.3.7).

3) Уравнение неполное, в нём отсутствует слагаемое C. Поэтому прямая проходит через начало координат и данное уравнение невозможно преобразовать к уравнению прямой в отрезках.

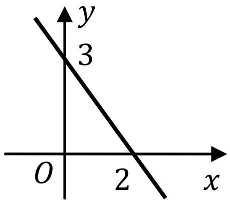

Рис. 1.3.6

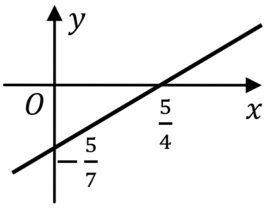

Рис. 1.3.7

Ответ: 1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; 2) $\frac{x}{\frac{5}{4}} + \frac{y}{-\frac{5}{7}} = 1$; 3) данное уравнение невозможно преобразовать к уравнению прямой в отрезках.

<u>Пример. 1.3.10.</u> Найти угол между двумя прямыми $y = 4x - 3$, $y = 2x + 2$;

<u>Решение.</u> Прямые заданы уравнением с угловым коэффициентом. Воспользуемся формулой нахождения угла между двумя прямыми, заданными уравнением с угловым коэффициентом: $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Выпишем угловые коэффициенты прямых: $k_1 = 4$, $k_2 = 2$. Подставляем в формулу: $tg\alpha = \left|\frac{2-4}{1+4\cdot 2}\right| = \left|-\frac{2}{9}\right| = \frac{2}{9}$. Тогда угол между прямыми $\alpha = arctg\frac{2}{9}$.

Ответ: $arctg\frac{2}{9}$.

<u>Пример. 1.3.11.</u> Дана прямая $y = -4x + 3$. Определить угловой коэффициент прямой: а) параллельной данной прямой; б) перпендикулярной данной прямой.

<u>Решение.</u> Данная прямая задана уравнением с угловым коэффициентом. Для данной прямой угловой коэффициент $k = -4$.

а) Угловые коэффициенты параллельных прямых равны, поэтому угловой коэффициент искомой прямой также равен -4.

б) Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны равенством $k' = -\frac{1}{k}$, где k' – искомый угловой коэффициент, k – угловой коэффициент данной прямой. Отсюда $k' = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$.

Ответ: а) -4; б) $\frac{1}{4}$.

Пример. 1.3.12. Найти расстояние от точки $A(3;\ 1)$ до прямой $2x - 2y + 5 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения расстояния от точки до прямой: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Получаем: $d = \frac{|2\cdot 3 - 2\cdot 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Пример. 1.3.13. Найти точку пересечения прямых $5x + 8y - 1 = 0$ и $4x - 3y + 18 = 0$.

Решение. Для нахождения точки пересечения прямых решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 5x + 8y - 1 = 0, \\ 4x - 3y + 18 = 0. \end{cases}$$

Решим систему, например, методом сложения. Умножим первое уравнение на -4, второе уравнение умножим на 5:

$$\begin{cases} -20x - 32y + 4 = 0, \\ 20x - 15y + 90 = 0. \end{cases}$$

Сложим уравнения:

$-47y + 94 = 0.$

Отсюда $y = 2$.

Подставим найденное значение, например, в первое уравнение исходной системы: $5x + 8 \cdot 2 - 1 = 0, \quad x = -3$.

Таким образом, получаем следующую точку пересечения прямых: $(-3;\ 2)$.

Ответ: $(-3;\ 2)$.

3.3. Кривые второго порядка

Справочный материал.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой её центром. Уравнение окружности с центром в начале координат радиуса R имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и называется *каноническим (простейшим) уравнением окружности* (рис. 1.3.8).

Уравнение окружности с центром в точке $C(x_0; y_0)$ радиуса R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

и называется *нормальным уравнением окружности* (рис. 1.3.9).

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Требуется, чтобы эта постоянная была больше расстояния между фокусами.

Точки пересечения эллипса с осями координат, то есть точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ называются *вершинами* эллипса.

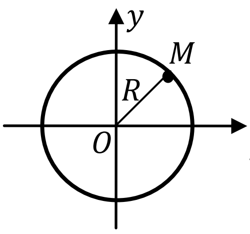

Рис. 1.3.8

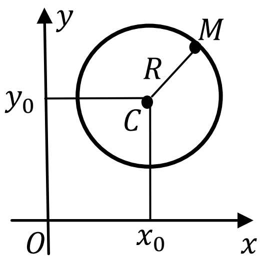

Рис. 1.3.9

Отрезок A_1A_2 длины $2a$ называется *большой осью* эллипса. Отрезок OA_2 длины a называется *большой полуосью* эллипса. Отрезок B_1B_2 длины $2b$ называется *малой осью* эллипса. Отрезок OB_2 длины b называется *малой полуосью* эллипса.

Уравнение эллипса с центром в начале координат, полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и называется *каноническим (простейшим) уравнением эллипса* (рис. 1.3.10).

Расстояние между фокусами эллипса обозначают через $2c$. Поэтому фокусы эллипса с центром в начале координат имеют координаты: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Связь между величинами a, b *и* c *выражается формулой:*

$$a^2-b^2=c^2.$$

Уравнение эллипса с центром в точке $C(x_0;y_0)$, полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

и называется *нормальным уравнением эллипса* (рис. 1.3.11).

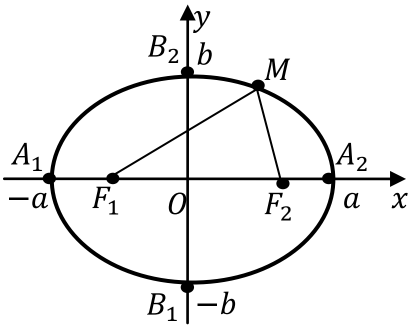

Рис. 1.3.10

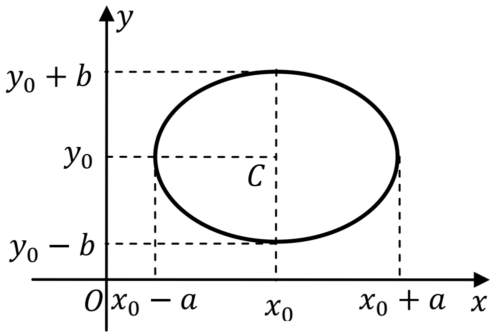

Рис. 1.3.11

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Требуется, чтобы эта постоянная была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля. Указанная разность берётся по абсолютной величине.

Точки пересечения гиперболы с осью Ox, то есть точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ называются *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2 длины $2a$ называется *действительной осью* гиперболы. Отрезок OA_2 длины a называется *действительной полуосью* гиперболы. Отрезок B_1B_2 длины $2b$, соединяющий точки $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;b)$, называется *мнимой осью* гиперболы. Отрезок OB_2 длины b называется *мнимой полуосью* гиперболы. Гипербола не пересекает ось Oy.

Асимптотой называется прямая, расстояние от которой до точек кривой стремится к нулю при стремлении координаты какой-либо точки к ∞ или к $-\infty$. Для гиперболы асимптотами являются прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$.

Уравнение гиперболы с центром в начале координат, полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и называется *каноническим (простейшим) уравнением гиперболы* (рис. 1.3.12).

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

также является каноническим уравнением гиперболы.

В этом случае фокусы гиперболы расположены на оси Oy. Длина её действительной оси равна $2b$ и расположена на оси Oy, длина мнимой оси равна $2a$ и расположена на оси Ox.

Асимптоты этой гиперболы: $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ (рис. 1.3.13).

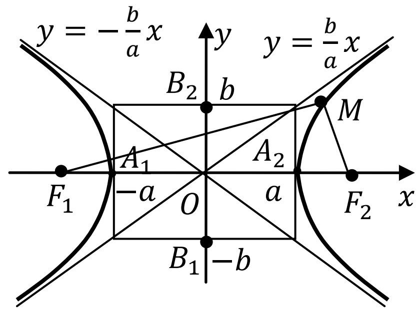

Рис. 1.3.12

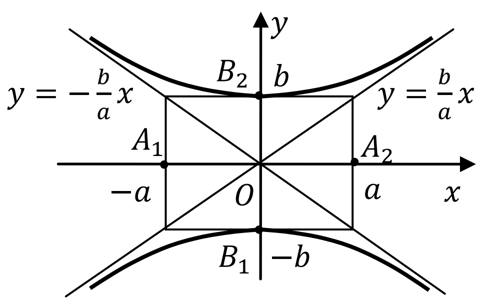

Рис. 1.3.13

Гиперболы, заданные уравнениями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, называются *сопряжёнными*.

Расстояние между фокусами гиперболы обозначают через $2c$. Поэтому фокусы гиперболы с центром в начале координат имеют координаты: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Связь между величинами a, b *и* c *выражается формулой:*

$$a^2+b^2=c^2.$$

Уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0;y_0)$, полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

и называется *нормальным уравнением гиперболы* (рис. 1.3.14).

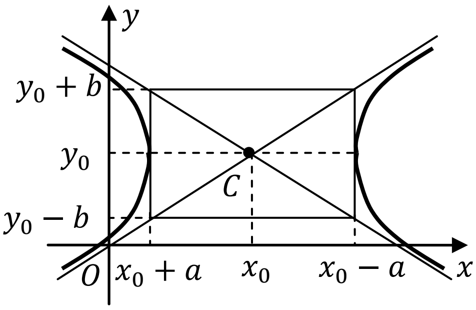

Рис. 1.3.14

Параболой называется множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки F, называемой фокусом, равно расстоянию от этой же точки до фиксированной прямой, называемой директрисой. Расстояние между фокусом и директрисой называется *параметром* параболы и обозначается через p.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, параметром p, ветвями, симметричными относительно оси Ox и направленными вправо, имеет вид:

$$y^2 = 2px.$$

и называется *каноническим (простейшим) уравнением параболы* (рис. 1.3.15). Фокус параболы: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, директриса: $x = -\frac{p}{2}$.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, параметром p, ветвями, симметричными относительно оси Ox и направленными влево, имеет вид:

$$y^2 = -2px.$$

и также называется *каноническим (простейшим) уравнением параболы* (рис. 1.3.16). Фокус параболы: $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, директриса: $x = \frac{p}{2}$.

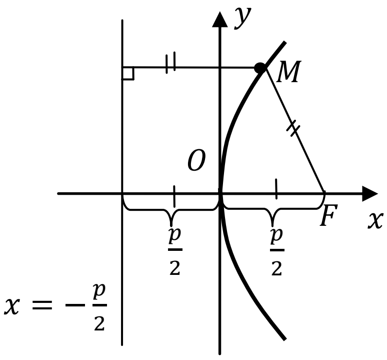

Рис. 1.3.15

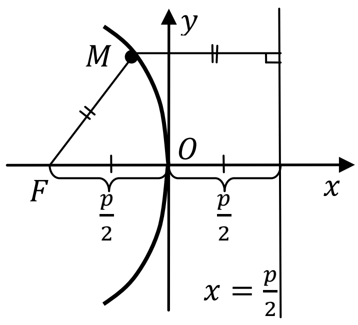

Рис. 1.3.16

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, параметром p, ветвями, симметричными относительно оси Oy и направленными вверх, имеет вид:

$$x^2 = 2py$$

и также называется *каноническим (простейшим) уравнением параболы* (рис. 1.3.17). Фокус параболы: $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, директриса: $y = -\frac{p}{2}$.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, параметром p, ветвями, симметричными относительно оси Oy и направленными вниз, имеет вид:

$$x^2 = -2py.$$

и также называется *каноническим (простейшим) уравнением параболы* (рис. 1.3.18). Фокус параболы: $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, директриса: $y = \frac{p}{2}$.

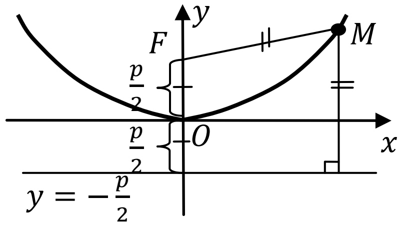

Рис.1. 3.17

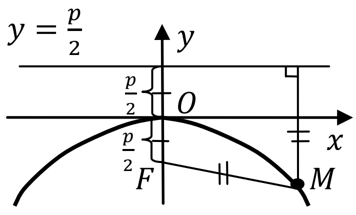

Рис. 1.3.18

Уравнение параболы с вершиной в точке $C(x_0;\, y_0)$, параметром p, ветвями, симметричными относительно прямой $y = y_0$ и направленными вправо, имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

и называется *нормальным уравнением параболы* (рис. 1.3.19).

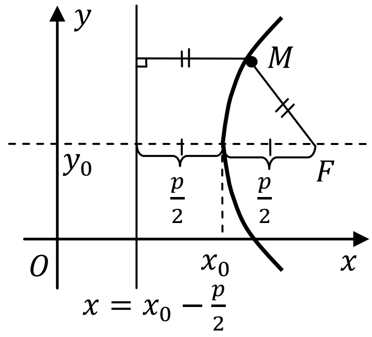

Рис. 1.3.19

Аналогично можно записать остальные нормальные уравнения параболы:

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ – парабола с вершиной в точке $C(x_0;\, y_0)$, параметром p, ветвями, симметричными относительно прямой $y = y_0$ и направленными влево;

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ – парабола с вершиной в точке $C(x_0;\, y_0)$, параметром p, ветвями, симметричными относительно прямой $x = x_0$ и направленными вверх;

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$ – парабола с вершиной в точке $C(x_0;\, y_0)$, параметром p, ветвями, симметричными относительно прямой $x = x_0$ и направленными вниз.

Пример 1.3.14. Составить каноническое или нормальное уравнение окружности с центром в точке C радиуса R:

1) $C(0; 0)$, $R = 2$; 2) $C(-2; 5)$, $R = 6$.

Решение.

1) Воспользуемся каноническим уравнением окружности радиуса R: $x^2+y^2=R^2$. В условиях примера $R=2$. Получаем: $x^2+y^2=2^2$. Преобразуем: $x^2+y^2=4$.

2) Воспользуемся нормальным уравнением окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ радиуса R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. В условиях примера $x_0=-2,\ y_0=5,\ R=6$. Получаем: $\left(x-(-2)\right)^2+(y-5)^2=6^2$. Преобразуем: $(x+2)^2+(y-5)^2=36$.

Ответ: 1) $x^2+y^2=4$; 2) $(x+2)^2+(y-5)^2=36$.

Пример. 1.3.15. Составить каноническое или нормальное уравнение эллипса с центром в точке C, полуосями a и b:

1) $C(0;0)$, $a=4$, $b=3$; 2) $C(-3;0)$, $a=\frac{7}{4}$, $b=\frac{3}{4}$.

Решение.

1) Воспользуемся каноническим уравнением эллипса с полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. В условиях примера $a=4$, $b=3$. Получаем: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. Преобразуем: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

2) Воспользуемся нормальным уравнением эллипса с центром в точке $C(x_0;\ y_0)$ полуосями a и b: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. В условиях примера $x_0=-3$, $y_0=0$, $a=\frac{7}{4}$, $b=\frac{3}{4}$. Получаем: $\frac{\left(x-(-3)\right)^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}+\frac{(y-0)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$. Преобразуем: $\frac{(x+3)^2}{\frac{49}{16}}+\frac{y^2}{\frac{9}{16}}=1$.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{(x+3)^2}{\frac{49}{16}}+\frac{y^2}{\frac{9}{16}}=1$.

Пример 1.3.16. Составить каноническое или нормальное уравнение гиперболы с центром в точке C, полуосями a и b:

1) $C(0;0)$, $a=7$, $b=4$; 2) $C\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3}\right)$, $a=2$, $b=1$.

Решение.

1) Воспользуемся каноническим уравнением гиперболы с полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. В условиях примера $a=7$, $b=4$. Получаем: $\frac{x^2}{7^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$. Преобразуем: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$.

2) Воспользуемся нормальным уравнением гиперболы с центром в точке $C(x_0;\ y_0)$ полуосями a и b: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. В условиях примера $x_0=\frac{8}{3}$, $y_0=\frac{10}{3}$, $a=2$, $b=1$. Получаем: $\frac{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2}{2^2}-\frac{\left(y-\frac{10}{3}\right)^2}{1^2}=1$. Преобразуем: $\frac{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2}{4}-\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=1$.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2}{4}-\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=1$.

Пример 1.3.17. Составить каноническое или нормальное уравнение параболы с вершиной в точке C и параметром p:

1) $C(0;0)$, $p=3$; ветви направлены влево.

2) $C(-2; 4)$, $p = 1$; ветви направлены вверх.

Решение.

1) Воспользуемся каноническим уравнением параболы с ветвями, направленными влево и параметром p: $y^2 = -2px$. В условиях примера $p = 3$. Получаем: $y^2 = -2 \cdot 3 \cdot x$. Преобразуем: $y^2 = -6x$.

2) Воспользуемся нормальным уравнением параболы, с вершиной в точке $C(x_0;\ y_0)$, ветвями, направленными вверх и параметром p: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. В условиях примера $x_0 = -2$, $y_0 = 4$, $p = 1$. Получаем: $\left(x - (-2)\right)^2 = 2 \cdot 1 \cdot (y - 4)$. Преобразуем: $(x + 2)^2 = 2(y - 4)$.

Ответ: 1) $y^2 = -6x$; 2) $(x + 2)^2 = 2(y - 4)$.

<u>Пример. 1.3.18.</u> Дан эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. Найти: 1) полуоси; 2) фокусы.

<u>Решение.</u> Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Исходя из канонического уравнения запишем квадраты полуосей эллипса: $a^2 = 36$, $b^2 = 16$. Отсюда: $a = 6$, $b = 4$

2) Фокусами эллипса являются точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Используем формулу $a^2 - b^2 = c^2$. Отсюда $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Подставляем значения квадратов полуосей: $c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Тогда фокусы эллипса: $F_1\left(-2\sqrt{5}; 0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5}; 0\right)$.

Ответ: 1) $a = 6$, $b = 4$; 2) $F_1\left(-2\sqrt{5}; 0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5}; 0\right)$.

<u>Пример. 1.3.19.</u> Дана гипербола $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$. Найти: 1) полуоси; 2) фокусы.

<u>Решение.</u> Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Исходя из канонического уравнения запишем квадраты полуосей гиперболы: $a^2 = 49$, $b^2 = 32$. Отсюда: $a = 7$, $b = 4\sqrt{2}$.

2) Фокусами гиперболы являются точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Используем формулу $a^2 + b^2 = c^2$. Отсюда $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Подставляем значения квадратов полуосей: $c = \sqrt{49 + 32} = \sqrt{81} = 9$. Тогда фокусы гиперболы: $F_1(-9; 0)$, $F_2(9; 0)$.

Ответ: 1) $a = 7$, $b = 4\sqrt{2}$; 2) $F_1(-9; 0)$, $F_2(9; 0)$.

<u>Пример. 1.3.20.</u> Построить кривую второго порядка по её уравнению: 1) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{18} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Решение.

1) Кривая является эллипсом, центр которого находится в начале координат, полуоси $a = 7$, $b = 3\sqrt{2}$ (рис. 1.3.20).

2) Кривая является гиперболой, центр которой находится в начале координат, полуоси $a = 3$, $b = 2$ (рис. 1.3.21).

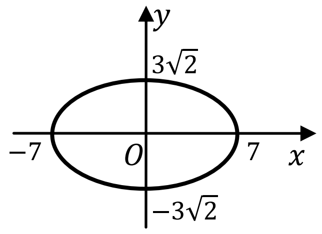

Рис. 1.3.20

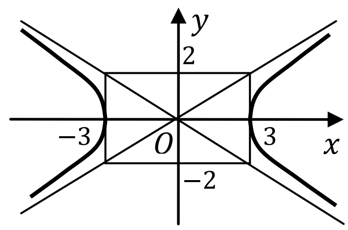

Рис. 1.3.21

3.4. Векторы

Справочный материал.

Вектором называется направленный отрезок. Используется обозначение: $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$, где точка A – начало вектора, точка B – конец вектора. Геометрически вектор изображается в виде луча (рис. 1.3.22).

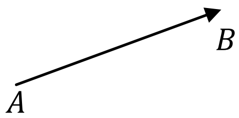

Рис. 1.3.22

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат. Рассмотрим произвольный вектор $\bar{a}$. Пусть a_x – проекция вектора $\bar{a}$ на ось Ox; a_y – проекция вектора $\bar{a}$ на ось Oy; a_z – проекция вектора $\bar{a}$ на ось Oz. Проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат называют его *координатами* и записывают: $\bar{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$.

Пусть даны две точки: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. *Координаты вектора* $\bar{a} = \overline{AB}$ определяются по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1.$$

Модуль вектора $\bar{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ находят по формуле:

$$|\bar{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.$$

Угол, который образует вектор $\bar{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ с осью Ox, обозначим через α, с осью Oy – обозначим через β, с осью Oz – обозначим через γ. Косинусы этих углов: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\bar{a}$. Направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ находят по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Ортами координатных осей называют тройку векторов $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) вектор $\bar{\imath}$ лежит на оси Ox, вектор $\bar{\jmath}$ лежит на оси Oy, вектор $\bar{k}$ лежит на оси Oz;

2) каждый из векторов $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ направлен на своей оси в положительную сторону;

3) векторы $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ – единичные, то есть $|\bar{\imath}| = |\bar{\jmath}| = |\bar{k}| = 1$ (рис. 1.3.23).

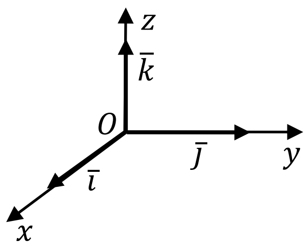

Рис. 1.3.23

Вектор $\bar{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ можно выразить через векторы $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ при помощи линейных операций:

$$\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}.$$

Эту формулу называют *разложением вектора по ортам координатных осей*.

Пусть даны два вектора: $\bar{a} = (a_x;\ a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$.

При сложении двух векторов их соответствующие координаты складывают:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z).$$

При вычитании двух векторов их соответствующие координаты вычитают:

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z).$$

При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число:

$$\alpha\bar{a} = (\alpha a_x;\ \alpha a_y;\ \alpha a_z).$$

Скалярным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Используется обозначение: $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или $(\bar{a}, \bar{b})$.

Скалярное произведение векторов $\bar{a} = (a_x;\ a_y; a_z)$ и $\bar{b} =$ $= (b_x;\ b_y;\ b_z)$ находят по формуле:

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$; это условие можно интерпретировать как перпендикулярность вектора $\bar{c}$ плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 1.3.24);

2) модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, то есть $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 1.3.25);

3) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку векторов*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 1.3.26), и *левую*, если виден совершающимся по часовой стрелке (рис. 1.3.27).

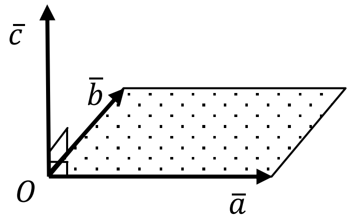

Рис. 1.3.24

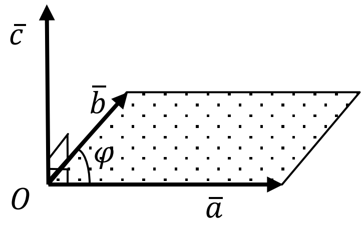

Рис. 1.3.25

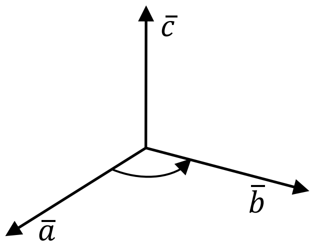

Рис. 1.3.26

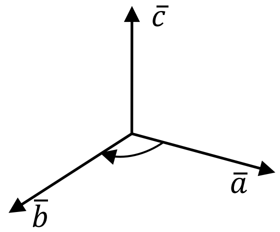

Рис. 1.3.27

Используется обозначение: $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Векторное произведение векторов $\bar{a} = (a_x;\ a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ находят по формуле:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Это произведение называют также векторно-скалярным произведением трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Используется обозначение: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Смешанное произведение векторов $\bar{a} = (a_x;\ a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, $\bar{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z)$ находят по формуле:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 1.3.21. В пространстве даны точки $A(-8; 3;\ -2)$ и $B(2; -3; 4)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$.

Решение. По условию даны координаты начала и конца вектора $\overline{AB}$. Для нахождения координат вектора $\overline{AB}$ из координат конца вектора вычитаем координаты его начала. Получаем:

$\overline{AB} = (2 - (-8); -3 - 3; 4 - (-2)) = (10; -6;\ 6)$.

Ответ: $\overline{AB} = (10; -6;\ 6)$.

Пример 1.3.22. Даны точки $A(1; -1; 2)$ и $B(3; 2; 4)$. Найти модуль вектора $\overline{AB}$.

Решение. Предварительно найдём координаты вектора $\overline{AB}$, учитывая, что при нахождении координат вектора нужно из координат конца вектора вычесть координаты его начала:

$\overline{AB} = (3-1; 2-(-1); 4-2) = (2; 3; 2)$.

Далее воспользуемся формулой нахождения модуля вектора: $|\bar{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$. Находим модуль вектора $\overline{AB}$:

$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$.

Ответ: $\sqrt{17}$.

Пример 1.3.23. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (-2; 3;\ 6)$.

Решение. Воспользуемся формулами нахождения направляющих косинусов вектора: $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$.

Сначала вычислим модуль вектора $\bar{a}$:

$|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = 7$.

Тогда направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$\cos\alpha = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

Пример 1.3.24. Заданы два векторы $\bar{a} = (5;\ -3;\ -1)$ и $\bar{b} = (6;\ -4; 2)$. Найти координаты следующих векторов: 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $-2\bar{a}$; 4) $\frac{1}{2}\bar{b}$; 5) $4\bar{a} - 3\bar{b}$.

Решение.

1) Учитывая, что при сложении векторов соответствующие координаты складывают, получаем:

$\bar{a} + \bar{b} = (5+6;\ -3+(-4);\ -1+2) = (11;\ -7; 1)$.

2) Учитывая, что при вычитании векторов соответствующие координаты вычитают, получаем:

$\bar{a} - \bar{b} = (5-6;\ -3-(-4);\ -1-2) = (-1;\ 1; -3)$.

3) Учитывая, что при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, получаем:

$-2\bar{a} = \left(-2\cdot 5;\ -2\cdot(-3); -2\cdot(-1)\right) = (-10; 6; 2)$.

4) Учитывая, что при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, получаем:

$\frac{1}{2}\bar{b} = \left(\frac{1}{2}\cdot 6;\ \frac{1}{2}\cdot(-4);\ \frac{1}{2}\cdot 2\right) = (3; -2; 1)$.

5) Найдём сначала координаты векторов $4\bar{a}$ и $3\bar{b}$, учитывая, что при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число:

$4\bar{a} = \left(4\cdot 5;\ 4\cdot(-3);\ 4\cdot(-1)\right) = (20; -12; -4)$,

$3\bar{b} = (3\cdot 6; 3\cdot(-4); 3\cdot 2) = (18; -12; 6)$.

Далее найдём координаты искомого вектора, учитывая, что при вычитании векторов соответствующие координаты вычитают:

$4\bar{a} - 3\bar{b} = (20-18; -12-(-12); -4-6) = (2; 0;\ -10)$.

Ответ: 1) $(11;\ -7; 1)$; 2) $(-1;\ 1; -3)$; 3) $(-10; 6; 2)$; 4) $(3; -2; 1)$;

5) $(2; 0; -10)$.

Пример 1.3.25. Записать разложение вектора $\bar{a} = (-3; 2; 1)$ по ортам координатных осей.

Решение. Воспользуемся формулой разложения вектора по ортам координатных осей: $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}$. Получаем: $\bar{a} = -3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$.

Ответ: $\bar{a} = -3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$.

Пример 1.3.26. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = (-1; 6; 3)$ и $\bar{b} = (4; 2; 2)$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения скалярного произведения векторов через их координаты: $\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. Получаем: $\bar{a}\bar{b} = -1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 14$.

Ответ: 14.

Пример 1.3.27. Даны векторы $\bar{a} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 5\bar{k}$. Найти их векторное произведение.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения векторного произведения векторов через координаты перемножаемых векторов:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Получаем:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} - 2\bar{k}.$$

Определитель раскрыт разложением по первой строке.

Ответ: $11\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} - 2\bar{k}$.

Пример 1.3.28. Даны векторы $\bar{a} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - 4\bar{k}$, $\bar{b} = 7\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 3\bar{k}$ и $\bar{c} = 9\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - \bar{k}$. Найти их смешанное произведение.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения смешанного произведения векторов через координаты перемножаемых векторов:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Получаем:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -61.$$

Ответ: -61.

Упражнения

1. Найти расстояние между точками $A(-3; 2)$ и $B(1; 6)$.

2. Найти координаты середины отрезка, расположенного между точками $M_1(1; 2)$ и $M_2(3; -8)$.

3. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:

1) $M_1(1; -7)$ и $M_2(5; 4)$; 2) $M_1(2; -4)$ и $M_2(2; 3)$;

3) $M_1(-3;\ 4)$ и $M_2(1;\ 4)$.

4. Составить уравнение прямой, зная, что её угловой коэффициент равен $\frac{8}{3}$ и величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, равна $-\frac{1}{3}$.

5. Построить прямые, заданные следующими уравнениями:

1) $y = -4x - 5$; 2) $y = \frac{1}{3}x$; 3) $x = -4$; 4) $y = 2$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;\ 3)$ и имеющей угловой коэффициент равный 2.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-4; 2)$ и $M_2(3; -1)$.

8. Преобразовать данные уравнения к уравнению прямой в отрезках и построить эти прямые:

1) $4x - 3y - 12 = 0$; 2) $3x - 5y = 0$; 3) $x + 2y - 1 = 0$.

9. Найти угол между прямыми $y = 4x + 8$ и $y = -3x - 1$.

10. Дана прямая $y = 5x - 3$. Определить угловой коэффициент прямой: а) параллельной данной прямой; б) перпендикулярной данной прямой.

11. Найти расстояние от точки $A(2;\ -1)$ до прямой $3x - 4y + 3 = 0$.

12. Найти точку пересечения прямых $4x - 3y + 2 = 0$, $2x + 5y - 12 = 0$.

13. Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Дойдя до оси абсцисс, луч от неё отразился. Определить точку встречи луча с осью и уравнение отражённого луча. *Указание.* Угол падения равен углу отражения.

14. Составить каноническое или нормальное уравнение окружности с центром в точке C радиуса R: 1) $C(0; 0)$, $R = 4$; 2) $C(2; -3)$, $R = \frac{8}{5}$.

15. Составить каноническое или нормальное уравнение эллипса с центром в точке C, полуосями a и b: 1) $C(0; 0)$, $a = 5$, $b = 3$; 2) $C(-1; 2)$, $a = 5$, $b = 4$.

16. Составить каноническое или нормальное уравнение гиперболы с центром в точке C, полуосями a и b: 1) $C(0; 0)$, $a = 3$, $b = 2$; 2) $C(3; -6)$, $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$.

17. Составить каноническое или нормальное уравнение параболы с вершиной в точке C и параметром p:

1) $C(0; 0)$, $p = \frac{3}{7}$; ветви направлены вправо.

2) $C\left(-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $p = 3$; ветви направлены вверх.

18. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти: 1) полуоси; 2) фокусы.

19. Дана гипербола $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. Найти: 1) полуоси; 2) фокусы.

20. Построить кривую второго порядка по её каноническому уравнению: 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $y^2 = 4x$; 3) $x^2 + y^2 = 9$; 4) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

21. Поперечный разрез зеркала прожектора имеет форму параболы. Определить положение фокуса, если диаметр зеркала 60 см, а глубина 30 см.

22. Даны точки $A(-5; 6; -1)$ и $B(2; 3; 4)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$.

23. Вычислить модуль вектора $\bar{a} = (2; 6; -3)$.

24. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (11; -2; -10)$.

25. Заданы векторы $\bar{a} = (-1; 4; 3)$ и $\bar{b} = (3; 2; 1)$. Найти координаты следующих векторов: 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $2\bar{a}$; 4) $3\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

26. Записать разложение вектора $\bar{a} = (5; 1; -3)$ по ортам координатных осей.

27. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = (2; -3; 4)$ и $\bar{b} = (5; 1; 7)$.

28. Какую работу производит сила $\bar{F} = (9; 6; 4)$, когда точка её приложения перемещается из точки $A(-3; 4; 6)$ в точку $B(2; 7; -5)$? *Указание.* Работа силы $\bar{F}$, когда точка, на которую действует сила, совершила перемещение $\overline{AB} = \bar{s}$, равна скалярному произведению вектора силы $\bar{F}$ на вектор перемещения $\bar{s}$: $A = \bar{F} \cdot \bar{s}$.

29. Даны векторы $\bar{a} = (-2; 2; 1)$ и $\bar{b} = (3; 1; 2)$. Найти их векторное произведение.

30. Даны векторы $\bar{a} = (1; 5; 2)$, $\bar{b} = (2; 3; 2)$, $\bar{c} = (6; -1; 4)$. Найти их смешанное произведение.

Второй уровень сложности

3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

<u>Справочный материал.</u>

Координаты точки $M(x; y)$, которая делит отрезок между точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ *в заданном отношении* λ, находят по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Площадь треугольника с вершинами в точках $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3)$ находят по формуле:

$$\pm S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

или

$$\pm S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Условием расположения трёх точек $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ *и* $M_3(x_3;\ y_3)$ *на одной прямой* является равенство:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}.$$

<u>Пример 2.3.1.</u> Даны две точки $M_1(2;\ 5)$ и $M_2(3;\ -7)$. Найти координаты точки M, которая делит отрезок $\overline{M_1 M_2}$ в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$.

Решение. Воспользуемся формулами нахождения координат точки, которая делит отрезок в заданном отношении: $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Получаем: $x = \frac{2+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$; $y = \frac{5+\frac{1}{3}\cdot(-7)}{1+\frac{1}{3}} = 2$.

Ответ: $M\left(\frac{9}{4}; 2\right)$.

Пример 2.3.2. Даны три точки $M_1(-5;\ -2)$, $M_2(-1;\ 4)$ и $M_3(3;\ 2)$. Найти площадь треугольника $M_1M_2M_3$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения площади треугольника через координаты его вершин: $\pm S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$. Получаем:

$$\pm S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1-(-5) & 4-(-2) \\ 3-(-5) & 2-(-2) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -16.$$

Отсюда $S_{\Delta M_1M_2M_3} = 16$.

Ответ: 16.

Пример 2.3.3. Выяснить, лежат ли точки $M_1(-1;\ -9)$, $M_2(2;\ -3)$ и $M_3(6;\ 5)$ на одной прямой.

Решение. Воспользуемся условием, при котором три точки лежат на одной прямой: $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$. Получаем: $\frac{2-(-1)}{6-(-1)} = \frac{-3-(-9)}{5-(-9)}$. Отсюда: $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$. То есть $\frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ и точки лежат на одной прямой.

Ответ: Точки лежат на одной прямой.

3.2. Прямая линия на плоскости

Справочный материал.

Острый угол между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ находят по формуле:

$$tg\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|.$$

Равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

является *условием параллельности прямых*.

Равенство

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

является *условием перпендикулярности прямых*.

Пример. 2.3.4. Преобразовать уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = -\frac{4}{3}x + 2$ к общему уравнению.

Решение. Преобразуем данное уравнение к общему уравнению прямой $Ax + By + C = 0$. Умножим данное уравнение на 3. Получаем: $3y = -4x + 6$. Затем перенесём все слагаемые в левую часть: $4x + 3y - 6 = 0$.

Ответ: $4x + 3y - 6 = 0$.

Пример. 2.3.5. Преобразовать общее уравнение прямой $6x + 3y - 7 = 0$ к уравнению прямой с угловым коэффициентом.

Решение. Преобразуем данное уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Выразим из уравнения y. Для этого слагаемое $3y$ оставим в левой части, остальные слагаемые перенесём в правую часть: $3y = -6x + 7$. Далее, разделив уравнение на 3, получаем: $y =$
$= -2x + \frac{7}{3}$.

Ответ: $y = -2x + \frac{7}{3}$.

Пример. 2.3.6. Построить прямые, заданные следующими уравнениями: 1) $5x - 3y + 2 = 0$; 2) $3x + 4y = 0$; 3) $3x - 5 = 0$.

Решение. Все прямые заданы общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Для построения прямой достаточно знать две её точки. Для этого зададим, например, переменной x числовое значение и вычислим соответствующее значение переменной y. Или, можно, наоборот, задать переменной y числовое значение и вычислить соответствующее значение переменной x.

1) Зададим $x = 0$, тогда $y = \frac{2}{3}$. Получаем точку прямой $A\left(0; \frac{2}{3}\right)$. Затем, зададим $y = 0$, тогда $x = -\frac{2}{5}$. Получаем вторую точку прямой $B\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$. Через точки A и B проводим прямую (рис. 2.3.1).

2) В уравнении отсутствует числовое слагаемое C, поэтому прямая проходит через начало координат. Зададим $x = 2$, тогда $y = -\frac{3}{2}$. Получаем точку прямой $A\left(2; -\frac{3}{2}\right)$. Через точки O и A проводим прямую (рис. 2.3.2).

3) В уравнении отсутствует числовое слагаемое B, поэтому прямая параллельна оси Oy. Выразим из уравнения x: $x = \frac{5}{3}$. Прямая пересекает ось Ox в точке $A\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ (рис. 2.3.3).

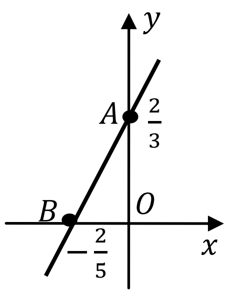

Рис. 2.3.1

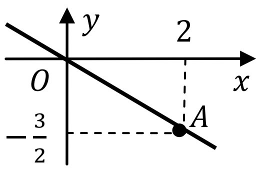

Рис. 2.3.2

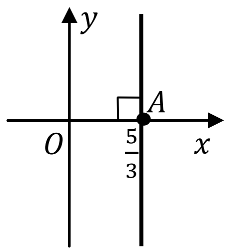

Рис. 2.3.3

Пример. 2.3.7. Найти угол между двумя прямыми:
1) $x - 3y + 6 = 0$, $4x + 4y - 7 = 0$;
2) $6x - 7y - 2 = 0$, $7x + 6y + 5 = 0$

Решение. Прямые заданы общим уравнением прямой. Поэтому угол между прямыми можно найти двумя способами. *Первый способ:* преобразовать каждое уравнение к уравнению с угловым коэффициентом и воспользоваться формулой угла между двумя прямыми, заданными уравнением с угловым коэффициентом. *Второй способ.* Воспользоваться формулой угла между двумя прямыми, заданными общим уравнением.

1) *Первый способ.* Преобразуем каждое уравнение к уравнению с угловым коэффициентом: $y = \frac{1}{3}x + 2$ и $y = -x + \frac{7}{4}$. Выпишем угловые коэффициенты прямых: $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -1$. Найдём угол между прямыми: $tg\alpha =$ $= \left|\frac{-1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\cdot(-1)}\right| = \left|\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\right| = 2$. Тогда угол между прямыми $\alpha = arctg2$.

Второй способ. Подставляя значения коэффициентов общего уравнения в формулу угла между двумя прямыми, получаем: $tg\alpha =$ $= \left|\frac{1\cdot 4-4\cdot(-3)}{1\cdot 4+(-3)\cdot 4}\right| = \left|\frac{16}{-8}\right| = 2$. Тогда угол между прямыми $\alpha = arctg2$.

2) *Первый способ.* Преобразуем каждое уравнение к уравнению с угловым коэффициентом: $y = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}$ и $y = -\frac{7}{6}x - \frac{5}{6}$. Выпишем угловые коэффициенты прямых: $k_1 = \frac{6}{7}$, $k_2 = -\frac{7}{6}$. Так как $1 + k_1 \cdot k_2 = 1 + \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) =$ $= 1 - 1 = 0$, то $tg\alpha$ не существует и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Второй способ. Так как $A_1A_2 + B_1B_2 = 6 \cdot 7 + (-7) \cdot 6 = 0$, то $tg\alpha$ не существует и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1) $\alpha = arctg2$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

<u>Пример. 2.3.8.</u> Дана прямая $7x + 2y - 5 = 0$. Определить угловой коэффициент прямой: а) параллельной данной прямой; б) перпендикулярной данной прямой.

<u>Решение.</u> Данная прямая задана общим уравнением. Преобразуем его к уравнению прямой с угловым коэффициентом: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$. Угловой коэффициент прямой $k = -\frac{7}{2}$.

а) Угловые коэффициенты параллельных прямых равны, поэтому угловой коэффициент искомой прямой также равен $-\frac{7}{2}$.

б) Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны равенством $k' = -\frac{1}{k}$, где k' – угловой коэффициент искомой прямой, k – угловой коэффициент данной прямой. Отсюда $k' = -\frac{1}{-\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$.

Ответ: а) $-\frac{7}{2}$; б) $\frac{2}{7}$.

<u>Пример. 2.3.9.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-5;\ 2)$ перпендикулярно прямой $4x - y + 3 = 0$.

<u>Решение.</u> Обозначим через k угловой коэффициент данной прямой, через k' обозначим угловой коэффициент искомой прямой. Так как искомая и данная прямые перпендикулярны, то $k' = -\frac{1}{k}$. Найдём угловой коэффициент данной прямой. Данная прямая задана общим уравнением. Преобразуем его к уравнению прямой с угловым коэффициентом: $y = 4x + 3$. Таким образом, угловой коэффициент данной прямой $k = 4$ и угловой коэффициент искомой прямой $k' = -\frac{1}{4}$.

Далее воспользуемся уравнением прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку: $y - y_0 = k'(x - x_0)$, где

$(x_0;\ y_0)$ – данная точка; в условиях примера – это точка $M(-5;\ 2)$; k' – угловой коэффициент; выше было найдено, что $k' = -\frac{1}{4}$.

Подставляем данные:

$y - 2 = -\frac{1}{4}\big(x - (-5)\big)$, $\quad 4(y-2) = -(x+5)$, $\qquad x + 4y - 3 = 0$.

Ответ: $x + 4y - 3 = 0$.

3.3. Кривые второго порядка

<u>Справочный материал.</u>

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большой оси. Эксцентриситет находят по формуле:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{e}$ от него, называются *директрисами* эллипса. *Уравнения директрис* имеют вид:

$$x = \pm\frac{a}{e}.$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к расстоянию между её вершинами. Эксцентриситет находят по формуле:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Две прямые, перпендикулярные к той оси гиперболы, которая её пересекает, и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{e}$ от него, называются *директрисами* гиперболы. *Уравнения директрис* имеют вид:

$$x = \pm\frac{a}{e}.$$

Уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в её точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид:

$$x_0x + y_0y = R^2.$$

Уравнение касательной к окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ в её точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2.$$

Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в его точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в её точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в её точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид:

$$y_0y = p(x + x_0).$$

<u>Пример. 2.3.10.</u> Дан эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Найти: 1) эксцентриситет;

2) уравнения директрис.

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Для нахождения эксцентриситета воспользуемся формулой $e=\frac{c}{a}$. Предварительно найдём $a,\ b$ и c. Исходя из канонического уравнения эллипса запишем квадраты полуосей эллипса: $a^2=36,\ b^2=20$. Отсюда: $a=6,\ b=2\sqrt{5}$. Далее воспользуемся формулой: $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Подставляем значения квадратов полуосей: $c=\sqrt{36-20}=\sqrt{16}=4$. Подставляем числовые значения в формулу эксцентриситета: $e=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

2) Уравнения директрис имеют вид: $x=\pm\frac{a}{e}$. Подставляем числовые значения: $x=\pm\frac{6}{\frac{2}{3}}=\pm9$.

Ответ: 1) $e=\frac{2}{3}$; 2) $x=\pm9$.

Пример. 2.3.11. Дана гипербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Найти: 1) эксцентриситет; 2) уравнения директрис; 3) уравнения асимптот.

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Для нахождения эксцентриситета воспользуемся формулой $e=\frac{c}{a}$. Предварительно найдём $a,\ b$ и c. Исходя из канонического уравнения гиперболы запишем квадраты полуосей гиперболы: $a^2=16,\ b^2=9$. Отсюда: $a=4,\ b=3$. Далее воспользуемся формулой: $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Подставляем значения квадратов полуосей: $c=\sqrt{16+9}=5$. Подставляем числовые значения в формулу эксцентриситета: $e=\frac{5}{4}$.

2) Уравнения директрис имеют вид: $x=\pm\frac{a}{e}$. Подставляем числовые значения: $x=\pm\frac{4}{\frac{5}{4}}=\pm\frac{16}{5}$.

3) Уравнения асимптот имеют вид: $y=\pm\frac{b}{a}x$. Подставляем числовые значения: $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Ответ: 1) $e=\frac{5}{4}$; 2) $x=\pm\frac{16}{5}$; 3) $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Пример 2.3.12. Составить уравнение касательной к кривой второго порядка в её точке A: 1) $x^2+y^2=13,\ A(3;-2)$; 2) $y^2=4x,\ A(1;2)$.

Решение.

1) По условию дана окружность с центром в начале координат, квадрат радиуса которой $R^2=13$, точка $A(3;-2)$ лежит на этой окружности. Воспользуемся уравнением касательной к окружности в её точке $M_0(x_0;\ y_0)$ с центром в начале координат радиуса R: $x_0x+y_0y=R^2$. Получаем: $3x-2y=13$. Преобразуем: $3x-2y-13=0$.

2) По условию дана парабола с вершиной в начале координат, параметром $p=2$ и ветвями, направленными вправо. Точка $A(3;6)$ лежит на этой параболе. Воспользуемся уравнением касательной к параболе в её точ-

ке $M_0(x_0;\ y_0)$ с вершиной в начале координат, параметром p и ветвями, направленными вправо: $y_0 y = p(x + x_0)$. Получаем: $2y = 2(x + 1)$. Преобразуем: $x - y + 1 = 0$.

Ответ: 1) $3x - 2y - 13 = 0$; 2) $x - y + 1 = 0$.

3.4. Векторы

Справочный материал.

Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Проекцию вектора на ось другого вектора находят по формуле:

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, находят по формуле:

$$S_{\text{парал.}} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, находят по формуле:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, находят по формуле:

$$V_{\text{парал.}} = \left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|.$$

Объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, находят по формуле:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|.$$

Пример 2.3.13. Даны вершины треугольника $A(-4;1;5)$, $B(-3;-1;7)$, $C(2;3;8)$. Определить его внутренний угол при вершине A.

Решение. Угол при вершине A будем рассматривать как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 2.3.4).

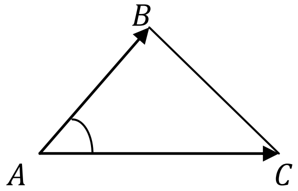

Рис. 2.3.4

Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла между векторами: $\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$. В условиях примера $\cos A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}$. Предварительно найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (1;-2;2)$, $\overline{AC} = (6;2;3)$.

Найдём скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ через их координаты:

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot 6 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8.$

Далее найдём модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ через их координаты:

$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, $|\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$.

Тогда косинус угла между векторами:

$\cos A = \frac{8}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$.

Отсюда угол между векторами: $\angle A = arccos\frac{8}{21}$.

Ответ: $\angle A = arccos\frac{8}{21}$.

Пример 2.3.14. Даны точки $A(-2; 4; 7)$, $B(-1; 1; 8)$, $C(-5; 7; -6)$, $D(7; -9; 9)$. Найти $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения проекции вектора на ось другого вектора: $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}$. В условиях примера $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{CD}|}$.

Предварительно найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$\overline{AB} = (1; -3; 1)$, $\overline{CD} = (12; -16; 15)$.

Найдём модуль вектора $\overline{CD}$:

$|\overline{CD}| = \sqrt{12^2 + (-16)^2 + 15^2} = 25$.

Найдём скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 1 \cdot 12 + (-3) \cdot (-16) + 1 \cdot 15 = 75$.

Тогда проекция вектора $\overline{AB}$ на ось вектора $\overline{CD}$:

$\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB} = \frac{75}{25} = 3$.

Ответ: 3.

Пример 2.3.15. Даны точки $A(-1; 2; 3)$, $B(1; -4; 5)$, $C(3; 0; 1)$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, на которых построен треугольник (рис. 2.3.5).

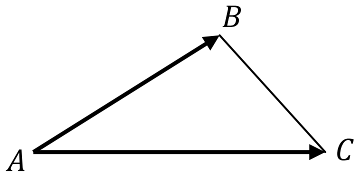

Рис. 2.3.5.

Воспользуемся формулой нахождения площади треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$. В условиях примера $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (2; -6; 2)$, $\overline{AC} = (4; -2; -2)$.

Далее найдём векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 16\bar{\imath} + 12\bar{\jmath} + 20\bar{k}.$$

Тогда площадь треугольника:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 12^2 + 20^2} = \frac{1}{2}\sqrt{800} = 10\sqrt{2}.$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

<u>Пример 2.3.16.</u> Даны точки $A(-2; 1; 1)$, $B(-1; 3; -4)$, $C(2; 4; 2)$ и $D(3; 1; 0)$. Найти объём пирамиды $ABCD$.

<u>Решение.</u> Рассмотрим векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, на которых построена пирамида (рис. 2.3.6).

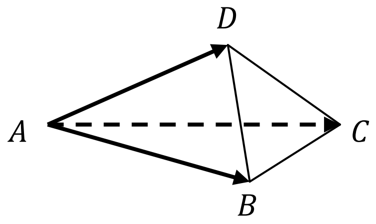

Рис. 2.3.6

Воспользуемся формулой нахождения объёма пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$. В условиях примера $V_{\text{пир.}} =$
$= \frac{1}{6}|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}|$.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = (1; 2; -5)$, $\overline{AC} = (4; 3; 1)$, $\overline{AD} = (5; 0; -1)$.

Далее находим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 90.$$

Тогда объём пирамиды:

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 90 = 15.$

Ответ: $V_{\text{пир.}} = 15$.

Упражнения

1. Вычислить периметр треугольника по координатам его вершин $A(-6;\ 5)$, $B(-3; 1)$ и $C(2;\ -11)$.

2. Даны вершины треугольника $A(-4; 3)$, $B(-1;\ 0)$, $C(5; 2)$. Определить длину его медианы, проведённой из вершины A.

3. Даны две точки $M_1(-4; 9)$ и $M_2(-1; 3)$. Найти координаты точки M, которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$.

4. Однородная пластинка имеет форму квадрата со стороной, равной 12, в которой сделан квадратный вырез, прямые разреза проходят через центр квадрата, оси координат направлены по рёбрам пластинки. Определить центр масс этой пластинки. <u>*Указание.*</u> Если однородную пластину разбить на две части и найти центр масс каждой из них, то центр масс исходной пластины находится в точке, которая делит расстояние между центрами масс каждой из частей в отношении, обратном отношению их площадей. Центр масс прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей.

5. Даны три точки $M_1(-5;\ 2)$, $M_2(-1;\ 4)$ и $M_3(2;\ -3)$. Найти площадь треугольника $M_1M_2M_3$.

6. На плоскости даны три точки $A(-2;\ -1)$, $B(3;2)$, $C(5;6)$. Выяснить, лежат ли они на одной прямой.

7. Преобразовать уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = -4x + 3$ к общему уравнению.

8. Преобразовать общее уравнение прямой $3x + 7y - 9 = 0$ к уравнение прямой с угловым коэффициентом.

9. Построить прямые, заданные следующими уравнениями:

1) $2x + 4y - 7 = 0$; 2) $5x - 9y = 0$; 3) $2y + 3 = 0$.

10. Найти угол между прямыми $7x + 9y - 1 = 0$ и $3x - 4y - 6 = 0$.

11. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Определить угловой коэффициент прямой: а) параллельной данной прямой; б) перпендикулярной данной прямой.

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;\ -1)$ параллельно прямой $5x - 2y + 1 = 0$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4;\ 2)$ перпендикулярно прямой $3x + 5y - 7 = 0$.

14. Даны вершины треугольника $A(-5;2)$, $B(-3;6)$, $C(7;\ -4\ )$. Составить уравнение медианы, проведённой из вершины B.

15. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Найти: 1) эксцентриситет; 2) уравнения директрис.

16. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$. Найти: 1) эксцентриситет; 2) уравнения директрис; 3) уравнения асимптот.

17. Составить уравнение касательной к кривой второго порядка в её точке A: 1) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $A(-5;7)$; 2) $4x^2 - 3y^2 = 52$, $A(5;4)$.

18. Даны вершины треугольника $A(-5;2;-1)$, $B(-3;3;1)$, $C(0;6;2)$. Определить его внутренний угол при вершине A.

19. Даны точки $A(2;4;7)$, $B(6;3;5)$, $C(1;-2;0)$, $D(7;1;-2)$. Найти $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

20. Даны точки $A(-1;4;5)$, $B(0;1;4)$, $C(2;3;6)$. Найти площадь треугольника ABC.

21. Даны точки $A(-3;2;0)$, $B(-1;4;3)$, $C(2;0;1)$ и $D(4;-2;-1)$. Найти объём пирамиды $ABCD$.

Третий уровень сложности

3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Справочный материал.

Полярная система координат определяется полюсом и полярной осью. Полюс – это неподвижная точка, полярная ось – это луч, выходящий из полюса и вращающийся вокруг него. Полюс обозначают буквой O, полярную ось – буквой ρ (рис. 3.3.1).

В полярной системе координат точка определяется двумя координатами: φ – угол поворота полярной оси и ρ – расстояние от полюса до точки.

Обозначение: $M(\rho; \varphi)$. Число ρ называется *полярным радиусом*, число φ называется *полярным углом*. Для построения точки в полярной системе координат полярную ось поворачивают на угол φ и на полученном луче находят точку, расстояние от которой до полюса равно ρ (рис. 3.3.2).

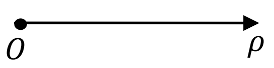

Рис. 3.3.1

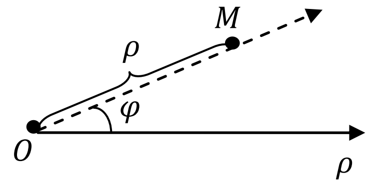

Рис. 3.3.2

Связь между прямоугольными координатами x, y точки и её *полярными координатами* ρ, φ выражается формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

<u>Пример 3.3.1.</u> Построить в полярной системе координат точку $M\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$.

<u>Решение.</u> Повернём полярную ось вокруг полюса на угол $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ и на полученном луче отложим от полюса отрезок длины 2. Получим точку M (рис. 3.3.3).

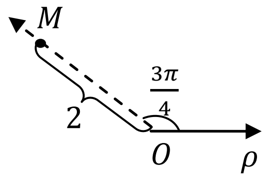

Рис. 3.3.3

<u>Пример 3.3.2.</u> В полярной системе координат дана точка $A\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$. Найти прямоугольные координаты этой точки при условии, что ось абсцисс совпадает с полярной осью, начало координат совпадает с полюсом.

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулами, связывающими прямоугольные координаты с полярными: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Получаем:

$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$.

Прямоугольные координаты точки: $A(\sqrt{3}; 1)$.

Ответ: $A(\sqrt{3}; 1)$.

3.2. Прямая линия на плоскости

<u>Справочный материал.</u> Для решения примеров используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

<u>Пример 3.3.3.</u> Даны вершины треугольника: $A(1; -3)$, $B(3; 5)$, $C(6; -2)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A.

<u>Решение.</u> Найдём угловой коэффициент прямой, проходящей через точки B и C: $k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2-5}{6-3} = -\frac{7}{3}$. Высота, опущенная из вершины A, перпендикулярна прямой, проходящей через точки B и C. Воспользовавшись условием перпендикулярности прямых, найдём угловой коэффициент этой высоты: $k_h = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$. Затем воспользуемся уравнением прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку: $y - y_A = k_h(x - x_A)$. Подставляя числовые значения, получаем: $y - (-3) = \frac{3}{7}(x - 1)$. После преобразований: $3x - 7y - 24 = 0$.

Ответ: $3x - 7y - 24 = 0$.

3.3. Кривые второго порядка

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

Пример. 3.3.4. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что малая полуось равна 1 и расстояние между директрисами равно 3.

Решение. Так как директрисы задаются уравнениями $x = \pm\frac{a}{e}$, то расстояние между директрисами равно $\frac{2a}{e}$. Учитывая, что по условию расстояние между директрисами равно 3, получаем: $3 = \frac{2a}{e}$.

Далее воспользуемся формулой эксцентриситета $e = \frac{c}{a}$. Получаем: $3 = \frac{2a}{\frac{c}{a}} = \frac{2a^2}{c}$.

Затем воспользуемся формулой $a^2 = c^2 - b^2$. Получаем: $3 = \frac{2(c^2 - b^2)}{c}$. По условию $b = 1$. Подставляем: $3 = \frac{2(c^2-1)}{c}$. Преобразуем: $3c = 2c^2 - 2$, $2c^2 - 3c - 2 = 0$. Отсюда $c = 2$ и $c = -\frac{1}{2}$. Учитывая, что c – расстояние от начала координат до фокуса, берём положительное значение $c = 2$.

Далее находим $a^2 = c^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

Составляем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

3.4. Векторы

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

Пример 3.3.5. Даны вершины пирамиды $A(-2; 1; -5)$, $B(-1; -2; -3)$, $C(1; -3; 6)$ и $D(3; -4; -2)$. Найти длину её высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Воспользуемся формулой объёма пирамиды через площадь её основания и длину высоты: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$. Отсюда: $h = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}$.

Найдём объём пирамиды через смешенное произведение векторов, на которых построена пирамида: $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}|$. Найдём координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$: $\overline{AB} = (1; -3; 2)$, $\overline{AC} = (3; -4; 11)$, $\overline{AD} = (5; -5; 3)$.

Далее находим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 11 \\ 5 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -85.$$

Тогда объём пирамиды:

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}| = \frac{1}{6}\cdot|-85| = \frac{85}{6}$.

Найдём площадь основания пирамиды, то есть площадь треугольника ABC, через векторное произведение векторов, на которых треугольник построен: $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}\,|$. Находим векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 11 \end{vmatrix} = -25\bar{\imath} - 5\bar{\jmath} + 5\bar{k}.$$

Тогда площадь треугольника ABC:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-25)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{675} = \frac{15}{2}\sqrt{3}.$

Находим искомую высоту: $h = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3\cdot\frac{85}{6}}{\frac{15}{2}\sqrt{3}} = \frac{17\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{3}}{9}$.

Упражнения

1. Построить в полярной системе координат следующие точки: $M_1\left(3;\ \frac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(1{,}8;\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $M_4\left(3\sqrt{2};\ \frac{7\pi}{6}\right)$, $M_5\left(4;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. В полярной системе координат дана точка $A\left(4;\ \frac{2\pi}{3}\right)$. Найти прямоугольные координаты этой точки при условии, что ось абсцисс совпадает с полярной осью, начало координат совпадает с полюсом.

3. Даны вершины треугольника: $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(6;-4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C.

4. Вычислить расстояние между параллельными прямыми $x + 2y - 1 = 0$ и $3x + 6y + 5 = 0$.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что малая полуось равна 3 и расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$.

6. Даны вершины пирамиды $A(-7;5;12)$, $B(-5;4;1)$, $C(-2;3;6)$ и $D(6;1;9)$. Найти длину её высоты, опущенной из вершины D.

ГЛАВА 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Первый уровень сложности

4.1. Функция одной переменной

Справочный материал.

Если каждому значению, которое может принять переменная x, по некоторому правилу ставится в соответствие одно определённое значение переменной y, то говорят, что y – это однозначная *функция* от x, и обозначают $y = f(x)$. Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*.

Множество всех значений переменной x, для которых функция $y = f(x)$ определена, называется *областью определения функции*.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости Oxy, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если:

1) множество определения функции симметрично относительно нуля;

2) для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если:

1) множество определения функции симметрично относительно нуля;

2) для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Основные элементарные функции.

1) *Степенная функция:* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Область определения зависит от значений α.

2) *Показательная функция:* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения: $x \in R$.

3) Л*огарифмическая функция:* $y = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения: $x > 0$.

4) *Тригонометрические функции:* $y = sin\, x$, $y = cos\, x$, $y = tg\, x$, $y = ctgx$. Область определения функций $y = sin\, x$, $y = cos\, x$: $x \in R$; область определения функции $y = tg\, x$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; область определения функции $y = ctg\, x$: $x \neq \pi n, n \in Z$.

5) *Обратные тригонометрические функции:* $y = arcsin\, x$, $y = = arccos\, x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$. Область определения функций $y = arcsin\, x$, $y = arccos\, x$: $-1 \leq x \leq 1$; область определения функций $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$: $x \in R$.

Элементарной называется функция, получаемая из основных элементарных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции.

График функции $y = f(x)$ иногда можно построить с помощью преобразований графика уже известной функции.

Пример 1.4.1. Для функции $f(x) = x^2 + 3x - 4$ найти:

1) $f(-7)$; 2) $f(0)$; 3) $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Решение. Подставляем в исходную функцию вместо переменной x заданные числовые значения:

1) $f(-7) = (-7)^2 + 3 \cdot (-7) - 4 = 24$;

2) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4$;

3) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = \frac{11}{4}$.

Ответ: 1) 24; 2) -4; 3) $\frac{11}{4}$.

Пример 1.4.2. Найти область определения функций:

1) $y = \frac{4x}{x^2-1}$;   2) $y = \sqrt{7x-4}$;   3) $y = \ln(3x+4)$.

Решение.

1) Функция определена, когда знаменатель не равен нулю: $x^2 - 1 \neq 0$. Отсюда $x \neq \pm 1$. Область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup$ $\cup\ (1;\ \infty)$.

2) Функция определена, когда выражение под знаком корня неотрицательно: $7x - 4 \geq 0$. Отсюда $x \geq \frac{4}{7}$. Область определения функции: $x \in \left[\frac{4}{7};\ \infty\right)$.

3) Функция определена, когда аргумент логарифма положителен: $3x + 4 > 0$. Отсюда $x > -\frac{4}{3}$. Область определения функции: $x \in \left(-\frac{4}{3};\ \infty\right)$.

Ответ: 1) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1;\ \infty)$; 2) $x \in \left[\frac{4}{7};\ \infty\right)$; 3) $x \in \left(-\frac{4}{3};\ \infty\right)$.

Пример 1.4.3. Какие из функций являются чётными, какие нечётными, какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = x^3 + 2x$;   2) $y = x^3 - 6x^2$;   3) $y = 3^{x^2+1}$.

Решение.

1) Область определения функции: $x \in (-\infty; \infty)$ – симметрична относительно нуля. Найдём значение функции при смене знака её аргумента: $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x)$. Так как значение функции изменилось на противоположное, то функция является нечётной.

2) Область определения функции: $x \in (-\infty; \infty)$ – симметрична относительно нуля. Найдём значение функции при смене знака её аргумента: $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 = -x^3 - 6x^2 = -(x^3 + 6x^2)$. Так как значение функции изменилось, но не на противоположное, то функция не является ни чётной, ни нечётной.

3) Область определения функции: $x \in (-\infty; \infty)$ – симметрична относительно нуля. Найдём значение функции при смене знака её аргумента: $f(-x) = 3^{(-x)^2+1} = 3^{x^2+1} = f(x)$. Так как значение функции не изменилось, то функция является чётной.

Ответ: 1) Нечётная; 2) ни чётная, ни нечётная; 3) чётная.

Пример 1.4.4. Построить графики функций:

1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = -\frac{2}{x}$; 3) $y = 2^{x+3}$.

Решение.

1) Функция квадратичная. Её графиком является парабола. График данной функции можно получить из графика функции $y = x^2$ сдвигом на 1 ед. вниз (рис. 1.4.1).

2) Функция дробно-линейная. Её графиком является гипербола. График данной функции можно получить из графика функции $y = \frac{1}{x}$ растяжением вдоль оси Oy в 2 раза и затем симметричным отражением относительно оси Ox (рис. 1.4.2).

3) Функция показательная. Её график можно получить из графика функции $y = 2^x$ сдвигом на 3 ед. влево (рис. 1.4.3).

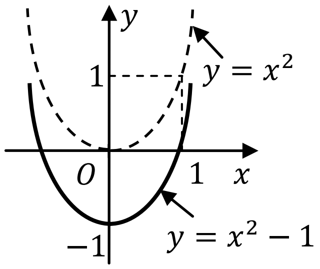

Рис. 1.4.1

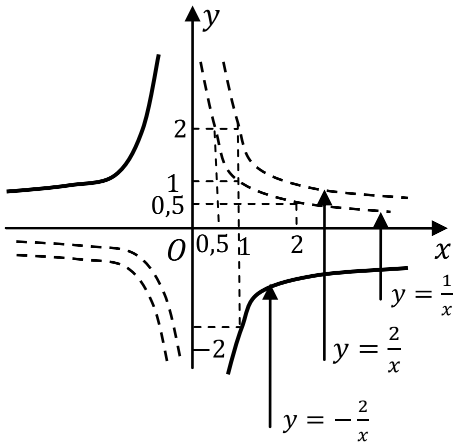

Рис. 1.4.2

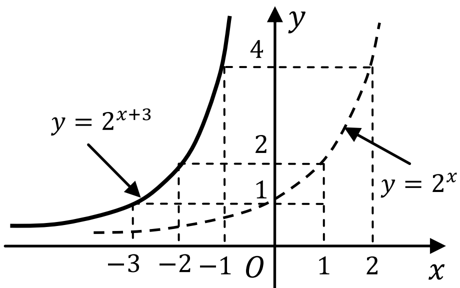

Рис. 1.4.3

4.2. Предел функции

Справочный материал.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Используется обозначение: $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\Delta > 0$, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Используется обозначение: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$, то есть $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если если для любого сколь угодно большого числа $E > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, зависящее от E, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > E$, то есть $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* при $x \to a$, если существуют положительные числа M и δ, такие, что при условии $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

Основные свойства бесконечно малых функций.

1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2) Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

3) Произведение постоянной на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

4) Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

5) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть функция бесконечно малая.

Основные свойства бесконечно больших функций.

1) Произведение бесконечно большой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть функция бесконечно большая.

2) Сумма бесконечно большой функции и ограниченной функции есть функция бесконечно большая.

3) Частное от деления бесконечно большой функции на функцию, имеющую предел, есть функция бесконечно большая.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

1) Если функция $f(x)$ – бесконечно малая и не обращается в ноль, то функция $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая.

2) Если функция $f(x)$ – бесконечно большая, то функция $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Арифметические операции с пределами.

Если существует $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, то:

1) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$;

в частности, $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$, где $c = const$;

в частности, $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$, где $n \in N$;

3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, при условии что $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Неопределённости.

1) Если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, то есть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, то отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется неопределённостью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

2) Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, то есть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$, то отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется неопределённостью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

3) Если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, то есть $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, $g(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, то произведение $f(x) \cdot g(x)$ называется неопределённостью вида $(0 \cdot \infty)$.

4) Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, то есть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$, причём бесконечно большие одного знака, то разность $f(x) - g(x)$ называется неопределённостью вида $(\infty - \infty)$.

<u>Пример 1.4.5.</u> Вычислить пределы:

1) $\lim_{x\to 2}(3x + 5)$; 2) $\lim_{x\to -3} \frac{4x-1}{x-2}$; 3) $\lim_{x\to 4} \frac{2x}{x-4}$;

4) $\lim_{x\to\infty}(6x - 2)$; 5) $\lim_{x\to\infty}(6x^3 - x)$; 6) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+1}$;

7) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+2}{5x^2+8x+4}$; 8) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x-1}{2x-3}$; 9) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

10) $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{13+x}}{x+4}$.

<u>Решение.</u> На практике вычисление предела функции начинают с подстановки вместо переменной x её предельного значения. Если при этом значение функции равно числу или бесконечности, то это и будет значение предела. Если же возникают неопределённости, то выполняют преобразования, позволяющие их раскрыть.

1) Так как при $x \to 2$ функция стремится к числу $3 \cdot 2 + 5 = 11$, то $\lim_{x\to 2}(3x + 5) = 11$.

2) Так как при $x \to -3$ числитель стремится к числу $4 \cdot (-3) - 1 = -13$, а знаменатель, стремится к числу $-3 - 2 = -5$, то $\lim_{x\to -3} \frac{4x-1}{x-2} = \frac{-13}{-5} = \frac{13}{5}$.

3) Представим функцию в виде произведения двух функций: $\frac{2x}{x-4} = \frac{1}{x-4} \cdot 2x$. Так как при $x \to 4$ функция $x - 4$ стремится к числу $4 - 4 = 0$, то есть является бесконечно малой, то функция $\frac{1}{x-4}$ является бесконечно большой. При $x \to 4$ функция $2x$ стремится к числу $2 \cdot 4 = 8$. Таким образом, мы имеем произведение бесконечно большой функции на функцию, предел которой отличен от нуля. Такое произведение является бесконечно большой функцией, а значит предел такого произведения равен бесконечности: $\lim_{x\to 4} \frac{2x}{x-4} = \infty$.

4) При $x \to \infty$ функция неограниченно возрастает, то есть является бесконечно большой. Значит её предел равен бесконечности:

$\lim_{x\to\infty}(6x-2)=\infty$.

5) Так как при $x\to\infty$ функция $6x^3$ неограниченно возрастает, то есть является бесконечно большой, то имеет место неопределённость вида $(\infty-\infty)$. Для раскрытия этой неопределённости вынесем за скобку x с наибольшим показателем степени, то есть x^3. Получаем: $\lim_{x\to\infty}(6x^3-x)=$ $=\lim_{x\to\infty}x^3\left(6-\frac{1}{x^2}\right)$. При $x\to\infty$ функция x^3 является бесконечно большой. Так как при $x\to\infty$ функция $\frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой, то функция $6-\frac{1}{x^2}$ имеет предел, равный 6. Таким образом, мы имеем произведение бесконечно большой функции на функцию, предел которой отличен от нуля. Такое произведение является бесконечно большой функцией, а значит предел такого произведения равен бесконечности: $\lim_{x\to\infty}(6x^3-x)=\infty$.

6) Представим функцию в виде произведения двух функций: $\frac{3}{x+1}=$ $=3\cdot\frac{1}{x+1}$. Так как при $x\to\infty$ функция $x+1$ неограниченно возрастает, то есть является бесконечно большой, то функция $\frac{1}{x+1}$ является бесконечно малой. Таким образом, мы имеем произведение постоянной на бесконечно малую функцию. Такое произведение является бесконечно малой функцией, а значит предел такого произведения равен нулю: $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+1}=0$.

7) Так как при $x\to\infty$ функции $3x^2+x+2$ и $5x^2+8x+4$ неограниченно возрастают, то есть являются бесконечно большими функциями, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости разделим числитель и знаменатель дроби на x с наибольшим показателем степени, то есть на x^2. Получаем: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+2}{5x^2+8x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{5+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}$. Учитывая, что при $x\to\infty$ функции $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x^2}$, $\frac{8}{x}$, $\frac{4}{x^2}$ являются бесконечно малыми, получаем: $\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{5+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{3+0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5}$.

8) Так как при $x\to\infty$ функции $5x^2-3x-1$ и $2x-3$ неограниченно возрастают, то есть являются бесконечно большими функциями, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости разделим числитель и знаменатель дроби на x с наибольшим показателем степени, то есть на x^2. Получаем: $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x-1}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$.

Так как при $x\to\infty$ функции $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x^2}$ являются бесконечно малыми, то функция $5-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}$ имеет предел, равный 5, а функция $\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$ является бесконечно малой. Поэтому частное этих функций является функцией бесконечно большой, то есть $\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\infty$.

9) Так как при $x\to 2$ функция x^2-5x+6 стремится к числу 2^2- $-5\cdot 2+6=0$, то есть является бесконечно малой и функция x^2-3x+2 стремится к числу $2^2-3\cdot 2+2=0$, то есть также является бесконечно ма-

лой, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Получаем: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}$. Так как при $x\to 2$ числитель стремится к числу $2-3=-1$, знаменатель, стремится к числу $2-1=1$, то $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{-1}{1}=-1$.

10) Так как при $x\to -4$ функция $\sqrt{5-x}-\sqrt{13+x}$ стремится к числу $\sqrt{5-(-4)}-\sqrt{13+(-4)}=0$, то есть является бесконечно малой и функция $x+4$ стремится к числу $4+(-4)=0$, то есть также является бесконечно малой, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое числителю, то есть на $\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}$ и затем в числителе воспользуемся формулой сокращённого умножения $(a-b)(a+b)=a^2-$
$-b^2$. Получаем:

$$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{13+x}}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{13+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}\right)}{(x+4)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{\left(\sqrt{5-x}\right)^2-\left(\sqrt{13+x}\right)^2}{(x+4)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}\right)}=\lim_{x\to -4}\frac{5-x-(13+x)}{(x+4)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{-8-2x}{(x+4)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}\right)}=\lim_{x\to -4}\frac{-2(x+4)}{(x+4)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{-2}{\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}}.$$

Так как при $x\to -4$ знаменатель стремится к числу $\sqrt{5-(-4)}+$
$+\sqrt{13+(-4)}=6$, то $\lim_{x\to -4}\frac{-2}{\sqrt{5-x}+\sqrt{13+x}}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$.

Ответ: 1) 11; 2) $\frac{13}{5}$; 3) ∞; 4) ∞; 5) ∞; 6) 0; 7) $\frac{3}{5}$; 8) ∞; 9) -1; 10) $-\frac{1}{3}$.

4.3. Непрерывность функции

<u>Справочный материал.</u>

Если $x\to a$ и при этом $x<a$, то предел функции $y=f(x)$ при $x\to a$ называется *левым односторонним пределом*. Используется обозначение: $\lim_{x\to a-0}f(x)$.

Если $x\to a$ и при этом $x>a$, то предел функции $y=f(x)$ при $x\to a$ называется *правым односторонним пределом*. Используется обозначение: $\lim_{x\to a+0}f(x)$.

Для того чтобы существовал предел функции при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы существовали равные односторонние пределы при $x\to a$. В этом случае значение односторонних пределов принимают за предел функции при $x\to a$: $\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=a$, если она удовлетворяет трём условиям:

1) функция $y=f(x)$ определена в точке $x=a$, то есть существует значение функции в этой точке: $f(a)$;

2) существует предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$, то есть существуют равные односторонние пределы функции: $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$;

3) предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$ равен значению функции в точке $x = a$: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Если функция не является непрерывной в точке, то эта точка называется *точкой разрыва*.

Пример 1.4.6. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x+1}{x-2}$ в следующих точках: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$.

Решение. Для исследования функции на непрерывность в точке нужно проверить выполнение трёх условий из определения непрерывности функции в точке.

1) Найдём значение функции в точке $x = 0$: $f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$. Значение функции в точке $x = 0$ существует, поэтому функция определена в этой точке, то есть первое условие выполняется. Затем найдём предел функции при $x \to 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = -\frac{1}{2}$. Предел функции при $x \to 0$ существует, то есть второе условие выполняется. Очевидно, что значение функции в точке $x = 0$ совпадает с пределом функции при $x \to 0$: $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, то есть третье условие выполняется. Таким образом, все три условия выполняются, поэтому функция непрерывна в точке $x = 0$.

2) Значение функции в точке $x = 2$ не существует, поэтому функция не определена в этой точке, то есть первое условие не выполняется. Следовательно, в точке $x = 2$ функция не является непрерывной и $x = 2$ – точка разрыва.

Ответ: 1) В точке $x = 0$ функция непрерывна; 2) $x = 2$ – точка разрыва.

Пример 1.4.7. Исследовать на непрерывность функцию
$y = \begin{cases} x+1, x \le 3, \\ 2, x > 3 \end{cases}$ в точке $x = 3$.

Решение. Проверим выполнение трёх условий из определения непрерывности функции в точке. Найдём значение функции в точке $x = 3$: $f(3) = 3 + 1 = 4$. Значение функции в точке $x = 3$ существует, поэтому функция определена в этой точке, то есть первое условие выполняется. Затем найдём предел функции при $x \to 3$. Так как слева и справа от точки $x = 3$ функция задана разными аналитическими выражениями, то найдём односторонние пределы при $x \to 3$: $\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0}(x + 1) = 4$, $\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} 2 = 2$. Так как односторонние пределы не совпадают, то предел функции при $x \to 3$ не существует. Второе условие не выполняется. Следовательно, в точке $x = 3$ функция не является непрерывной и $x = 3$ – точка разрыва.

Ответ: $x = 3$ – точка разрыва.

Упражнения

1. Для функции $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$ найти: 1) $f(0)$; 2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$; 3) $f(5)$.

2. Найти область определения функций:

1) $y=\frac{4}{x+2}$; 2) $y=\sqrt{7-3x}$; 3) $y=arccos(1+3x)$.

3. Какие из функций являются чётными, какие нечётными, какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y=x^3-2x$; 2) $y=4x^2+x$; 3) $y=\frac{x^2+3}{x^2-4}$

4. Построить графики функций:

1) $y=-x^2$; 2) $y=\sqrt{x}-2$; 3) $y=\frac{1}{x+2}$.

5. Вычислить пределы:

1) $\lim_{x\to-1}(2x-3)$; 2) $\lim_{x\to-3}(x^2-9)$; 3) $\lim_{x\to2}\frac{x^2+1}{3x-2}$;

4) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$; 5) $\lim_{x\to\infty}(2x+3)$; 6) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2-4}$;

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x-1}{7x^2+2x-2}$; 8) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5x^2-x+4}$; 9) $\lim_{x\to-4}\frac{x^2+x-12}{x^2+5x+4}$;

10) $\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$.

6. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{x}{x+1}$ в следующих точках: 1) $x=-1$; 2) $x=4$.

7. Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases}-1, x\le 0,\\ 2x-1, x>0\end{cases}$ в точке $x=0$.

8. Напряжение в некоторой цепи падает равномерно (по линейному закону). В начале опыта напряжение было равно 12 В, а по окончании опыта, длившегося 8 с, напряжение упало до 6,4 В. Выразить напряжение U как функцию времени t.

9. Лесной участок в $0{,}2$ млн. м^3 увеличивается ежегодно на 4%. Записать закон роста лесного участка. Через какой промежуток времени участок увеличится на $50\ 000$ м^3?

Второй уровень сложности

4.1. Функция одной переменной

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущего уровня сложности.

Пример 2.4.1. Для функции $f(x)=x^2+2x$ найти:

1) $f(a)$; 2) $2f(a)$; 3) $f(a)+1$; 4) $f(a+1)$; 5) $f\left(\frac{1}{a}\right)$; 6) $\frac{1}{f(a)}$.

Решение. Подставляя в исходную функцию вместо переменной x заданные выражения с параметром a, получаем:

1) $f(a)=a^2+2a=a(a+1)$;
2) $2f(a)=2(a^2+2a)=2a(a+2)$;
3) $f(a)+1=(a^2+2a)+1=(a+1)^2$;
4) $f(a+1)=(a+1)^2+2(a+1)=(a+1)(a+3)$;
5) $f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+2\cdot\frac{1}{a}=\frac{1+2a}{a^2}$;
6) $\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{a^2+2a}=\frac{1}{a(a+1)}$.

Ответ: 1) $a(a+1)$; 2) $2a(a+2)$; 3) $(a+1)^2$; 4) $(a+1)(a+3)$;

5) $\frac{1+2a}{a^2}$; 6) $\frac{1}{a(a+1)}$.

Пример 2.4.2. Найти область определения функций:

1) $y = \sqrt{x^2 - 9} + \frac{1}{x+4}$; 2) $y = 2^{\frac{1}{x}} + arcsin\frac{x+2}{3}$.

Решение.

1) Функция определена, когда выражение под знаком корня неотрицательно: $x^2 - 9 \geq 0$ и знаменатель не равен нулю: $x + 4 \neq 0$. Оба условия должны выполняться одновременно, поэтому объединим их в систему: $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ x + 4 \neq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq -3, \\ x \neq -4. \end{cases}$ Область определения функции: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup [3; \infty)$.

2) Функция определена, когда знаменатель не равен нулю: $x \neq 0$ и значения аргумента арксинуса заключены в отрезке от -1 до 1: $-1 \leq \frac{x+2}{3} \leq$ ≤ 1. Оба условия должны выполняться одновременно, поэтому объединим их в систему: $\begin{cases} x \neq 0, \\ -1 \leq \frac{x+2}{3} \leq 1. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} x \neq 0, \\ -5 \leq x \leq 1. \end{cases}$ Область определения функции: $x \in [-5; 0) \cup (0; 1]$.

Ответ: 1) $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup [3; \infty)$; 2) $x \in [-5; 0) \cup (0; 1]$.

Пример 2.4.3. Какие из функций являются чётными, какие нечётными, какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = \sqrt{x} - 3x$; 2) $y = x \sin x$; 3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Решение.

1) Область определения функции: $x \in (0; \infty)$ – не симметрична относительно нуля, поэтому функция не является ни чётной, ни нечётной.

2) Область определения функции: $x \in (-\infty; \infty)$ – симметрична относительно нуля. Найдём значение функции при смене знака её аргумента: $f(-x) = -x \sin(-x) = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x)$. Так как значение функции не изменилось, то функция является чётной.

3) Область определения функции: $x \in (-\infty; \infty)$ – симметрична относительно нуля. Найдём значение функции при смене знака её аргумента: $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$. Так как значение функции изменилось на противоположное, то функция является нечётной.

Ответ: 1) Не является ни чётной, ни нечётной; 2) чётная; 3) нечётная.

Пример 2.4.4. Построить график функции $y = |x + 3|$.

Решение. График данной функции можно получить из графика функции $y = x$ сначала симметричным отражением его части, расположенной ниже оси Ox, относительно этой оси; затем сдвигом вдоль оси Ox на 3 ед. влево (рис. 2.4.1).

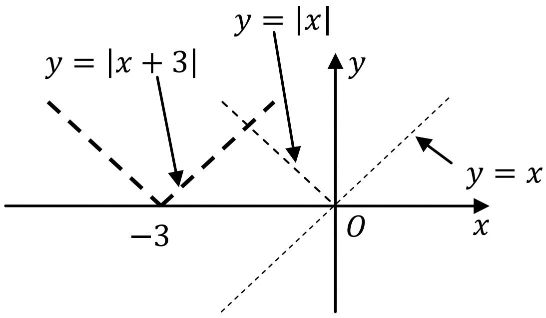

Рис. 2.4.1

4.2. Предел функции

Справочный материал.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отношение $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ представляет собой неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Следствия из первого замечательного предела:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$; 3) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Выражение $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ представляет собой неопределённость вида (1^∞). Выражение $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$ также представляет собой неопределённость вида (1^∞).

Следствия из второго замечательного предела:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$; если $a = e$, то $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

2) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$; если $a = e$, то $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$;

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$.

Пример 2.4.5. Вычислить пределы, используя формулу первого замечательного предела:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$; 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$;

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$; 5) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 3x}$.

Решение.

1) Так как при $x \to 0$ функция $\sin 4x$ является бесконечно малой, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости используем формулу первого замечательного предела. Предварительно умножим числитель и знаменатель дроби на 4. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x} = 4\cdot 1 = 4.$$

2) Так как при $x \to 0$ функции $\sin 7x$ и $\sin 3x$ являются бесконечно малыми, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости используем формулу первого замечательного предела. Предварительно разделим числитель и знаменатель дроби на x. Затем числитель и знаменатель дроби, образовавшейся в числителе исходной дроби, умножим на 7, а в знаменателе – на 3. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7\sin 7x}{7x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{7}{3}.$$

3) Так как при $x \to 0$ функции $1-\cos 4x$ и x^2 являются бесконечно малыми, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости используем формулу первого замечательного предела. Предварительно воспользуемся тригонометрической формулой $1-\cos x = 2sin^2\frac{x}{2}$. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=$$
$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=2\cdot 2^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1^2=8.$$

4) Так как при $x \to 0$ функции $\cos 4x-\cos 2x$ и x^2 являются бесконечно малыми, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости используем формулу первого замечательного предела. Предварительно воспользуемся тригонометрической формулой $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$
$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot 1=-6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=$$
$$=-6\cdot 1=-6.$$

5) Так как при $x \to 0$ функция $\arcsin 3x$ является бесконечно малой, то имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости используем следствие из формулы первого замечательного предела $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$. Предварительно разделим числитель и знаменатель дроби на x. Затем числитель и знаменатель дроби, образовавшейся в знаменателе полученной дроби, умножим на 3. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\arcsin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3\arcsin 3x}{3x}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\arcsin 3x}{3x}}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: 1) 4; 2) $\frac{7}{3}$; 3) 8; 4) -6; 5) $\frac{1}{3}$.

Пример 2.4.6. Вычислить пределы, используя формулу второго замечательного предела: 1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$; 2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^x$.

Решение.

1) Так как при $x \to \infty$ функция $1+\frac{2}{x}$ имеет предел, равный 1, то имеет место неопределённость вида (1^{∞}). Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся формулой второго замечательного предела $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Преобразуем исходную функцию к виду, удобному для использования этой формулы. Получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}.$$

2) Так как при $x \to \infty$ функция $\frac{3x+2}{3x-5}$ имеет предел, равный 1, то имеет место неопределённость вида (1^{∞}). Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся формулой второго замечательного предела $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Преобразуем исходную функцию к виду, удобному для использования этой формулы. Получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x-5)+7}{3x-5}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-5}+\frac{7}{3x-5}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}\cdot\frac{7}{3x-5}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right]^{\frac{7}{3x-5}\cdot x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{3x-5}}=e^{\frac{7}{3}}.$$

Ответ: 1) e^{2}; 2) $e^{\frac{7}{3}}$.

4.3. Непрерывность функции

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

Пример 2.4.7. Найти точки разрыва функций: 1) $y=\frac{4x+1}{x^{2}+x-6}$;

2) $y=\begin{cases} e^{2x}, x\le 0, \\ 3-x, x>0. \end{cases}$

Решение. Точки разрыва – это точки, в которых функция не является непрерывной.

1) Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в ноль: $x^{2}+x-6=0$. Отсюда $x_1=-3$, $x_2=2$. Для этих точек не выполняется первое условие непрерывности функции в точке. Следовательно, $x_1=-3$, $x_2=2$ – точки разрыва.

2) Функция задана двумя аналитическими выражениями, которые непрерывны на всей числовой прямой. Поэтому функция может иметь разрыв в точке, в которой меняется её аналитическое выражение, то есть в точке $x=0$. Исследуем функцию на непрерывность в этой точке.

Проверим выполнение трёх условий из определения непрерывности функции в точке. Найдём значение функции в точке $x=0$: $f(0)=e^{2\cdot 0}=1$. Значение функции в точке $x=0$ существует, поэтому функция определена в этой точке, то есть первое условие выполняется. Затем найдём предел функции при $x \to 0$. Так как слева и справа от точки $x = 0$ функция задана разными аналитическими выражениями, то найдём односторонние пределы при $x \to 0$: $\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} e^{2x} = 1$, $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}(3 - x) = 3$. Так как односторонние пределы не совпадают, то предел функции при $x \to 0$ не существует. Второе условие не выполняется. Следовательно, в точке $x = 0$ функция не является непрерывной и $x = 0$ – точка разрыва.

Ответ: 1) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; 2) $x = 0$.

Упражнения

1. Для функции $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ найти:

1) $f(a)$; 2) $f(2a)$; 3) $2f(a)$; 4) $f(a-1)$; 5) $f\left(\frac{1}{a}\right)$; 6) $\frac{1}{f(a)}$.

2. Найти область определения функций:

1) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{9-x}$; 2) $y = arccos(x-2) - \ln(x-2)$.

3. Какие из функций являются чётными, какие нечётными, какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = x\cos x$; 2) $y = (x+2)\ln x$; 3) $y = \frac{x^3-2x}{\cos x}$.

4. Построить график функции $y = (5 - |x|)(x+1)$.

5. Вычислить пределы, используя формулу первого замечательного предела:

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{x}$; 2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$; 3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 9x-\sin 2x}{\sin x}$;

4) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; 5) $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; 6) $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin\frac{x}{4}}{x}$.

6. Вычислить пределы, используя формулу второго замечательного предела:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; 2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$; 3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-3x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Найти точки разрыва функции: 1) $y = \frac{1}{x^2+2x}$; 2) $y = \begin{cases} 2x+1, x \le 1, \\ 4-x^2, x > 1. \end{cases}$

Третий уровень сложности

4.1. Функция одной переменной

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

Пример 3.4.1. Привести пример функции $y = f(x)$ со следующей областью определения: 1) $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$;
2) $x \in (-2; \infty)$; 3) $x \in [-3; 3]$.

Решение.

1) В качестве примера можно взять дробную функцию, у которой знаменатель обращается в ноль в точках $x = -4$, $x = 0$: $y = \frac{x+1}{x(x+4)}$.

2) В качестве примера можно взять дробную функцию, у которой переменная x находится в знаменателе под корнем чётной степени: $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

3) В качестве примера можно взять функцию, у которой переменная x находится под корнем чётной степени: $y=\sqrt{9-x^2}$.

Ответ: 1) $y=\frac{x+1}{x(x+4)}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$; 3) $y=\sqrt{9-x^2}$.

4.2. Предел функции

Справочный материал. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$ и $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *эквивалентные бесконечно малые* при $x\to a$. Используется обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Примеры эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$:

1) $\sin x\sim x$; 2) $\arcsin x\sim x$;
3) $\operatorname{tg} x\sim x$; 4) $arctg\ x\sim x$;
5) $e^x-1\sim x$; 6) $\ln(1+x)\sim x$;
7) $(1+x)^m-1\sim mx$; 8) $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если эти бесконечно малые заменить их эквивалентными.

Пример 3.4.2. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые: 1) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$; 3) $\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-1}{x^2}$.

Решение.

1) Так как при $x\to 0$ функция $tg\ 5x$ является бесконечно малой, то её можно заменить эквивалентной: $tg\ 5x\sim 5x$. Учитывая, что $x\sim x$, получаем: $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5$.

2) Так как при $x\to 0$ функция $\sqrt{1+3x}-1$ является бесконечно малой, то её можно заменить эквивалентной: $\sqrt{1+3x}-1\sim\frac{1}{2}\cdot 3x=\frac{3}{2}x$. Учитывая, что $x\sim x$, получаем: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x}{x}=\frac{3}{2}$.

3) Так как при $x\to 0$ функции $2^{x^2}-1$ и x^2 являются бесконечно малыми, то их можно заменить эквивалентными: $2^{x^2}-1=e^{\ln 2^{x^2}}-1=$
$=e^{x^2\ln 2}-1\sim x^2\ln 2$, $x^2\sim x^2$. Получаем: $\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln 2}{x^2}=$
$=\ln 2$.

Ответ: 1) 5; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\ln 2$.

4.3. Непрерывность функции

Справочный материал.

Пусть $x=a$ – точка разрыва функции.

Точка $x=a$ называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы.

Точка $x=a$ называется *точкой разрыва второго рода*, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Пример 3.4.3. Найти точки разрыва функции и установить характер точек разрыва: 1) $y = \frac{x-3}{x+1}$; 2) $y = arctg\ \frac{1}{x}$; 3) $y = \begin{cases} 5 - x, x < 2, \\ x^2, x \geq 2. \end{cases}$

Решение.

1) Так как функция не определена в точке $x = -1$, то эта точка является точкой разрыва. Найдём односторонние пределы: $\lim_{x\to-1-0} \frac{x-3}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x\to-1+0} \frac{x-3}{x+1} = -\infty$. Так как пределы равны бесконечности, то $x = -1$ является точкой разрыва второго рода.

2) Так как функция не определена в точке $x = 0$, то эта точка является точкой разрыва. Найдём односторонние пределы: $\lim_{x\to-0} arctg\ \frac{1}{x} =$ $= -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+0} arctg\ \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Односторонние пределы конечны, но не совпадают. Следовательно, $x = 0$ является точкой разрыва первого рода.

3) Функция задана двумя аналитическими выражениями, которые непрерывны на всей числовой прямой. Поэтому функция может иметь разрыв в точке, в которой меняется её аналитическое выражение, то есть в точке $x = 2$. Значение функции в точке $x = 2$ существует: $f(2) = 4$. Найдём односторонние пределы: $\lim_{x\to2-0} f(x) = \lim_{x\to2-0}(5 - x) = 3$, $\lim_{x\to2+0} f(x) = \lim_{x\to2+0} x^2 = 4$. Односторонние пределы конечны, но не совпадают. Следовательно, $x = 2$ является точкой разрыва первого рода.

Ответ: 1) $x = -1$ является точкой разрыва второго рода; 2) $x = 0$ является точкой разрыва первого рода; 3) $x = 2$ является точкой разрыва первого рода.

Упражнения

1. Привести пример функции $y = f(x)$ со следующей областью определения: 1) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$; 2) $x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$; 3) $x \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$.

2. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

1) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x}$; 2) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{tg\ x}$; 3) $\lim_{x\to0} \frac{arctg\ 4x}{e^x-1}$.

3. Найти точки разрыва функции и установить характер точки разрыва: 1) $y = e^{\frac{1}{x+4}}$; 2) $y = \frac{\sin x}{x}$; 3) $y = \begin{cases} 4 - x^2, x < 1, \\ x - 2, x \geq 1. \end{cases}$

ГЛАВА 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Первый уровень сложности

5.1. Производная и дифференциал функции

Справочный материал.

Дана функция $y = f(x)$, определённая на множестве X.

Если существует предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, то его называют *производной функции в точке* x: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Здесь Δx – приращение аргумента, причём x и $x + \Delta x$ принадлежат множеству X; Δy – приращение функции, причём $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Обозначение производной: y' или $\frac{dy}{dx}$.

С учётом обозначения можно записать: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Производные основных элементарных функций.

1) $c' = 0$, c – постоянная величина.

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$; если $\alpha = \frac{1}{2}$, то $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; если $\alpha = -1$, то $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

3) $(a^x)' = a^x \ln a$; если $a = e$, то $(e^x)' = e^x$.

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; если $a = e$, то $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5) $(\sin x)' = \cos x$.

6) $(\cos x)' = -\sin x$.

7) $(tg\, x)' = \frac{1}{cos^2 x}$.

8) $(ctg\, x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$.

9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Основные правила дифференцирования.

Даны две функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, имеющие производные u' и v'.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, c – постоянная величина.

3) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции.

Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$ называется *сложной*, при этом функция u называется промежуточным аргументом, переменная x называется независимым аргументом.

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x, функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u = \varphi(x)$, тогда сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$ имеет производную в точке x, которую находят по формуле:

$$\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big)' = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Таким образом, *производная сложной функции* равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной.

Если функцию $\varphi(x)$ назвать "внутренней функцией", а функцию $f(u)$ назвать "внешней функцией", то *правило нахождения производной сложной функции* можно сформулировать следующим образом: производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней функции.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента. Используется обозначение: dy.

Дифференциал функции равен произведению производной функции на приращение аргумента:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Если $y = x$, то $dx = \Delta x$ и *дифференциал функции* равен произведению производной функции на дифференциал аргумента:

$$dy = f'(x)dx.$$

Физический смысл производной. Если функция описывает некоторый физический процесс, то производная функции описывает скорость изменения этого процесса.

Геометрический смысл производной. Угловой коэффициент касательной, проведённой к кривой, заданной функцией $y = f(x)$, в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, равен производной функции в точке x_0: $k = f'(x_0)$.

<u>Пример 1.5.1.</u> Найти производную функций, используя формулы производных основных элементарных функций и основные правила дифференцирования:

1) $y = 3$; 2) $y = x$;

3) $y = x^4$; 4) $y = \sqrt[5]{x^3}$;

5) $y = \frac{1}{x^2}$; 6) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $y = 3x - \frac{4}{5}\sqrt{x} + \sqrt{2}$; 8) $y = \frac{3}{x} - \frac{4}{5x^3} - \frac{2}{3}$;

9) $y = 3(5x + 1)$; 10) $y = (x - 3)\log_2 x$;

11) $y = \frac{3x-4}{7}$; 12) $y = \frac{4x-1}{x^2+1}$.

<u>Решение.</u>

1) Функция представляет собой постоянную величину. Применяем формулу (1) производных основных элементарных функций:

$y' = 3' = 0.$

2) Функция является степенной. Применяем формулу (2) производных основных элементарных функций:

$y' = x' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$

3) Функция является степенной. Применяем формулу (2) производных основных элементарных функций:

$y' = (x^4)' = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3.$

4) Преобразуем функцию: $y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$. Функция является степенной. Применяем формулу (2) производных основных элементарных функций:

$y' = \left(\sqrt[5]{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$

5) Преобразуем функцию: $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Функция является степенной. Применяем формулу (2) производных основных элементарных функций:

$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$

6) Преобразуем функцию: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Функция является степенной. Применяем формулу (2) производных основных элементарных функций:

$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$

7) Применяем формулы (1), (2) основных правил дифференцирования, формулы (1), (2) и частный случаем формулы (2) производных основных элементарных функций:

$y' = \left(3x - \frac{4}{5}\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)' = (3x)' - \left(\frac{4}{5}\sqrt{x}\right)' + \left(\sqrt{2}\right)' = 3x' - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x}\right)' +$
$+0 = 3 \cdot 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 - \frac{2}{5\sqrt{x}}.$

8) Применяем формулы (1), (2) основных правил дифференцирования, формулы (1), (2) и частный случай формулы (2) производных основных элементарных функций:

$y' = \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{5x^3} - \frac{2}{3}\right)' = \left(\frac{3}{x}\right)' - \left(\frac{4}{5x^3}\right)' - \left(\frac{2}{3}\right)' = 3\left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{x^3}\right)' - 0 =$
$= 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{4}{5}(x^{-3})' = -\frac{3}{x^2} - \frac{4}{5}(-3x^{-4}) = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{5x^4}.$

9) Применяем формулы (1), (2) основных правил дифференцирования и формулы (1), (2) производных основных элементарных функций:

$y' = \left(3(5x+1)\right)' = 3(5x+1)' = 3((5x)' + 1') = 3(5x' + 0) =$
$= 3 \cdot 5 \cdot 1 = 15.$

10) Применяем формулы (1), (3) основных правил дифференцирования и формулы (1), (2), (4) производных основных элементарных функций:

$y' = \left((x-3)\log_2 x\right)' = (x-3)'\log_2 x + (x-3)(\log_2 x)' =$
$= (x' - 3')\log_2 x + (x-3)\frac{1}{xln2} = (1-0)\log_2 x + \frac{x-3}{xln2} = \log_2 x + \frac{x-3}{xln2}.$

11) Представим функцию в виде $y=\frac{1}{7}(3x-4)$. Применяем формулы (1), (2) основных правил дифференцирования и формулы (1), (2) производных основных элементарных функций:

$$y'=\left(\frac{1}{7}(3x-4)\right)'=\frac{1}{7}(3x-4)'=\frac{1}{7}((3x)'-4')=\frac{1}{7}(3x'-0)=$$
$$=\frac{1}{7}(3\cdot 1-0)=\frac{3}{7}.$$

12) Применяем формулы (1), (2), (4) основных правил дифференцирования и формулы (1), (2) производных основных элементарных функций:

$$y'=\left(\frac{4x-1}{x^2+1}\right)'=\frac{(4x-1)'(x^2+1)-(4x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$
$$\frac{((4x)'-1')(x^2+1)-(4x-1)\left((x^2)'+1'\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{(4x'-0)(x^2+1)-(4x-1)(2x+0)}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{4\cdot 1(x^2+1)-(4x-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^2+4-8x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(-2x^2+x+2)}{(x^2+1)^2}.$$

Ответ: 1) 0; 2) 1; 3) $4x^3$; 4) $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$; 5) $-\frac{2}{x^3}$; 6) $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$; 7) $3-\frac{2}{5\sqrt{x}}$; 8) $-\frac{3}{x^2}+\frac{12}{5x^4}$; 9) 15; 10) $\log_2 x+\frac{x-3}{xln2}$; 11) $\frac{3}{7}$; 12) $\frac{2(-2x^2+x+2)}{(x^2+1)^2}$.

Пример 1.5.2. Найти производную сложных функций:

1) $y=(2x-3)^6$; 2) $y=\sqrt{tg\,x}$; 3) $y=\sqrt[5]{x^2+x}$;
4) $y=\frac{1}{(2-7x)^5}$; 5) $y=e^{-x}$; 6) $y=\arccos\frac{x}{3}$;
7) $y=\sin 3x$; 8) $y=\sin^3 x$.

Решение.

1) Функцию представим в виде $y=u^6$, где $u=2x-3$. Получаем:
$y'=6u^5\cdot u'=6(2x-3)^5(2x-3)'=6(2x-3)^5\cdot 2=12(2x-3)^5$.

2) Функцию представим в виде $y=\sqrt{u}$, где $u=tg\,x$. Получаем:
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{tg\,x}}\cdot(tg\,x)'=\frac{1}{2\sqrt{tg\,x}}\cdot\frac{1}{cos^2\,x}=\frac{1}{2\sqrt{tg\,x}\,cos^2\,x}.$$

3) Функцию представим в виде $y=\sqrt[5]{u}$, где $u=x^2+x$. Получаем:
$$y'=\frac{1}{5}u^{-\frac{4}{5}}\cdot u'=\frac{1}{5\sqrt[5]{(x^2+x)^4}}\cdot(x^2+x)'=\frac{1}{5\sqrt[5]{(x^2+x)^4}}\cdot(2x+1)=$$
$$=\frac{2x+1}{5\sqrt[5]{(x^2+x)^4}}.$$

4) Функцию представим в виде $y=\frac{1}{u^5}$, где $u=2-7x$. Получаем:
$$y'=-5u^{-6}\cdot u'=-\frac{5}{(2-7x)^6}\cdot(2-7x)'=-\frac{5}{(2-7x)^6}\cdot(-7)=\frac{35}{(2-7x)^6}.$$

5) Функцию представим в виде $y=e^u$, где $u=-x$. Получаем:
$y'=e^u\cdot u'=e^{-x}\cdot(-x)'=e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}$.

6) Функцию представим в виде $y=\arccos u$, где $u=\frac{x}{3}$. Получаем:
$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)'=-\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}.$$

7) Функцию представим в виде $y=\sin u$, где $u=3x$. Получаем:
$y'=\cos u\cdot u'=\cos 3x\cdot(3x)'=\cos 3x\cdot 3=3\cos 3x$.

8) Функцию представим в виде $y=u^3$, где $u=\sin x$. Получаем:
$y'=3u^2\cdot u'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\cdot\cos x$.

Ответ: 1) $12(2x-3)^5$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{tg\,x}\,cos^2 x}$; 3) $\frac{2x+1}{5\sqrt[5]{(x^2+x)^4}}$; 4) $\frac{35}{(2-7x)^6}$; 5) $-e^{-x}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; 7) $3\cos 3x$; 8) $3\sin^2 x\cdot\cos x$.

Пример 1.5.3. Найти дифференциал функций:

1) $y=x^3$; 2) $y=\sin(x^2)$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения дифференциала: $dy=f'(x)dx$.

1) $dy=(x^3)'dx=3x^2dx$.

2) $dy=(\sin(x^2))'dx=2x\cos(x^2)\,dx$.

Ответ: 1) $3x^2dx$; 2) $2x\cos(x^2)\,dx$.

5.2. Приложения производной

Справочный материал.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на интервале $(a;b)$, если для любых x_1, x_2 из этого интервала таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (рис. 1.5.1).

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на интервале $(a;b)$, если для любых x_1, x_2 из этого интервала таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ (рис. 1.5.2).

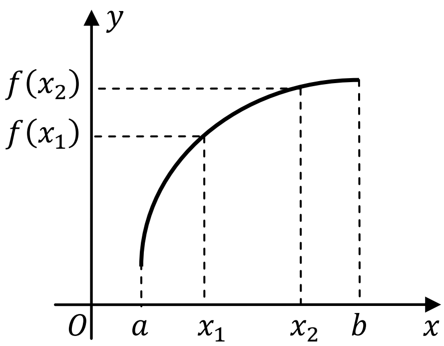

Рис. 1.5.1

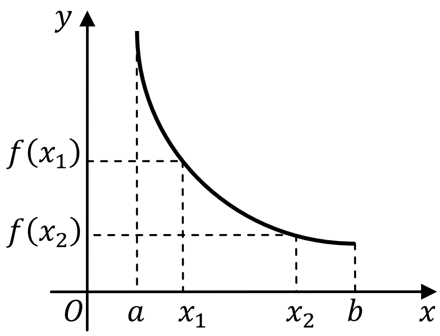

Рис. 1.5.2

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Достаточное условие возрастания функции. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет на нём положительную производную, то эта функция возрастает на интервале $(a;b)$.

Достаточное условие убывания функции. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет на нём отрицательную производную, то эта функция убывает на интервале $(a;b)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности и отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ (рис. 1.5.3).

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности и отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ (рис. 1.5.4).

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*. Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции*.

Максимум и минимум функции называют *экстремумом* функции.

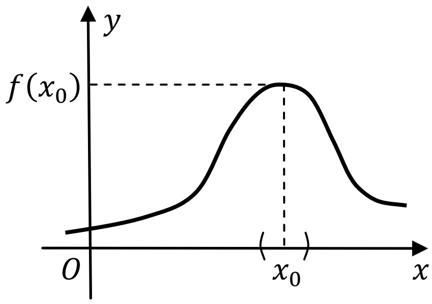

Рис. 1.5.3

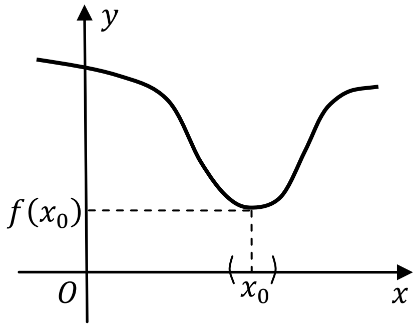

Рис. 1.5.4

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то её производная в этой точке обращается в ноль или не существует.

Необходимое условие экстремума означает, что функция может иметь экстремум в двух случаях:

1) в точках, в которых её производная обращается в ноль;

2) в точках, в которых её производная не существует.

Точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует, называются *критическими*.

Достаточное условие экстремума. Пусть x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$. Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум; если меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минимум.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремум.

1) Найти производную функции y'.

2) Найти критические точки.

3) По интервалам между найденными точками определить знак производной и сделать вывод о промежутках возрастания, убывания и точках экстремума; если точки экстремума есть, то вычислить значение функции в этих точках.

Правило Лопиталя.

Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причём $g'(x) \neq 0$;

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми или бесконечно большими в точке x_0;

3) существует предел $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

тогда существует предел $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, при этом имеет место формула:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то есть *предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.*

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Правило Лопиталя при выполнении соответствующих условий можно применять несколько раз.

<u>Пример 1.5.4.</u> Исследовать на монотонность и экстремум функцию $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + 1$.

<u>Решение.</u> Применяем алгоритм исследования функции на монотонность и экстремум.

1) Находим производную функции:

$y' = x^2 + 3x - 4$.

2) Находим критические точки. Для этого выражение производной приравниваем к нулю: $x^2 + 3x - 4 = 0$. Отсюда $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Точек, в которых производная не существует, нет. Найденные две точки являются критическими.

3) Критические точки отмечаем на числовой прямой (рис. 1.5.5). Затем определяем знак производной на каждом интервале.

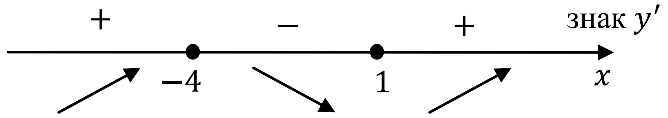

Рис. 1.5.5

Для удобства определения знака выражение производной представим в виде: $y' = (x + 4)(x - 1)$.

На интервале $(-\infty; -4)$ выберем значение $x = -5$ и подставим его в выражение производной: $f'(-5) = (-5 + 4)(-5 - 1) = 6 > 0$. Следовательно, на интервале $(-\infty; -4)$ функция возрастает (на числовой прямой этот факт обозначен стрелочкой, направленной вверх).

На интервале $(-4; 1)$ выберем значение $x = 0$ и подставим его в выражение производной: $f'(0) = (0 + 4)(0 - 1) = -4 < 0$. Следовательно, на интервале $(-4; 1)$ функция убывает (на числовой прямой этот факт обозначен стрелочкой, направленной вниз).

На интервале $(1; \infty)$ выберем значение $x = 2$ и подставим его в выражение производной: $f'(2) = (2 + 4)(2 - 1) = 6 > 0$. Следовательно, на интервале $(1; \infty)$ функция возрастает (на числовой прямой этот факт обозначен стрелочкой, направленной вверх).

Заметим, что при определении знака производной не обязательно доводить значение производной до числа. Производная представляет собой произведение двух множителей. Для определения знака производной достаточно определить знак каждого множителя.

Так как при переходе слева направо через точку $x_1 = -4$ производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум, а точка $x_1 = -4$ является точкой максимума. Вычислим значение функции в точке $x_1 = -4$: $f(-4) = \frac{(-4)^3}{3} + \frac{3(-4)^2}{2} - 4 \cdot (-4) + 1 = \frac{59}{3}$. Таким образом, максимум функции равен $\frac{59}{3}$ и достигается в точке $x_1 = -4$. Можно использовать следующую запись этого факта: $y_{max} = f(-4) = \frac{59}{3}$.

Так как при переходе слева направо через точку $x_2 = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минимум, а точка $x_2 = 1$ является точкой минимума. Вычислим значение функции в точке $x_2 = 1$: $f(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - 4 \cdot 1 + 1 = -\frac{7}{6}$. Таким образом, минимум функции равен $-\frac{7}{6}$ и достигается в точке $x_2 = 1$. Можно использовать следующую запись этого факта: $y_{min} = f(1) = -\frac{7}{6}$.

Ответ: При $x \in (-\infty; -4) \cup (1;\ \infty)$ функция возрастает;
при $x \in (-4; 1)$ функция убывает; $y_{max} = f(-4) = \frac{59}{3}$,
$y_{min} = f(1) = -\frac{7}{6}$.

Пример 1.5.5. Исследовать на монотонность и экстремум функцию $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Решение. Заметим, что функция определена, когда выражение знаменателя не равно нулю. Поэтому область определения функции: $x \in$ $\in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$. Дальнейшее исследование проводим на области определения.

Применяем алгоритм исследования функции на монотонность и экстремум.

1) Находим производную функции:
$$y' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

2) Находим критические точки. Для этого выражение производной приравниваем к нулю: $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Производная не существует, когда выражение знаменателя обращается в ноль: $(x+1)^2 = 0$. Отсюда $x = -1$. Но эта точка не входит в область определения функции. Найдены две критические точки.

3) Критические точки отмечаем на числовой прямой (рис. 1.5.6). Исключаем из рассмотрения точку $x = -1$, в которой функция не определена. Затем определяем знак производной на каждом интервале.

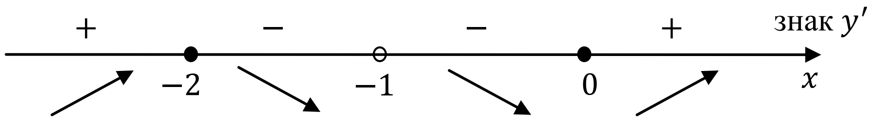

Рис. 1.5.6

На интервале $(-\infty; -2)$ выберем значение $x = -3$ и подставим его в выражение производной: $f'(-3) = \frac{-3(-3+2)}{(-3+1)^2} = \frac{3}{4} > 0$. Следовательно, на этом интервале функция возрастает (на числовой прямой этот факт обозначен стрелочкой, направленной вверх).

На интервале $(-2; -1)$ выберем значение $x = -\frac{3}{2}$ и подставим его в выражение производной: $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}+2\right)}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2} = -3 < 0$. Следовательно, на этом интервале функция убывает (на числовой прямой этот факт обозначен стрелочкой, направленной вниз).

На интервале $(-1; 0)$ выберем значение $x = -\frac{1}{2}$ и подставим его в выражение производной: $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+2\right)}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2} = -3 < 0$. Следовательно, на этом интервале функция убывает (на числовой прямой этот факт обозначен стрелочкой, направленной вниз).

На интервале $(0; \infty)$ выберем значение $x = 1$ и подставим его в выражение производной: $f'(1) = \frac{1(1+2)}{(1+1)^2} = \frac{3}{4} > 0$. Следовательно, на этом интервале функция возрастает (на числовой прямой этот факт обозначен стрелочкой, направленной вверх).

Заметим, что при определении знака производной не обязательно доводить значение производной до числа. В этом примере очевидно, что выражение знаменателя за счёт квадрата положительно при любом значении x. В числителе находится произведение двух множителей. Для определения знака числителя достаточно определить знак каждого из них.

Так как при переходе слева направо через точку $x_2 = -2$ производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум, а точка $x_2 = -2$ является точкой максимума. Вычислим значение функции в точке $x_2 = -2$: $f(-2) = \frac{(-2)^2}{-2+1} = -4$. Таким образом, максимум функции равен -4 и достигается в точке $x_2 = -2$. Можно использовать следующую запись этого факта: $y_{max} = f(-2) = -4$.

Так как при переходе слева направо через точку $x_1 = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минимум, а точка $x_1 = 0$ является точкой минимума. Вычислим значение функции в точке $x_1 = 0$: $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$. Таким образом, минимум функции равен 0 и достигается в точке $x_2 = 0$. Можно использовать следующую запись этого факта: $y_{min} = f(0) = 0$.

Ответ: При $x \in (-\infty; -2) \cup (0;\ \infty)$ функция возрастает; при $x \in$ $\in (-2; -1) \cup (-1; 0)$ функция убывает; $y_{max} = f(-2) = -4$; $y_{min} = f(0) =$ $= 0$.

<u>Пример 1.5.6.</u> Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}$;   2) $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, 4x}{x}$;   3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$.

<u>Решение.</u>

1) Имеет место неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Получаем:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^2+6x-7\right)'}{\left(x^2-5x+4\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+6}{2x-5} = -\frac{8}{3}.$$

2) Имеет место неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Получаем:

$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,4x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4}{1}=4.$

3) Имеет место неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Получаем:

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(3x^2)'}{(e^x)'}=$
$=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(6x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x}=0.$

Правило Лопиталя применялось трижды.

Ответ: 1) $-\frac{8}{3}$; 2) 4; 3) 0.

Упражнения

1. Найти производную функций, используя формулы производных основных элементарных функций и основные правила дифференцирования:

1) $y=2$; 2) $y=x^3$; 3) $y=\sqrt[6]{x}$;
4) $y=\frac{1}{x^4}$; 5) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$; 6) $y=2\sqrt[3]{x}-\frac{4}{3x}+1$;
7) $y=(2x+1)3^x$; 8) $y=\frac{3x-1}{4x+1}$.

2. Найти производную сложных функций.

1) $y=(3x+2)^5$; 2) $y=\sqrt{1-x}$; 3) $y=\frac{4}{\sqrt{1-7x}}$;
4) $y=2^{3x}$; 5) $y=\log_2(1+3x)$;
6) $y=\cos\, 2x$; 7) $y=arctg^2\, x$.

3. Найти дифференциал функции $y=3^{2x-1}$.

4. Исследовать функции на монотонность и экстремум:

1) $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$; 2) $y=\frac{x}{(x-1)(x-4)}$.

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-6}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

6. Точка движется по прямой так, что её расстояние S от начального пункта через t с равно $S=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$ (м). В какие моменты её скорость была равна нулю?

7. Тело массой в 3 кг движется прямолинейно по закону $S=t^2+t+$ $+1$ (м). Определить кинетическую энергию $E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{2}$ тела через 5 с после начала движения.

8. В тонком неоднородном стержне OM масса распределена по закону $m=3l^2+l+1$ (г), где l – длина части стержня, отсчитываемая от точки O. Найти линейную плотность стержня в точке, отстоящей от точки O на 10 см.

9. Размер популяции бактерий в момент времени t (время выражено в часах) задаётся формулой $p(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$. Найти скорость роста популяции, когда: 1) $t=1$ ч; 2) $t=2$ ч.

10. Цепь висячего моста располагается по дуге параболы $x^2=2py$. Пролёт моста $AB=2l=50$ м, стрела провеса $OC=f=5$ м. Определить угол провеса в точке A (рис. 1.5.7).

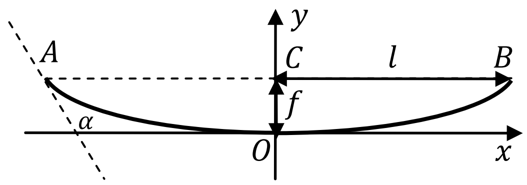

Рис. 1.5.7

11. Реакции организма на два лекарства как функции времени t (время выражается в часах) составляют $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

Второй уровень сложности

5.1. Производная и дифференциал функции одной переменной

Справочный материал.

Производной второго порядка или второй производной называется производная от производной первого порядка. Используется обозначение: y'' или $\frac{d^2y}{dx^2}$. С учётом обозначения, можно записать: $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Функция $y = f(x)$ задана *параметрически*, если переменные x и y являются функциями третьей переменной t: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Производную функции $y = f(x)$, заданной параметрически, находят по формуле:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка. Используется обозначение: d^2y. С учётом обозначения, можно записать: $d^2y = d(dy)$.

Дифференциал второго порядка функции $y = f(x)$ находят по формуле:

$$d^2y = f''(x)dx^2,$$

где dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Пример 2.5.1. Найти производную сложных функций:

1) $y = \sqrt{\sin 3x}$; 2) $y = \ln^4(1 - 2x)$.

Решение.

1) Функцию представим в виде $y = \sqrt{u}$, где $u = \sin v$, $v = 3x$. Получаем:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{\sin v}} \cdot (\sin v)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin v}} \cdot \cos v \cdot v' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot \cos 3x \cdot 3 = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

2) Функцию представим в виде $y = u^4$, где $u = \ln v$, $v = 1 - 2x$. Получаем:

$$y' = 4u^3 \cdot u' = 4\ln^3 v \cdot (\ln v)' = 4\ln^3 v \cdot \frac{1}{v} \cdot v' =$$
$$= 4\ln^3(1 - 2x) \cdot \frac{1}{1-2x} \cdot (1 - 2x)' = 4\ln^3(1 - 2x) \cdot \frac{1}{1-2x} \cdot (-2) = \frac{8x\ln^3(1-2x)}{2x-1}.$$

Ответ: 1) $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$; 2) $\frac{8x\ln^3(1-2x)}{2x-1}$.

Пример 2.5.2. Найти производную второго порядка функций:

1) $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$; 2) $y = \cos 4x$; 3) $y = x\,ln\,x$.

Решение.

1) Находим производную первого порядка:

$y' = 15x^2 - 4x - 1$.

Находим производную второго порядка:

$y'' = (15x^2 - 4x - 1)' = 30x - 4$.

2) Находим производную первого порядка:

$y' = -4\sin 4x$.

Находим производную второго порядка:

$y'' = (-4\sin 4x)' = -16\cos 4x$.

3) Находим производную первого порядка:

$y' = ln\,x + 1$.

Находим производную второго порядка:

$y'' = (ln\,x + 1)' = \frac{1}{x}$.

Ответ: 1) $30x - 4$; 2) $-16\cos 4x$; 3) $\frac{1}{x}$.

Пример 2.5.3. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся формулой производной функции, заданной параметрически. Получаем:

$$y'(x) = \frac{(t^2)'}{(t^3+1)'} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t} .$$

Ответ: $\frac{2}{3t}$.

Пример 2.5.4. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \sqrt{3x-1}$.

Решение. Воспользуемся формулой $d^2y = f''(x)dx^2$. Находим производную первого порядка: $y' = \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$. Находим производную второго порядка:

$$y'' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3x-1}}\right)' = \frac{3}{2}\left((3x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(3x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 =$$
$$= -\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(3x-1)^3}} = -\frac{9}{4(3x-1)\sqrt{3x-1}} .$$

Тогда дифференциал второго порядка: $d^2y = -\frac{9}{4(3x-1)\sqrt{3x-1}}dx^2$.

Ответ: $-\frac{9}{4(3x-1)\sqrt{3x-1}}dx^2$.

5.2. Приложения производной

Справочный материал.

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* на интервале $(a; b)$, если на этом интервале график функции лежит ниже любой своей касательной (рис. 2.5.1). Такую функцию называют также *выпуклой*.

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на интервале $(a; b)$, если на этом интервале график функции лежит выше любой своей касательной (рис. 2.5.2). Такую функцию называют также *вогнутой*.

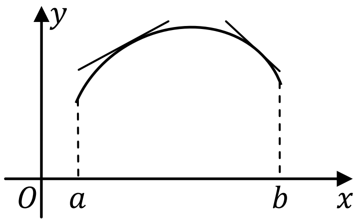

Рис. 2.5.1

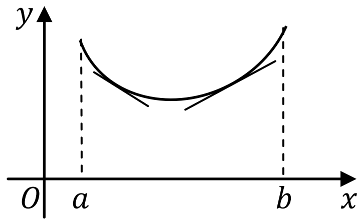

Рис. 2.5.2

Достаточное условие выпуклости вверх. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и имеет на нём отрицательную производную второго порядка, то эта функция является выпуклой вверх на интервале $(a; b)$.

Достаточное условие выпуклости вниз. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и имеет на нём положительную производную второго порядка, то эта функция является выпуклой вниз на интервале $(a; b)$.

Точкой перегиба функции $y = f(x)$ называется точка, при переходе через которую функция меняет направление выпуклости.

Достаточное условие перегиба. Пусть x_0 – точка, в которой производная второго порядка функции $y = f(x)$ обращается в ноль или не существует. Если при переходе через эту точку производная второго порядка функции $y = f(x)$ меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Алгоритм исследования функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

1) Найти производную второго порядка y''.

2) Найти точки, в которых производная второго порядка обращается в ноль или не существует.

3) По интервалам между найденными точками определить знак производной второго порядка и сделать вывод о промежутках выпуклости, вогнутости и точках перегиба.

Пример 2.5.5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

Решение. Применяем алгоритм исследования функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

1) Находим производную второго порядка:

$y' = 15x^4 - 20x^3 + 3$; $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$.

2) Находим точки, в которых производная второго порядка обращается в ноль или не существует. Для этого выражение производной приравниваем к нулю: $60x^2(x - 1) = 0$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Точек, в которых производная второго порядка не существует, нет. Найдены две точки.

3) Найденные точки отмечаем на числовой прямой (рис. 2.5.3). Затем определяем знак производной второго порядка на каждом интервале.

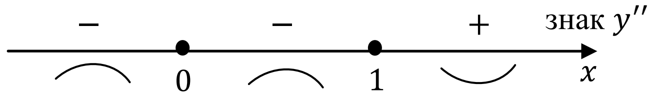

Рис. 2.5.3

Получаем, что при $x \in (-\infty; 1)$ функция имеет выпуклость вверх; при $x \in (1; \infty)$ функция имеет выпуклость вниз.

Так как при переходе через точку $x_2 = 1$ производная второго порядка меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.

Ответ: При $x \in (-\infty; 1)$ функция имеет выпуклость вверх; при $x \in (1; \infty)$ функция имеет выпуклость вниз; $x = 1$ – точка перегиба.

Упражнения

1. Найти производную сложных функций:

1) $y = \sqrt{1 + 7^{3x}}$; 2) $y = arctg^3\,(1 - x)$.

2. Найти производную второго порядка функций:

1) $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$; 2) $y = 3^{2x}$; 3) $y = \frac{x-2}{x+1}$.

3. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 6t - t^2. \end{cases}$$

4. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \cos 2x$.

5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба функций: 1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$; 2) $y = \frac{1}{4+x^2}$.

Третий уровень сложности

5.1. Производная и дифференциал функции

Справочный материал.

Степенно-показательной называется функция вида $y = [f(x)]^{g(x)}$.

Алгоритм дифференцирования степенно-показательной функции.

1) Прологарифмировать функцию по основанию e:

$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)}$.

2) Применить свойство логарифма:

$\ln y = g(x) \ln f(x)$.

3) Продифференцировать полученное уравнение, учитывая, что функции $\ln y$ и $\ln f(x)$ сложные:

$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

4) Выразить y':

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right).$$

Функция y, зависящая от аргумента x, называется *неявной*, если она задана уравнением вида $F(x; y) = 0$.

Алгоритм дифференцирования функции, заданной неявно.

1) Продифференцировать уравнение $F(x; y) = 0$, рассматривая y как функцию от x.

2) Из полученного уравнения выразить y'.

Применение дифференциала к приближённым вычислениям.

Если Δx – бесконечно малое приращение аргумента функции $y = f(x)$, то

$$\Delta y \approx dy$$

или в развёрнутом виде

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Пример 3.5.1. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 + 2x)^{\sin x}$.

Решение. Применяем алгоритм дифференцирования степенно-показательной функции.

1) Прологарифмируем функцию по основанию e:

$\ln y = \ln(1 + 2x)^{\sin x}$.

2) Применим свойство логарифма:

$\ln y = \sin x \ln(1 + 2x)$.

3) Продифференцируем полученное уравнение, учитывая, что функции $\ln y$ и $\ln(1 + 2x)$ сложные:

$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln(1 + 2x) + \sin x \frac{1}{1+2x} \cdot 2$.

4) Выразим y':

$y' = (1 + 2x)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1 + 2x) + \frac{2 \sin x}{1+2x}\right)$.

Ответ: $(1 + 2x)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1 + 2x) + \frac{2 \sin x}{1+2x}\right)$.

Пример 3.5.2. Найти производную функции, заданной неявно:

$x^2 + y^2 - x^2y^2 = 0$.

Решение. Применяем алгоритм дифференцирования функции, заданной неявно.

1) Продифференцируем исходное уравнение, рассматривая y как функцию от x:

$2x + 2y \cdot y' - (2xy^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y') = 0$;

2) Из полученного уравнения выразим y':

$2yy' - 2x^2yy' = 2xy^2 - 2x$;

$y'(y - x^2y) = xy^2 - x$;

$y' = \frac{xy^2-x}{y-x^2y}$;

$y' = \frac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}$.

Ответ: $\frac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}$.

Пример 3.5.3. Вычислить приближённо $\sin 46^0$.

Решение. Воспользуемся формулой приближённого вычисления функции в заданной точке: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Полагаем $x = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1^0 = \frac{\pi}{180}$. Выполняем предварительные вычисления: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(x) = \cos x$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Вычисляем искомое приближённое значение: $\sin 46^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx$

$\approx 0{,}7071(1 + 0{,}0175) = 0{,}7195.$

Ответ: 0,7195.

5.2. Приложения производной

Справочный материал.

Если расстояние δ от точки $M(x;y)$ кривой до некоторой прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* для кривой.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то есть вертикальные асимптоты могут быть в точках разрыва функции (рис. 3.5.1).

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если существует конечный предел $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (рис. 3.5.2).

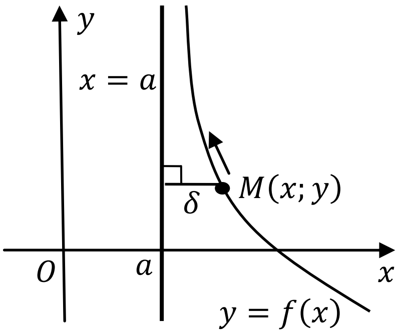

Рис. 3.5.1

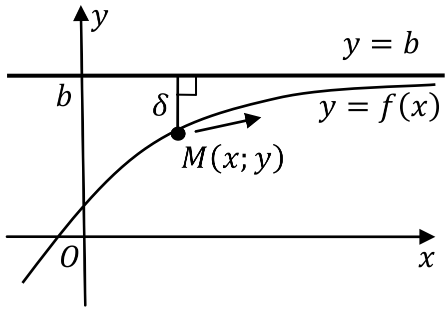

Рис. 3.5.2

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если существуют конечные пределы $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$ (рис. 3.5.3). Если $k = 0$, то наклонная асимптота совпадает с горизонтальной.

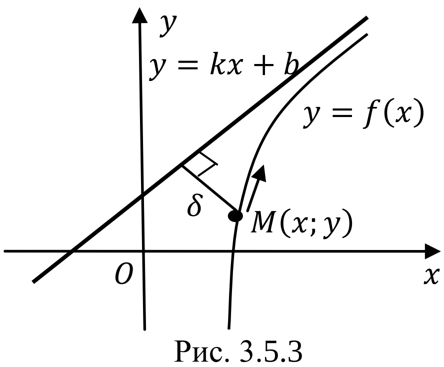

Рис. 3.5.3

Пример 3.5.4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2-x^2}{3+x}$.

Решение. Найдём вертикальную асимптоту. Так как $\lim_{x\to-3-0} \frac{2-x^2}{3+x} = +\infty$, $\lim_{x\to-3+0} \frac{2-x^2}{3+x} = -\infty$, то прямая $x = -3$ является вертикальной асимптотой.

Найдём горизонтальную асимптоту. Так как $\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{3+x}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^2}{3+x}=-\infty$, то горизонтальных асимптот нет.

Найдём наклонную асимптоту:

$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2-x^2}{3+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{3x+x^2}=-1,$

$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x^2}{3+x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x}{3+x}=3.$

Таким образом, прямая $y=-x+3$ является наклонной асимптотой.

Ответ: $x=-3$ – вертикальная асимптота, $y=-x+3$ – наклонная асимптота, горизонтальных асимптот нет.

Упражнения

1. Найти производную степенно-показательной функции
$y=x^{x^2-3x}$.

2. Найти производную функции, заданной неявно:
$x^3+y^3-3xy=0$.

3. Вычислить приближённо $\sqrt[4]{15{,}8}$.

4. Найти асимптоты графиков функций: 1) $y=\frac{x}{x+4}$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x-2}$.

ГЛАВА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Первый уровень сложности

6.1. Функция нескольких переменных

Справочный материал.

Если каждому набору n переменных x_1, x_2, ..., x_n из некоторого множества X соответствует одно определённое значение переменной z, то говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$. Множество X называется *областью определения функции*.

Если функция зависит от двух переменных, то используется обозначение: $z=f(x;y)$.

Пример 1.6.1. Найти значения функции:

1) $z=3x+2y$ в точке $A(1;2)$;

2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $A(-3;4)$.

Решение.

1) Подставляем в исходную функцию $x=1$ и $y=2$:

$f(1;2)=3\cdot1+2\cdot2=7.$

2) Подставляем в исходную функцию $x=-3$ и $y=4$:

$f(-3;4)=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$

Ответ: 1) 7; 2) 5.

6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Справочный материал.

Частным приращением функции $z = f(x; y)$ *по переменной* x называется выражение $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$.

Частным приращением функции $z = f(x; y)$ *по переменной* y называется выражение $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ *по переменной* x называется предел отношения частного приращения функции по переменной x к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Используется обозначение: z'_x или $\frac{\partial z}{\partial x}$. С учётом обозначения можно записать: $z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ *по переменной* y называется предел отношения частного приращения функции по переменной y к приращению аргумента Δy, когда последнее стремится к нулю: $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$. Используется обозначение: z'_y или $\frac{\partial z}{\partial y}$. С учётом обозначения можно записать: $z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

При нахождение частной производной по переменной x переменную y считают постоянной и пользуются правилами и формулами нахождения производных функции одной переменной.

При нахождение частной производной по переменной y переменную x считают постоянной и пользуются правилами и формулами нахождения производных функции одной переменной.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x; y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка:

$(z'_x)'_x = z''_{xx}$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – частная производная второго порядка по переменной x (функция дифференцируется последовательно 2 раза по переменной x);

$(z'_x)'_y = z''_{xy}$ или $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – смешанная частная производная второго порядка (сначала функция дифференцируется по переменной x, затем – по переменной y);

$\left(z'_y\right)'_x = z''_{yx}$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – смешанная частная производная второго порядка (сначала функция дифференцируется по переменной y, затем – по переменной x);

$\left(z'_y\right)'_y = z''_{yy}$ или $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – частная производная второго порядка по переменной y (функция дифференцируется последовательно 2 раза по переменной y).

Смешанные частные производные второго порядка равны между собой: $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращения аргументов. Используется обозначение: dz.

Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ равен сумме произведений частных производных функции на приращение соответствующих аргументов:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

Учитывая, что $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, *полный дифференциал функции* равен сумме произведений частных производных функции на дифференциал соответствующих аргументов:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Пример 1.6.2. Найти частные производные функций:

1) $z = x^2 - 4xy + y^2 + 5y$; 2) $z = \frac{y}{x}$; 3) $z = \frac{5x-y}{2x+y}$;

4) $z = x^3 \cos y$; 5) $z = e^{x^2-y^2}$.

Решение. При нахождении производной по переменной x переменную y считаем постоянной. При нахождении производной по переменной y переменную x считаем постоянной.

1) $z'_x = (x^2 - 4xy + y^2 + 5y)'_x = (x^2)'_x - (4xy)'_x + (y^2)'_x + (5y)'_x =$
$= 2x - 4y + 0 + 0 = 2x - 4y$;

$z'_y = (x^2 - 4xy + y^2 + 5y)'_y = (x^2)'_y - (4xy)'_y + (y^2)'_y + (5y)'_y =$
$= 0 - 4x + 2y + 5 = -4x + 2y + 5$;

2) $z'_x = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \left(y \cdot \frac{1}{x}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}$;

$z'_y = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \left(\frac{1}{x} \cdot y\right)'_y = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$.

3) $z'_x = \left(\frac{5x-y}{2x+y}\right)'_x = \frac{(5x-y)'_x(2x+y)-(5x-y)(2x+y)'_x}{(2x+y)^2} = \frac{5\cdot(2x+y)-(5x-y)\cdot 2}{(2x+y)^2} =$
$= \frac{7y}{(2x+y)^2}$;

$z'_y = \left(\frac{5x-y}{2x+y}\right)'_y = \frac{(5x-y)'_y(2x+y)-(5x-y)(2x+y)'_y}{(2x+y)^2} = \frac{-1\cdot(2x+y)-(5x-y)\cdot 1}{(2x+y)^2} =$
$= -\frac{7x}{(2x+y)^2}$;

4) $z'_x = (x^3 \cos y)'_x = (\cos y \cdot x^3)'_x = \cos y \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos y$;

$z'_y = (x^3 \cos y)'_y = x^3(-\sin y) = -x^3 \sin y$;

5) $z'_x = \left(e^{x^2-y^2}\right)'_x = e^{x^2-y^2} \cdot (x^2 - y^2)'_x = 2xe^{x^2-y^2}$,

$z'_y = \left(e^{x^2-y^2}\right)'_y = e^{x^2-y^2} \cdot (x^2 - y^2)'_y = -2ye^{x^2-y^2}$;

Ответ: 1) $z'_x = 2x - 4y$, $z'_y = -4x + 2y + 5$; 2) $z'_x = -\frac{y}{x^2}$, $z'_y = \frac{1}{x}$;
3) $z'_x = \frac{7y}{(2x+y)^2}$, $z'_y = -\frac{7x}{(2x+y)^2}$; 4) $z'_x = 3x^2 \cos y$, $z'_y = -x^3 \sin y$;
5) $z'_x = 2xe^{x^2-y^2}$, $z'_y = -2ye^{x^2-y^2}$.

Пример 1.6.3. Найти частные производные второго порядка функций: 1) $z = x^3 - 3x^2y + xy^2$; 2) $z = \ln(2x - 3y)$.

Решение.

1) Находим частные производные первого порядка:

$z'_x = (x^3 - 3x^2y + xy^2)'_x = 3x^2 - 6xy + y^2,$
$z'_y = (x^3 - 3x^2y + xy^2)'_y = -3x^2 + 2xy.$

Находим частные производные второго порядка:
$z''_{xx} = (3x^2 - 6xy + y^2)'_x = 6x - 6y = 6(x - y),$
$z''_{xy} = (3x^2 - 6xy + y^2)'_y = -6x + 2y = 2(y - 3x),$
$z''_{yy} = (-3x^2 + 2xy)'_y = 2x.$

2) Находим частные производные первого порядка:
$z'_x = (\ln(2x - 3y))'_x = \frac{2}{2x-3y}$, $z'_y = (\ln(2x - 3y))'_y = -\frac{3}{2x-3y}$.

Находим частные производные второго порядка:
$z''_{xx} = \left(\frac{2}{2x-3y}\right)'_x = -\frac{4}{(2x-3y)^2}$, $\quad z''_{xy} = \left(\frac{2}{2x-3y}\right)'_y = \frac{6}{(2x-3y)^2}$,
$z''_{yy} = \left(-\frac{3}{2x-3y}\right)'_y = -\frac{9}{(2x-3y)^2}$.

Ответ: 1) $z''_{xx} = 6(x - y)$, $z''_{xy} = 2(y - 3x)$, $z''_{yy} = 2x$; 2) $z''_{xx} = -\frac{4}{(2x-3y)^2}$, $z''_{xy} = \frac{6}{(2x-3y)^2}$, $z''_{yy} = -\frac{9}{(2x-3y)^2}$.

Пример 1.6.4. Найти полный дифференциал функции $z = x^2y + xy^2$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения полного дифференциала: $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Находим частные производные первого порядка:
$z'_x = (x^2y + xy^2)'_x = 2xy + y^2 = y(2x + y),$
$z'_y = (x^2y + xy^2)'_y = x^2 + 2xy = x(x + 2y).$

Тогда полный дифференциал:
$dz = y(2x + y)dx + x(x + 2y)dy.$

Ответ: $y(2x + y)dx + x(x + 2y)dy$.

6.3. Экстремум функции нескольких переменных

Справочный материал.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума* функции $z = f(x; y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности и отличных от точки M_0, выполняется неравенство: $f(x_0; y_0) > f(x; y)$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой минимума* функции $z = f(x; y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности и отличных от точки M_0, выполняется неравенство: $f(x_0; y_0) < f(x; y)$.

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*. Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции*.

Максимум и минимум функции называют *экстремумом* функции.

Необходимое условие экстремума.

Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то её частные производные первого порядка в этой точке равны нулю: $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

Точки, в которых частные производные первого порядка функции обращаются в ноль, называются *критическими*.

Достаточное условие экстремума.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – критическая точка функции $z = f(x; y)$. Обозначим через A значение частной производной второго порядка по переменной x в точке M_0, через B – значение смешанной частной производной второго порядка в точке M_0, через C – значение частной производной второго порядка по переменной y в точке M_0: $A = z''_{xx}|_{M_0}$, $B = z''_{xy}\big|_{M_0}$, $C = z''_{yy}\big|_{M_0}$. Обозначим также $\Delta = AC - B^2$. Если $\Delta > 0$, то в точке M_0 есть экстремум, а именно: максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$. Если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет. Если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума остаётся открытым и требуются дополнительные исследования.

Алгоритм исследования функции на экстремум.

1) Найти частные производные первого порядка z'_x, z'_y.

2) Найти критические точки, решив систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

3) Найти частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

4) Вычислить A, B, C, Δ.

5) Сделать вывод о наличии экстремума.

<u>Пример 1.6.5.</u> Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 -$ $-6x + 1$.

<u>Решение.</u> Применяем алгоритм исследования функции на экстремум.

1) Находим частные производные первого порядка:

$z'_x = 2x - 6$, $z'_y = 2y$.

2) Находим критические точки. Для этого выражения частных производных первого порядка приравниваем к нулю и составляем систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 6 = 0, \\ \quad 2y = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем критическую точку: $M_0(3; 0)$.

3) Находим частные производные второго порядка:

$z''_{xx} = (2x - 6)'_x = 2$, $\qquad z''_{xy} = (2x - 6)'_y = 0$,

$z''_{yy} = (2y)'_y = 2$.

4) Вычисляем A, B, C, Δ. Получаем: $A = 2$, $B = 0$, $C = 2$, $\Delta = 4$.

5) Так как $\Delta > 0$, то в точке M_0 есть экстремум и так как $A > 0$, то M_0 – точка минимума. Вычислим значение функции в точке минимума: $f(3; 0) = -8$. Можно использовать следующую запись этого факта: $z_{min} = f(3; 0) = -8$.

Ответ: $z_{min} = f(3; 0) = -8$.

Упражнения

1. Найти значения функции:

1) $z = x - 4y + 3$ в точке $A(0; 3)$;

2) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ в точке $A(1; -2)$.

2. Найти частные производные функций:

1) $z = 2xy - 3y^2 + x$; $\qquad$ 2) $z = \frac{x^2}{y}$; $\qquad$ 3) $z = \frac{2x-y}{3x+y}$;

4) $z = \ln(x^2 + y^2)$.

3. Найти частные производные второго порядка функций:

1) $z = xy^2 - 3x^2 + 2y^2$; 2) $z = x\, tgy$.

4. Найти полный дифференциал функции $z = xy + 5y$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1$.

6. В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x, y, z. Скорость реакции v в любой момент времени выражается законом $v = kxy^2z$. Найдите концентрации x, y, z, при которых скорость течения реакции максимальная.

Второй уровень сложности

6.1. Функция нескольких переменных

Справочный материал.

Множество пар $(x; y)$, при которых определена функция $z = f(x; y)$, называется *областью определения* функции.

Область определения функции двух переменных можно показать геометрически. Для этого каждой паре значений x и y функции $z = f(x; y)$ поставим в соответствие точку $M(x; y)$ плоскости Oxy. Множество этих точек также называется областью определения функции.

Пример 2.6.1. Найти область определения функций:

1) $z = 7x + 4y - 1$; 2) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$; 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

4) $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; 5) $z = \arcsin(x + y)$; 6) $z = \ln(y - x^2)$.

Решение.

1) Функция определена при любых значениях x и y. Геометрически область определения функции образуют все точки, расположенные в плоскости Oxy (рис.2.6.1).

2) Функция определена, когда выражение знаменателя не равно нулю: $x^2 + y^2 \neq 0$. Отсюда $x \neq 0$ и $y \neq 0$ одновременно. Геометрически область определения функции образуют все точки, расположенные в плоскости Oxy за исключением точки $(0; 0)$ (рис.2.6.2).

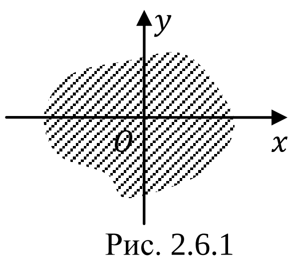

Рис. 2.6.1

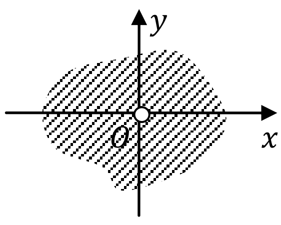

Рис. 2.6.2

3) Функция определена, когда выражение под знаком корня неотрицательно: $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. Отсюда $x^2 + y^2 \geq 4$. Геометрически область определения функции образуют точки, расположенные вне круга с центром в начале координат радиуса 2 и точки, расположенные на границе этого круга (рис. 2.6.3).

4) Функция определена, когда выражение под знаком корня положи-

тельно: $xy > 0$. Геометрически область определения функции образуют точки, расположенные в первой и третьей координатных плоскостях, за исключением точек координатных осей (рис. 2.6.4).

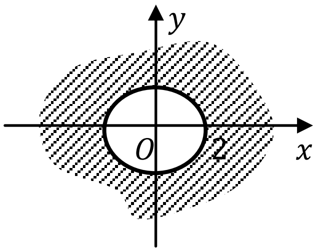

Рис. 2.6.3

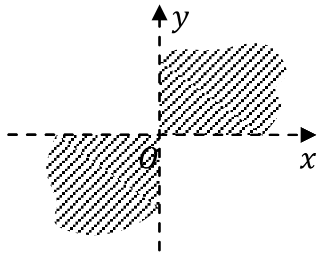

Рис. 2.6.4

5) Функция определена, когда её аргумент заключён в отрезке $[-1; 1]$: $-1 \le x + y \le 1$. Отсюда $-x - 1 \le y \le -x + 1$. Геометрически область определения функции образуют точки, расположенные между прямыми $y = -x - 1$ и $y = -x + 1$, включая точки этих прямых (рис. 2.6.5).

6) Функция определена, когда аргумент логарифма положителен: $y - x^2 > 0$. Отсюда $y > x^2$. Геометрически область определения функции образуют точки, расположенные внутри параболы $y = x^2$, исключая точки, расположенные на параболе (рис. 2.6.6).

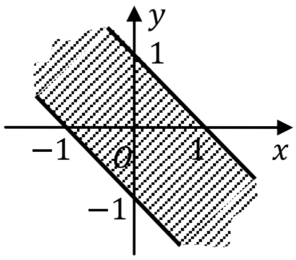

Рис. 2.6.5

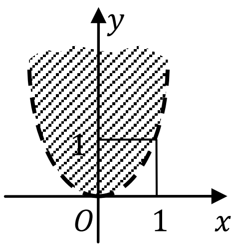

Рис. 2.6.6

6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Справочный материал.

Производную неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $F(x; y) = 0$, где $F(x; y)$ – функция двух переменных x и y, можно найти по формуле: $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x; y)$ называется дифференциал от её полного дифференциала. Используется обозначение: d^2y. С учётом обозначения, можно записать: $d^2y = d(dy)$.

Дифференциал второго порядка функции $z = f(x; y)$ находят по формуле:

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2,$$

где dx^2 обозначает $(dx)^2$, dy^2 обозначает $(dy)^2$.

Пример 2.6.2. Найти производную y' функции $y = f(x)$, заданной неявно: $xy - x^2 - y^2 = 0$.

Решение. Здесь $F(x; y) = xy - x^2 - y^2$, $F'_x = y - 2x$, $F'_y = x - 2y$. Тогда $y' = -\frac{y-2x}{x-2y} = \frac{2x-y}{x-2y}$.

Ответ: $\frac{2x-y}{x-2y}$.

Пример 2.6.3. Найти дифференциал второго порядка функции $z = x^2y$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения дифференциала второго порядка: $d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$.

Находим частные производные первого порядка:

$z'_x = (x^2y)'_x = 2xy, \qquad z'_y = (x^2y)'_y = x^2.$

Находим частные производные второго порядка:

$z''_{xx} = (2xy)'_x = 2y, \qquad z''_{xy} = (2xy)'_y = 2x,$

$z''_{yy} = (x^2)'_y = 0.$

Тогда дифференциал второго порядка:

$d^2z = 2ydx^2 + 4xdxdy.$

Ответ: $2ydx^2 + 4xdxdy$.

6.3. Экстремум функции нескольких переменных

Справочный материал.

Метод наименьших квадратов.

Пусть на основании эксперимента получено n значений величины y при соответствующих значениях величины x. Результаты эксперимента можно записать в таблицу:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Результаты эксперимента можно также изобразить на плоскости в виде точек $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$. Требуется установить функциональную зависимость величины y от величины x, то есть найти функцию $y = f(x)$.

Сначала выбирают вид функции: $y = f(x; a; b; c \dots)$, где a, b, c, … – неизвестные параметры. Метод наименьших квадратов состоит в подборе неизвестных параметров так, что сумма квадратов отклонений значений $f(x_i; a; b; c; \dots)$ и значений y_i из таблицы минимальна, то есть метод сводится к исследованию на минимум функции нескольких переменных:

$S(a; b; c; \dots) = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i; a; b; c \dots) - y_i\right]^2.$

Если зависимость между величинами x и y линейная, то $y = ax + b$, где a и b – неизвестные параметры. При этом сумма квадратов отклонений – это функция двух переменных:

$S(a; b) = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2.$

В случае линейной зависимости параметры a и b находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ , \\ \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\ . \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительной двух неизвестных a и b.

Пример 2.6.4. Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

x	3	5	9	10	12
y	10	13	17	19	23

Полагая, что между величинами x и y существует линейная зависимость, $y = ax + b$, найти параметры a и b методом наименьших квадратов.

Решение. Сделаем расчётную таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	3	10	9	30
2	5	13	25	65
3	9	17	81	153
4	10	19	100	190
5	12	23	144	276
Σ	39	82	359	714

Составляем систему уравнений для нахождения параметров a и b.

$$\begin{cases} 359a + 39b = 714, \\ 39a + 5b = 82. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера.

Вычисляем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 359 & 39 \\ 39 & 5 \end{vmatrix} = 274, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 714 & 39 \\ 82 & 5 \end{vmatrix} = 372,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 359 & 714 \\ 39 & 82 \end{vmatrix} = 1592.$$

Находим неизвестные параметры:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{372}{274} \approx 1{,}36, \qquad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1592}{274} \approx 5{,}81.$$

Линейная зависимость между величинами x и y имеет вид:

$y = 1{,}36x + 5{,}81.$

Ответ: $y = 1{,}36x + 5{,}81$.

Упражнения

1. Найти область определения функций:

1) $z = \frac{1}{x^2+y^2-4}$; 2) $z = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1}$; 3) $z = \arccos x + \arccos y$.

2. Найти производную y' функции $y = f(x)$, заданной неявно:

$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0.$

3. Найти дифференциал второго порядка функции $z = xy^2$.

4. Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

x	2	3	5	6	8
y	1	8	17	22	32

Полагая, что между величинами x и y существует линейная зависимость, $y = ax + b$, найти параметры a и b методом наименьших квадратов.

Третий уровень сложности

6.1. Функция нескольких переменных

Справочный материал.

Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется множество точек плоскости, в которых функция принимает постоянное значение, то есть $f(x; y) = c$, где c – постоянное значение.

<u>Пример 3.6.1.</u> Найти линии уровня функций:

1) $z = 2x + y$; 2) $z = \frac{x}{y}$; 3) $z = \frac{y-x^2}{x^2}$.

<u>Решение.</u>

1) Линия уровня определяется уравнением $2x + y = c$. Отсюда $y = -2x + c$. Придаём c различные числовые значения. Если $c = 0$, то $y = -2x$; если $c = 2$, то $y = -2x + 2$; если $c = -2$, то $y = -2x - 2$. Получаем множество параллельных прямых (рис. 3.6.1).

2) Линия уровня определяется уравнением $\frac{x}{y} = c$, $y \neq 0$. Отсюда $y = \frac{x}{c}$. Придаём c различные числовые значения. Если $c = 1$, то $y = x$; если $c = \frac{1}{2}$, то $y = 2x$; если $c = 2$, то $y = \frac{1}{2}x$; если $c = -\frac{1}{2}$, то $y = -2x$. Если $c = 0$, то $x = 0$ и линия уровня представляет собой ось Oy. Получаем множество прямых, проходящих через начало координат, исключая ось Ox (рис. 3.6.2).

3) Линия уровня определяется уравнением $\frac{y-x^2}{x^2} = c$, $x \neq 0$. Отсюда $y = (1 + c)x^2$. Придаём c различные числовые значения. Если $c = 0$, то $y = x^2$; если $c = 1$, то $y = 2x^2$; если $c = -\frac{1}{2}$, то $y = \frac{1}{2}x^2$; если $c = -2$, то $y = -x^2$; если $c = -3$, то $y = -2x^2$. Получаем множество парабол с вершиной в начале координат, исключая ось Oy. Если $c = -1$, то $y = 0$ и линия уровня представляет собой ось Ox (рис. 3.6.3).

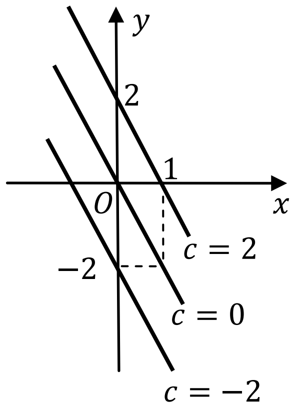

Рис. 3.6.1

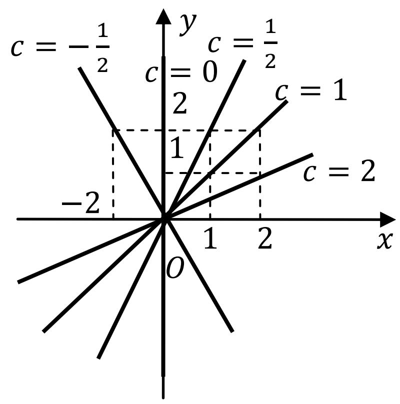

Рис. 3.6.2

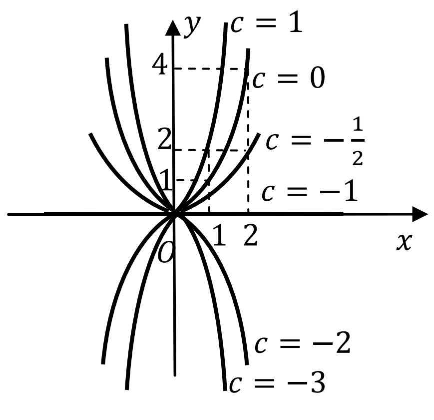

Рис. 3.6.3

6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Справочный материал.

Частными производными третьего порядка функции $z = f(x; y)$ называются частные производные от её частных производных второго порядка:

$(z''_{xx})'_x = z'''_{xxx}$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$;

$(z''_{xx})'_y = z''_{xxy}$ или $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$;

$\left(z''_{xy}\right)'_x = z'''_{xyx}$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$;

$\left(z''_{yx}\right)'_x = z'''_{yxx}$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$;

$\left(z''_{xy}\right)'_y = z'''_{xyy}$ или $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$;

$\left(z''_{yx}\right)'_y = z'''_{yxy}$ или $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$;

$\left(z''_{yy}\right)'_x = z''_{yyx}$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$;

$\left(z''_{yy}\right)'_y = z'''_{yyy}$ или $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

Смешанные частные производные третьего порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой:

$z''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$, $z'''_{xyy} = z'''_{yxy} = z''_{yyx}$.

При нахождении частных производных третьего порядка достаточно найти 4 производные: z'''_{xxx}, z''_{xxy}, z'''_{xyy}, z'''_{yyy}.

Применение дифференциала к приближённым вычислениям.

Если $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ – бесконечно малая величина, где Δx, Δy – приращения аргументов функции $z = f(x; y)$, то

$$\Delta z \approx dz$$

или в развёрнутом виде

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y.$$

Пример 3.6.2. Найти частную производную третьего порядка z'''_{xyy} функции $z = x^3 - xy^2 + 4y^2$.

Решение. Сначала найдём частную производную первого порядка по переменной x:

$z'_x = (x^3 - xy^2 + 4y^2)'_x = 3x^2 - y^2$.

Затем найдём смешанную частную производную второго порядка:

$z''_{xy} = (3x^2 - y^2)'_y = -2y$.

Находим искомую частную производную третьего порядка:

$z'''_{xyy} = (-2y)'_y = -2$.

Ответ: -2.

Пример 3.6.3. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой приближённого вычисления функции в заданной точке: $f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x +$ $+f'_y(x; y)\Delta y$. Рассмотрим функцию $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. Полагаем $x = 1$, $\Delta x =$

$= 0{,}02$, $y = 0$, $\Delta y = 0{,}05$. Выполняем предварительные вычисления: $f(1;0) = 1$, $f'_x(x;y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$, $f'_x(1;0) = \frac{2}{3}$, $f'_y(x;y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$, $f'_y(1;0) = 0$. Вычисляем искомое приближённое значение: $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2} \approx 1 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}02 + 0 \cdot 0{,}05 \approx 1{,}013$.

Ответ: 1,013.

6.3. Экстремум функции нескольких переменных

Справочный материал.

Условным экстремумом называется экстремум функции $z = f(x;y)$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x;y) = 0$. Задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум *функции Лагранжа*:

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y),$$

где λ – множитель Лагранжа. Функция Лагранжа – это функция трёх переменных x, y, λ.

Алгоритм исследования функции на условный экстремум.

1) Составить функцию Лагранжа.

2) Найти частные производные первого порядка функции Лагранжа L'_x, L'_y, L'_λ.

3) Найти критические точки, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0. \end{cases}$$

4) Найти частные производные второго порядка функции Лагранжа L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy}.

5) Вычислить A, B, C, Δ.

6) Сделать вывод о наличии условного экстремума.

Пример 3.6.4. Найти экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$, если x и y связаны уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Применяем алгоритм исследования функции на условный экстремум.

1) Составим функцию Лагранжа:

$L(x;y;\lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

2) Находим частные производные первого порядка функции Лагранжа:

$L'_x = -4 + 2\lambda x$, $L'_y = -3 + 2\lambda y$, $L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$.

3) Находим критические точки. Для этого выражения частных производных первого порядка приравниваем к нулю и составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решим систему уравнений. Выразив из первого и второго уравнений λ и приравняв их выражения, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} = \frac{3}{2y}\,, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения y: $y = \frac{3}{4}x$. Подставляем во второе уравнение: $x^2 = \frac{16}{25}$, $x = \pm\frac{4}{5}$, $y = \pm\frac{3}{5}$. Получили две критические точки: $M_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $M_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. Для каждой критической точки вычислим значение параметра λ, подставив координаты точки в первое или второе уравнение исходной системы. Для точки M_1 параметр $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, для точки M_2 параметр $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$.

4) Найдём частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$L''_{xx} = (-4 + 2\lambda x)'_x = 2\lambda,$ $\qquad$ $L''_{xy} = (-4 + 2\lambda x)'_y = 0,$

$L''_{yy} = (-3 + 2\lambda y)'_y = 2\lambda.$

5) Для каждой критической точки вычислим A, B, C, Δ. Для точки $M_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$: $A_1 = 5$, $B_1 = 0$, $C_1 = 5$, $\Delta_1 = 25$. Для точки $M_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$: $A_2 = -5$, $B_2 = 0$, $C_2 = -5$, $\Delta_2 = 25$.

6) Так как $\Delta_1 > 0$, то в точке M_1 есть экстремум и так как $A_1 > 0$, то M_1 – точка минимума. Вычислим значение функции в точке минимума: $f\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 1$. Можно использовать следующую запись этого факта: $z_{min} = f\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 1$.

Так как $\Delta_2 > 0$, то в точке M_2 есть экстремум и так как $A_2 < 0$, то M_2 – точка максимума. Вычислим значение функции в точке максимума: $f\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 11$. Можно использовать следующую запись этого факта: $z_{max} = f\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 11$.

Ответ: $z_{min} = f\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 1$, $z_{max} = f\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 11$.

Упражнения

1. Найти линии уровня функций:

1) $z = x + y$; $\qquad$ 2) $z = x^2 - y$; $\qquad$ 3) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$.

2. Найти частную производные третьего порядка z'''_{xxy} функции $z = x^3 + 2x^2y - y^3$.

3. Вычислить приближённо $1{,}04^{2{,}03}$.

4. Найти экстремум функции $z = x + y$, если x и y связаны уравнением $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Первый уровень сложности

7.1. Основные методы нахождения неопределённого интеграла

Справочный материал.

Понятие неопределённого интеграла.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если на этом интервале $F'(x)=f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C – постоянная величина, также является первообразной функции $f(x)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется *неопределённым интегралом*. Обозначение: $\int f(x)\,dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования. Таким образом, можно записать:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Свойства неопределённого интеграла.

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx$.

3) $\int dF(x) = F(x)+C$.

4) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, где k – постоянная величина.

5) $\int \big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Неопределённые интегралы от элементарных функций.

1) $\int 0\,dx = C$.

2) $\int dx = x+C$.

3) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq -1$.

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$.

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq 1$; если $a=e$, то $\int e^x dx = e^x + C$.

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -arcctg\ x + C. \end{cases}$

12) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$

Метод непосредственного интегрирования для неопределённого интеграла. Этот метод состоит в приведении данного интеграла при помощи свойств неопределённого интеграла и тождественных преобразований к интегралу от элементарных функций.

Метод замены переменной интегрирования в неопределённом интеграле. Этот метод состоит во введении новой переменной интегрирования, позволяющей свести интеграл к другому интегралу, который можно найти методом непосредственного интегрирования.

Используют подстановки двух видов:

1) $x = \varphi(t)$ – монотонная, непрерывно-дифференцируемая функция; t – новая переменная; метод выражается следующей формулой:

$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)dt.$

2) $t = \varphi(x)$, где t – новая переменная; метод выражается следующей формулой:

$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)dx = \int f(t)\,dt.$

При нахождении неопределённого интеграла методом замены полезно использовать следующие *преобразования дифференциала*:

1) $df(x) = d(f(x) + a)$, где a – постоянная величина;

2) $df(x) = \frac{1}{k}d\big(kf(x)\big)$, где k – постоянная величина;

3) $f'(x)dx = df(x)$ – правило внесения под знак дифференциала.

С помощью метода замены переменной интегрирования можно получить *общие формулы неопределённых интегралов от элементарных функций*:

$10')\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$ $\quad 11')\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C;$

$12')\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$ $\quad 13')\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле. Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула:

$$\int udv = uv - \int v\,du.$$

Пример 1.7.1. Найти неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования:

1) $\int x^3dx;$ 2) $\int \sqrt[5]{x^2}dx;$ 3) $\int \frac{dx}{x^4};$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}};$

5) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx;$ 6) $\int \left(\frac{3}{4} - 2\sin x\right)dx.$

Решение.

1) Подынтегральная функция является степенной. Применим формулу (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C = \frac{1}{4}x^4 + C.$

2) Преобразуем подынтегральную функцию к виду степенной функции и применим формулу (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \sqrt[5]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + C = \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + C.$$

3) Преобразуем подынтегральную функцию к виду степенной функции и применим формулу (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

4) Преобразуем подынтегральную функцию к виду степенной функции и применим формулу (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

5) Применим формулу (5) свойств неопределённого интеграла, формулы (3), (4) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \int xdx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + \ln|x| + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C.$$

6) Применим формулы (4), (5) свойств неопределённого интеграла, формулы (2), (6) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \left(\frac{3}{4} - 2\sin x\right)dx = \int \frac{3}{4}dx - \int 2\sin x\,dx = \frac{3}{4}\int dx - 2\int \sin x\,dx =$$
$$= \frac{3}{4}x + 2\cos x + C.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{4}x^4 + C$; 2) $\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + C$; 3) $-\frac{1}{3x^3} + C$; 4) $2\sqrt{x} + C$; 5) $\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C$; 6) $\frac{3}{4}x + 2\cos x + C$.

Пример 1.7.2. Найти неопределённые интегралы методом замены переменной интегрирования:

1) $\int (x-4)^{10}dx$;	2) $\int e^{\frac{x}{3}}dx$;	3) $\int \sin(2x-1)\,dx$;
4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;	5) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$;	6) $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

Решение.

1) Применим формулу (1) преобразований дифференциала и формулу (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int (x-4)^{10}dx = \int (x-4)^{10}d(x-4) = (x-4=t) = \int t^{10}dt = \frac{t^{11}}{11} +$$
$$+C = \frac{1}{11}(x-4)^{11} + C.$$

2) Применим формулу (2) преобразований дифференциала и частный случай формулы (5) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int e^{\frac{x}{3}}dx = 3\int e^{\frac{x}{3}}d\left(\frac{x}{3}\right) = \left(t = \frac{x}{3}\right) = 3\int e^t dt = 3e^t + C = 3e^{\frac{x}{3}} + C.$$

3) Применим формулы (1), (2) преобразований дифференциала и формулу (6) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \sin(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x-1)\,d(2x-1) = (2x-1=t) =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x-1) + C.$$

4) Применим формулы (1), (3) преобразований дифференциала и формулу (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = (t = x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

5) Применим формулу (3) преобразований дифференциала и формулу (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}dx = \int \ln^2 x\, d(\ln x) = (t = \ln x) = \int t^2 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C.$$

6) Применим общую формулу $(11')$ неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} + C.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{11}(x-4)^{11} + C$; 2) $3e^{\frac{x}{3}} + C$; 3) $-\frac{1}{2}\cos(2x-1) + C$; 4) $\sqrt{x^2+1} + C$; 5) $\frac{1}{3}\ln^3 x + C$; 6) $\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} + C$.

<u>Пример 1.7.3.</u> Найти неопределённый интеграл $\int \arccos x\, dx$ методом интегрирования по частям.

<u>Решение.</u>

$$\int \arccos x\, dx = \begin{pmatrix} u = \arccos x \\ v = x \\ du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} = \arccos x \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= x\arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arccos x + \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arccos x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = (t = 1-x^2) = x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x\arccos x - \sqrt{t} + C =$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ответ: $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

7.2. Основные методы вычисления определённого интеграла

<u>Справочный материал.</u>

Понятие определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a;b]$ определена функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_{k-1} < < x_k < \cdots < x_n = b$. Длину частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$ обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Наибольшую из этих разностей обозначим $\Delta = max\{\Delta x_k\}$. На частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ выберем произвольную точку τ_k и вычислим в ней значение функции $f(\tau_k)$.

Интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$.

Если при $\Delta \to 0$ существует конечный предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точек τ_k, то его называют *определённым интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. В этом случае функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$. Используется обозначение: $\int_a^b f(x)dx$. Можно записать:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_k)\Delta x_k.$$

Число a называется *нижним пределом интегрирования*, число b называется *верхним пределом интегрирования*.

Свойства определённого интеграла.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где k – постоянная величина.
4. $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a < c < b$.
6. Если $f(x)$ – нечётная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
7. Если $f(x)$ – чётная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Формула Ньютона – Лейбница. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – одна из её первообразных на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Метод замены переменной интегрирования в определённом интеграле. Если на отрезке $[\alpha; \beta]$ определена непрывно-дифференцируемая функция $x = \varphi(t)$ со множеством значений в $[a; b]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; на $[a; b]$ определена непрерывная функция $y = f(x)$, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле. Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 1.7.4. Найти определённые интегралы по формуле Ньютона–Лейбница: 1) $\int_1^2 x^2dx$; 2) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^3}$; 3) $\int_4^7 \frac{dx}{x}$; 4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

1) $\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

2) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-3}^{-1} = -\frac{1}{2\cdot(-1)^2} + \frac{1}{2\cdot(-3)^2} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{9}\right) = -\frac{4}{9}$.

3) $\int_4^7 \frac{dx}{x} = \ln|x|\ |_4^7 = \ln 7 - \ln 4 = \ln\frac{7}{4}$.

4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1) $\frac{7}{3}$; 2) $-\frac{4}{9}$; 3) $\ln\frac{7}{4}$; 4) $\frac{\pi}{2}$.

<u>Пример 1.7.5.</u> Найти определённые интегралы методом замены переменной интегрирования:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+2x)^3}$; 2) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$; 3) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2-1}dx$.

<u>Решение.</u>

1) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+2x)^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+2x)}{(1+2x)^3} = \begin{pmatrix} 1+2x=t \\ t\in[1;3] \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{4t^2}\Big|_1^3 =$
$= -\frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{4\cdot 1^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{9}+1\right) = \frac{2}{9}$.

2) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{-2x}d(-2x) = \begin{pmatrix} -2x=t \\ t\in[2;0] \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int_2^0 e^t dt =$
$= -\frac{1}{2}e^t\Big|_2^0 = -\frac{1}{2}\cdot e^0 + \frac{1}{2}\cdot e^2 = \frac{1}{2}(e^2-1)$.

3) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2-1}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2-1}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2-1}d(x^2) =$
$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2-1}d(x^2-1) = \begin{pmatrix} x^2-1=t \\ t\in[1;4] \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_1^4 =$
$= \frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{4} - \frac{1}{3}\cdot 1\sqrt{1} = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$.

Ответ: 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{1}{2}(e^2-1)$; 3) $\frac{7}{3}$.

<u>Пример 1.7.6.</u> Найти определённый интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} arctgx\, dx$ методом интегрирования по частям.

<u>Решение.</u>

$$\int_0^{\sqrt{3}} arctgx\, dx = \begin{pmatrix} u=\operatorname{arctg}x \\ v=x \\ du=\frac{dx}{1+x^2} \end{pmatrix} = xarctgx|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\frac{dx}{1+x^2} =$$
$= \left(\sqrt{3}\cdot arctg\sqrt{3} - 0\cdot arctg0\right) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 0\cdot 0\right) -$
$- \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\ln(1+0^2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2.$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$.

7.3. Геометрические приложения определённого интеграла

<u>Справочный материал.</u>

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$), прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox (рис.1.7.1), вычисляют по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ ($f(x)\leq 0$), прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox (рис.1.7.2), вычисляют по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\leq f_2(x)$), прямыми $x=a$, $x=b$ (рис.1.7.3), вычисляют по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

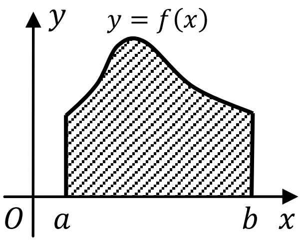

Рис. 1.7.1

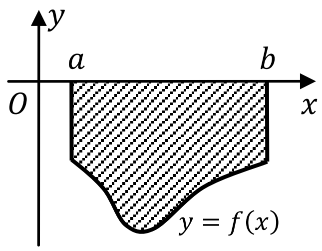

Рис. 1.7.2

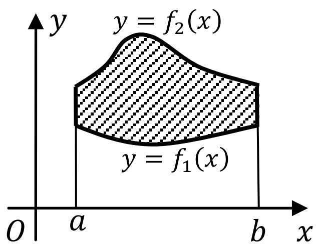

Рис. 1.7.3

Пример 1.7.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $xy = 1, x = 1, x = 4, y = 0$;

2) $y = \sin x, y = \cos x, x = 0$
(фигура расположена в первой четверти);

3) $y = -x^2 + 4x, y = 0, x = 2, x = 5$.

Решение.

1) Фигура представляет криволинейную трапецию, ограниченную гиперболой $y = \frac{1}{x}$, прямыми $x = 1$, $x = 4$ и отрезком $[1; 4]$ оси Ox (рис.1.7.4). Для вычисления площади фигуры применяем формулу $S =$
$= \int_a^b f(x)dx$. Получаем:

$$S = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^4 = \ln 4 - 0 = 2\ln 2.$$

2) Фигура ограничена сверху кривой $y = \cos x$, снизу ограничена кривой $y = \sin x$, слева ограничена осью Oy (рис.1.7.5). Для вычисления площади фигуры применяем формулу $S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$. Получаем:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 1) =$$
$$= \sqrt{2} - 1.$$

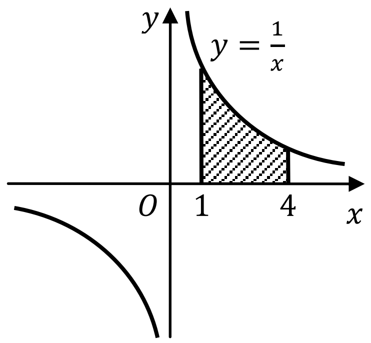

Рис. 1.7.4

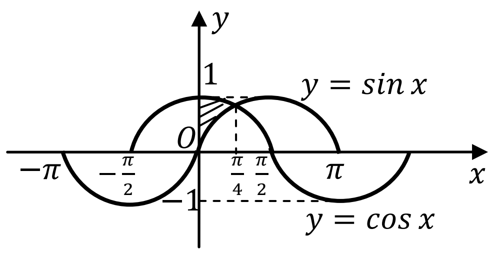

Рис. 1.7.5

3) Фигура состоит из двух криволинейных трапеций, расположенных выше и ниже оси Ox (рис.1.7.6). Для вычисления площади фигуры применяем формулы $S = \int_a^b f(x)dx$ и $S = -\int_a^b f(x)dx$. Получаем:

$$S = \int_2^4 (-x^2 + 4x)dx - \int_4^5 (-x^2 + 4x)dx =$$
$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big|_2^4 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big|_4^5 =$$
$$= \left(-\frac{64}{3} + 32\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(-\frac{125}{3} + 50\right) + \left(-\frac{64}{3} + 32\right) =$$

$$= \left(-\frac{64}{3}+\frac{8}{3}+\frac{125}{3}-\frac{64}{3}\right)+(32-8-50+32)=\frac{5}{3}+6=\frac{23}{3}.$$

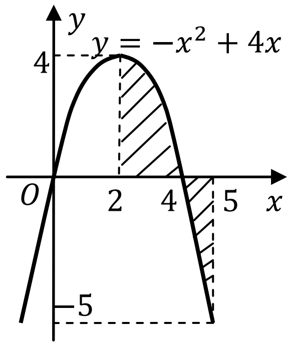

Рис. 1.7.6

Ответ: 1) $2\ln 2$; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) $\frac{23}{3}$.

Упражнения

1. Найти неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования:

1) $\int x^2dx$; 2) $\int \sqrt[4]{x}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^6}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

5) $\int(2+3^x)dx$; 6) $\int\left(\sqrt{x}+5\cos x\right)dx$.

2. Найти неопределённые интегралы методом замены переменной интегрирования:

1) $\int(x-1)^4dx$; 2) $\int \sqrt[3]{2x+5}dx$; 3) $\int \cos 2x\, dx$;

4) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 5) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям: $\int \ln(x^2+1)\, dx$.

4. Найти определённые интегралы по формуле Ньютона–Лейбница:

1) $\int_{-2}^{3} xdx$; 2) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$; 3) $\int_0^1(2x^2-x)dx$; 4) $\int_0^2 e^x dx$.

5. Найти определённые интегралы методом замены переменной интегрирования:

1) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 4x\, dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\, dx$;

4) $\int_0^1(e^x-1)^4e^xdx$; 5) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; 6) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2}$.

6. Найти определённый интеграл $\int_1^2 \ln x\ dx$ методом интегрирования по частям.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=e^x, x=0, x=1, y=0$; 2) $y=x^2+4x, y=x+4$.

8. Скорость прямолинейного движения тела задана уравнением $v=(2t^2+t)$ см/с. Найти путь, пройденный им за 6 c от начала движения.

Второй уровень сложности

7.1. Основные методы нахождения неопределённого интеграла

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущего уровня сложности.

Пример 2.7.1. Найти неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования: 1) $\int \frac{3x+4}{x^2} dx$; 2) $\int ctg^2 x\, dx$.

Решение.

1) Используем почленное деление числителя дроби на её знаменатель, формулы (4), (5) свойств неопределённого интеграла, формулы (3), (4) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{3x+4}{x^2} dx = \int \left(\frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{3}{x} + 4x^{-2}\right) dx = \int \frac{3}{x} dx + \int 4x^{-2}\, dx =$$
$$= 3\int \frac{1}{x} dx + 4\int x^{-2}\, dx = 3\ln|x| + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = 3\ln|x| - \frac{4}{x} + C.$$

2) Преобразуем подынтегральную функцию, используя тригонометрическую формулу, формулы (4), (5) свойств неопределённого интеграла, формулы (2), (9) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{sin^2 x} dx - \int dx = -ctg\ x - x + C.$$

Ответ: 1) $3\ln|x| - \frac{4}{x} + C$; 2) $-ctg\ x - x + C$.

Пример 2.7.2. Найти неопределённые интегралы методом замены переменной интегрирования:

1) $\int \frac{dx}{3x^2+4}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}$; 3) $\int \frac{x^2}{x^2+4}\, dx$; 4) $\int \frac{3x^2+13x+2}{x+4}\, dx$.

Решение.

1) Применим общую формулу $(11')$ неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{dx}{3x^2+4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2+2^2} = (t = \sqrt{3}x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\ arctg \frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$$

2) Применим общую формулу $(13')$ неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{3^2+(2x)^2}} = (t = 2x) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{3^2+t^2}} + C\ =$$
$$= \frac{1}{2} \ln\left|t + \sqrt{3^2 + t^2}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|2x + \sqrt{9 + 4x^2}\right| + C.$$

3) Так как степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя, то подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь. Для её интегрирования выделим целую часть. Для этого к выражению числителя добавим и вычтем число 4 и разделим почленно числитель дроби на её знаменатель. Затем применим формулы (4), (5) свойств неопределённого интеграла, формулу (2) неопределённых интегралов от элементарных функций и общую формулу $(11')$ неопределённых интегралов от элементарных функций. Получаем:

$$\int \frac{x^2}{x^2+4}\, dx = \int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}\, dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)\, dx = \int 1\ dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= x - 4 \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + C = x - 2arctg \frac{x}{2} + C.$$

4) Так как степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя, то подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь. Для её интегрирования выделим целую часть, разделив "столбиком" многочлен числителя на многочлен знаменателя:

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^2+13x+2 & x+4 \\ \cline{2-2} \underline{3x^2+12x} & 3x+1 \\ -\,x+2 & \\ \underline{x+4} & \\ -2 & \end{array}$$

Представим дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Затем применим формулы (4), (5) свойств неопределённого интеграла, формулу (1) преобразований дифференциала, формулы (2), (3), (4) неопределённых интегралов от элементарных функций. Получаем:

$$\int \frac{3x^2+13x+2}{x+4}\,dx = \int \left(3x+1-\frac{2}{x+4}\right)dx = 3\int x\ dx + \int dx +$$
$$-2\int \frac{d(x+4)}{x+4} = (t = x+4) = 3\int x\ dx + \int dx - 2\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}x^2 + x -$$
$$-2\ln|t| + C = \frac{3}{2}x^2 + x - 2\ln|x+4| + C.$$

Ответ: 1) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ arctg\frac{\sqrt{3}x}{2} + C$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{9+4x^2}\right| + C$; 3) $x - -2arctg\frac{x}{2} + C$; 4) $\frac{3}{2}x^2 + x - 2\ln|x+4| + C$.

Пример 2.7.3. Найти неопределённый интеграл $\int xsin\ 2xdx$ методом интегрирования по частям.

Решение. Выражение $sin\ 2x$ внесём под знак дифференциала и воспользуемся методом интегрирования по частям. Получаем:

$$\int xsin\ 2xdx = \int xd\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = -\frac{1}{2}\int xd(\cos 2x) =$$
$$= \begin{pmatrix} u = x \\ v = \cos 2x \\ du = dx \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \int \cos 2x\, dx\right) = -\frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) +$$
$$+C.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$.

7.2. Основные методы вычисления определённого интеграла

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущего уровня сложности.

Пример 2.7.4. Найти определённые интегралы методом замены переменной интегрирования: 1) $\int_{-3}^{1}\frac{x^2+5x+1}{x+4}$; 2) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Решение.

1) Дробь $\frac{x^2+5x+1}{x+4}$ неправильная. Для её интегрирования выделим целую часть, разделив "столбиком" многочлен числителя на многочлен знаменателя:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+5x+1 & x+4 \\ \cline{2-2} \underline{x^2+4x} & x+1 \\ -\,x+1 & \\ \underline{x+4} & \\ -3 & \end{array}$$

Представим дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби и выполним интегрирование:

$$\int_{-3}^{1}\frac{x^2+5x+1}{x+4} = \int_{-3}^{1}\left(x+1-\frac{3}{x+4}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_{-3}^{1} - 3\int_{-3}^{1}\frac{d(x+4)}{x+4} =$$

$$= \begin{pmatrix} x+4=t \\ t\in[1;5] \end{pmatrix} = \frac{3}{2}-\frac{3}{2}-3\int_{1}^{5}\frac{dt}{t} = -3\ln|t|\ |_1^5 = -3ln5.$$

$$2)\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{x+1}=t \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \\ t\in[0;1] \end{pmatrix} = \int_0^1\frac{3t^2dt}{1+t} = 3\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt\ .$$

Дробь $\frac{t^2}{1+t}$ неправильная. Для её интегрирования выделим целую часть, разделив "столбиком" многочлен числителя на многочлен знаменателя:

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t+1 \\ \cline{2-2} -\underline{t^2+t} & t-1 \\ -\ \ -t & \\ \underline{-t-1} & \\ 1 & \end{array}$$

Представим дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби и выполним интегрирование:

$$3\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt = 3\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = 3\left(\left(\frac{1}{2}t^2-t\right)\Big|_0^1 + \int_0^1\frac{d(t+1)}{t+1}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} t+1=z \\ z\in[1;2] \end{pmatrix} = 3\left(-\frac{1}{2}+\int_1^2\frac{dz}{z}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}+\ln|z|\ |_1^2\right) =$$

$$= 3\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right) = 3\ln 2-\frac{3}{2}\,.$$

Ответ: 1) $-3ln5$; 2) $3\ln 2-\frac{3}{2}$.

__**Пример 2.7.5.**__ Найти определённый интеграл $\int_{-1}^{1}x\ arctgx\ dx$ методом интегрирования по частям.

__**Решение.**__ Сначала воспользуемся свойством чётной функции на промежутке, симметричном относительно нуля. Затем переменную x внесём под знак дифференциала и воспользуемся методом интегрирования по частям. Получаем:

$$\int_{-1}^{1}x\ arctgx\ dx = 2\int_0^1 x\ arctgx\ dx = 2\int_0^1 arctgx\ d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 arctgx\ d(x^2) = \int_0^1 arctgx\ d(x^2) = \begin{pmatrix} u=arctgx \\ v=x^2 \\ du=\frac{dx}{1+x^2} \end{pmatrix} =$$

$$= arctgx\cdot x^2|_0^1 - \int_0^1 x^2\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Дробь $\frac{x^2}{1+x^2}$ неправильная. Для её интегрирования выделим целую часть. Для этого к выражению числителя добавим и вычтем единицу и разделим почленно числитель дроби на её знаменатель. Получаем:

$$\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}-\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} - (x - arctg\, x)|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

7.3. Геометрические приложения определённого интеграла

Справочный материал.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox (рис.2.7.1), вычисляют по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c; d]$ оси Oy (рис.2.7.2), вычисляют по формуле:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \le f_2(x))$, прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.2.7.3), вычисляют по формуле:

$$V = \pi \int_a^b \left({f_2}^2(x) - {f_1}^2(x)\right) dx.$$

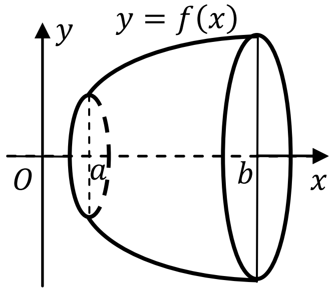

Рис. 2.7.1

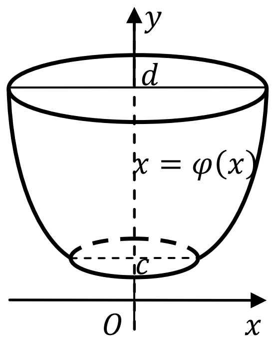

Рис. 2.7.2

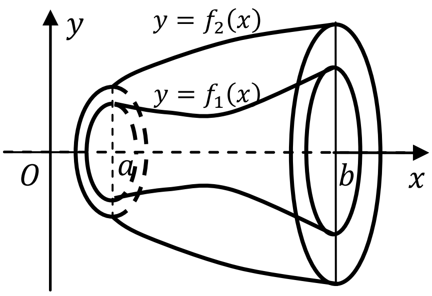

Рис. 2.7.3

Пример 2.7.6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ вокруг оси Oy;

2) $y^2 = x$, $x^2 = y$ вокруг оси Ox.

Решение.

1) Фигура представляет криволинейную трапецию, ограниченную гиперболой с центром в начале координат и одинаковыми полуосями, равными 2; прямыми $y = 2$, $y = -2$ (рис.2.7.4). Для вычисления объёма тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Oy применяем формулу $V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$. Получаем:

$$V = \pi \int_{-2}^{2}(y^2 + 4)dy = 2\pi \int_0^2 (y^2 + 4)dy = 2\pi\left(\frac{1}{3}y^3 + 4y\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{8}{3} + 8\right) - 0 = \frac{64\pi}{3}.$$

2) Фигура представляет криволинейную трапецию, ограниченную сверху параболой $y^2 = x$, снизу – параболой $x^2 = y$ (рис.2.7.5). Для вычисления объёма тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ox применяем формулу $V = \pi \int_a^b \left({f_2}^2(x) - {f_1}^2(x)\right)dx$. Получаем:

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx = \pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0 = \frac{3\pi}{10}.$$

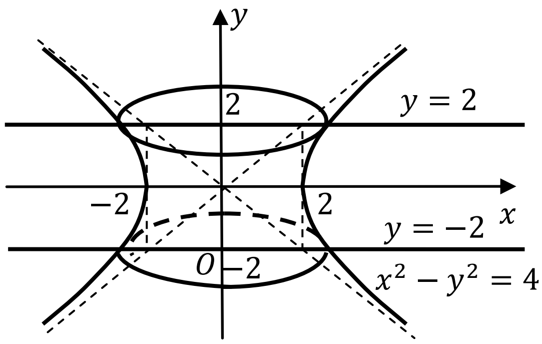

Рис. 2.7.4

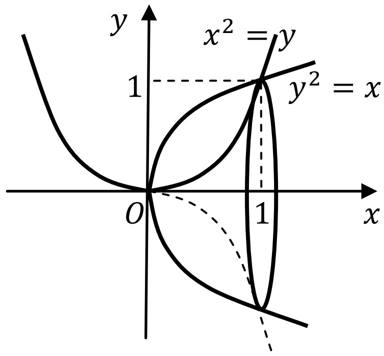

Рис. 2.7.5

Ответ: 1) $\frac{64\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{10}$.

Упражнения

1. Найти неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования: 1) $\int \frac{x-5}{x^3}dx$; 2) $\int sin^2\frac{x}{2}dx$.

2. Найти неопределённые интегралы методом замены переменной интегрирования:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{2x^2+9}$; 3) $\int \frac{2x-1}{x-2}dx$; 4) $\int \frac{x^2+x+3}{x-1}dx$.

3. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям: $\int xe^{2x}dx$.

4. Найти определённые интегралы методом замены переменной интегрирования: 1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$; 2) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

5. Найти определённый интеграл методом интегрирования по частям: $\int_1^e x\ln x\,dx$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси Ox;

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ вокруг оси Oy;

3) $y = x^2$, $xy = 8$, $y = 0$, $x = 4$ вокруг оси Ox.

Третий уровень сложности

7.1. Основные методы нахождения неопределённого интеграла

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

Пример 3.7.1. Найти неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования: 1) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$; 2) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

Решение.

1) Используем формулу сокращённого умножения, формулу (5) свойств неопределённого интеграла, формулы (2), (3) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx = \int\left(\left(\sqrt{x}\right)^3+1^3\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+x+C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C.$$

2) Используем тригонометрическую формулу, почленное деление числителя дроби на её знаменатель, формулы (4), (5) свойств неопределённого интеграла, формулы (2), (8) неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx = \frac{1}{2}(tg\,x+x)+C.$$

Ответ: 1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$; 2) $\frac{1}{2}(tg\,x+x)+C$.

Пример 3.7.2. Найти неопределённые интегралы методом замены переменной интегрирования: 1) $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Решение.

1) Применим общую формулу $(11')$ неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int\frac{dx}{x^2+3x+3} = \int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left(t = x+\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+C = \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C.$$

2) Применим общую формулу $(10')$ неопределённых интегралов от элементарных функций:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-[(x+2)^2-9]}} = \int\frac{d(x+2)}{\sqrt{9-(x+2)^2}} =$$

$$= (t = x+2) = \int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}+C = \arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

Ответ: 1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$.

Пример 3.7.3. Найти неопределённый интеграл $\int x^2e^{-x}dx$ методом интегрирования по частям.

Решение. Выражение e^{-x} внесём под знак дифференциала. Затем воспользуемся методом интегрирования по частям. Получаем:

$$\int x^2e^{-x}dx = \int x^2 d(-e^{-x}) = -\int x^2 d(e^{-x}) = \begin{pmatrix} u = x^2 \\ v = e^{-x} \\ du = 2xdx \end{pmatrix} =$$

$$= -(x^2e^{-x} - 2\int e^{-x}xdx).$$

В полученном интеграле выражение e^{-x} внесём под знак дифференциала и воспользуемся повторно методом интегрирования по частям. Получаем:

$$-(x^2e^{-x} - 2\int e^{-x}xdx) = -(x^2e^{-x} - 2\int xd(-e^{-x})) =$$

$$= -(x^2e^{-x} + 2\int xd(e^{-x})) = \begin{pmatrix} u = x \\ v = e^{-x} \\ du = dx \end{pmatrix} =$$

$$= -\left(x^2e^{-x} + 2(xe^{-x} - \int e^{-x}dx)\right) = -\left(x^2e^{-x} + 2(xe^{-x} + e^{-x})\right) + C =$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

Ответ: $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$.

7.2. Основные методы вычисления определённого интеграла

Справочный материал. Для решения примеров используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

Пример 3.7.4. Найти определённый интеграл методом замены переменной интегрирования: $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+4x-5}$.

Решение.

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2+4x-5} = \int_2^3 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-3^2} = \begin{pmatrix} t = x+2 \\ t \in [4;5] \end{pmatrix} = \int_4^5 \frac{dt}{t^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_4^5 =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\ln\frac{1}{7} = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$.

7.3. Геометрические приложения определённого интеграла

Справочный материал.

Длину дуги AB, заданной функцией $y = f(x)$ при $a \le x \le b$ (рис.3.7.1), вычисляют по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Пример 3.7.5. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$, отсечённой осью Ox.

Решение. Кривая является параболой, пересекающей ось Ox при $x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$ (рис.3.7.2). Для вычисления длины дуги кривой применяем формулу $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$. Получаем:

$$l = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}\, dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

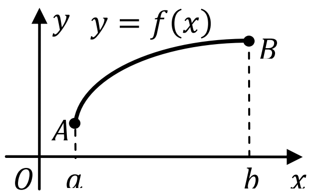

Рис. 3.7.1

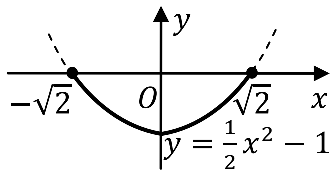

Рис. 3.7.2

Для вычисления интеграла применяем формулу интегрирования по частям. Получаем:

$$2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx=\begin{pmatrix} u=\sqrt{1+x^2}, & v=x \\ du=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} & \end{pmatrix}=$$

$$=2\left(x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\int_0^{\sqrt{2}}x\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}\right)=2\left(\sqrt{6}-\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{6}-\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{6}-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{6}-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx+\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|\right).$$

Обозначим интеграл $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx$ через I. Получаем:

$2I=2\left(\sqrt{6}-I+\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|\right).$

Решим полученное уравнение относительно неизвестной $2I$:

$4I=2\left(\sqrt{6}+\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|\right);$

$2I=\sqrt{6}+\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|.$

Ответ: $\sqrt{6}+\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|.$

Упражнения

1. Найти неопределённый интеграл $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$ методом непосредственного интегрирования.

2. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ методом замены переменной интегрирования.

3. Найти определённый интеграл $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2+2x+10}$ методом замены переменной интегрирования.

4. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(1-x^2)$ от $x=-\frac{1}{2}$ до $x=\frac{1}{2}$.

ГЛАВА 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Первый уровень сложности

8.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Справочный материал.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x; y; y') = 0 \text{ или } y' = f(x; y),$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y' – производная неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; C)$, являющаяся решением этого уравнения при любом значении постоянной C.

Общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка называется соотношение вида $F(x; y; C) = 0$, неявно задающее общее решение уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; C_0)$, получаемая из общего решения при фиксированном значении постоянной $C = C_0$.

Частным интегралом дифференциального уравнения первого порядка называется соотношение вида $F(x; y; C_0) = 0$, получаемое из общего интеграла при фиксированном значении произвольной постоянной $C = C_0$.

Начальным условием для дифференциального уравнения первого порядка называется условие $y(x_0) = y_0$.

Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка называется задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию.

Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными называется уравнение, приводящееся к виду:

$$f(x)dx = g(y)dy,$$

где $f(x)$, $g(y)$ – некоторые функции.

Его решение сводится к интегрированию уравнения:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

Пример 1.8.1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

1) $xy' + y = 0$; 2) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

Решение.

1) Преобразуем уравнение к виду $f(x)dx = g(y)dy$.

Учитываем, что $y' = \frac{dy}{dx}$:

$x\frac{dy}{dx} + y = 0.$

Слагаемое y перенесём в правую часть:

$x\frac{dy}{dx} = -y.$
Умножим уравнение на dx:
$xdy = -ydx.$
Разделим уравнение на x:
$dy = -\frac{ydx}{x}.$
Разделим уравнение на y:
$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$
Проинтегрируем уравнение:
$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}.$
Получаем:
$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|.$
Выразим y:
$|y| = \frac{|C|}{|x|};\quad y = \frac{C}{x}.$
Получено общее решение дифференциального уравнения.
2) Преобразуем уравнение к виду $f(x)dx = g(y)dy$.
Вынесем общий множитель за скобки:
$x(y^2+1)dx + y(1-x^2)dy = 0.$
Слагаемое $y(1-x^2)dy$ перенесём в правую часть:
$x(y^2+1)dx = y(x^2-1)dy.$
Разделим уравнение на y^2+1:
$xdx = \frac{y(x^2-1)dy}{y^2+1}.$
Разделим уравнение на x^2-1:
$\frac{xdx}{x^2-1} = \frac{ydy}{y^2+1}.$
Проинтегрируем уравнение:
$\int\frac{xdx}{x^2-1} = \int\frac{ydy}{y^2+1}.$
Получаем:
$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln|C| = \frac{1}{2}\ln(y^2+1);$
$C(x^2-1) = y^2+1;$
$y^2 = C(x^2-1) - 1.$
Получен общий интеграл дифференциального уравнения.
Ответ: $y = \frac{C}{x}$; 2) $y^2 = C(x^2-1) - 1$.

8.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Справочный материал.

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$F(x;y;y';y'') = 0,$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y' – производная первого порядка неизвестной функции, y'' – производная второго порядка неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$, являющаяся решением этого уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2.

Общим интегралом дифференциального уравнения второго порядка называется соотношение вида $F(x; y; C_1; C_2) = 0$, неявно задающее общее решение уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi\left(x; {C_1}^0; {C_2}^0\right)$, получаемая из общего решения при фиксированных значениях постоянных $C_1 = {C_1}^0$, $C_2 = {C_2}^0$.

Частным интегралом дифференциального уравнения второго порядка называется соотношение вида $F\left(x; y; {C_1}^0; {C_2}^0\right) = 0$, получаемое из общего интеграла при фиксированных значениях постоянных $C_1 = {C_1}^0$, $C_2 = {C_2}^0$.

Начальными условиями для дифференциального уравнения второго порядка называются условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка называется задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

К дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающих понижение порядка, относят уравнение вида:

$$y'' = f(x).$$

Порядок уравнения понижается последовательным интегрированием уравнения.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – действительные числа. Его общее решение находят при помощи *характеристического уравнения*:

$$k^2 + pk + q = 0,$$

где k – некоторое число, действительное или комплексное. Для составления характеристического уравнения в дифференциальном уравнении заменяют y'' на k^2, y' на k, y на 1.

В зависимости от корней характеристического уравнения записывают общее решение дифференциального уравнения. Пусть k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения. Возможны 3 случая.

1) Если k_1 и k_2 – действительные и различные, то есть дискриминант характеристического уравнения $D > 0$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) Если k_1 и k_2 – действительные и равные, то есть дискриминант характеристического уравнения $D = 0$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

3) Если k_1 и k_2 – комплексные ($k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$), то есть дискриминант характеристического уравнения $D < 0$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

<u>Пример 1.8.2.</u> Решить дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка: $y'' = x + \sin x$.

<u>Решение.</u>

Уравнение задано в виде $y'' = f(x)$.

Интегрируя уравнение, получаем:

$y' = \int (x + \sin x)dx = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1$.

Интегрируя повторно, получаем:

$y = \int \left(\frac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1\right) dx = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$.

Получено общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$.

<u>Пример 1.8.3.</u> Решить линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' = 0$; 2) $4y'' - 4y' + y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

<u>Решение.</u>

1) Составляем характеристическое уравнение: $k^2 - 2k = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Корни действительные и различные. Записываем общее решение дифференциального уравнения: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

2) Составляем характеристическое уравнение: $4k^2 - 4k + 1 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$. Корни действительные и равные. Записываем общее решение дифференциального уравнения: $y = e^{\frac{x}{2}}(C_1 + C_2 x)$.

3) Составляем характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 5 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$. Корни комплексные. Записываем общее решение дифференциального уравнения: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Ответ: 1) $y = C_1 + C_2 e^{2x}$; 2) $y = e^{\frac{x}{2}}(C_1 + C_2 x)$;
3) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

<u>Пример 1.8.4.</u> Решить задачу Коши:

$y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10$.

<u>Решение.</u> Составляем характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 3 =$ $= 0$. Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Корни действительные и различные. Записываем общее решение дифференциального уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. Найдём производную первого порядка от общего решения: $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$. Подставляя начальные условия, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 4$, $C_2 = 2$.

Тогда частное решение исходного уравнения: $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

Ответ: $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

Упражнения

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными: 1) $xy' - y = 0$; 2) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$.

2. Скорость тела пропорциональна пройденному пути. За первые 10 с тело проходит 100 м, за 15 с – 200 м. Найти закон движения тела.

3. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент $t = 0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 часов?

4. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Тело, нагретое до 100^0С охлаждается до 60^0С в течение 10 мин при температуре воздуха 20^0С. Найти закон охлаждения тела и установить, через сколько минут оно остынет до 25^0.

5. Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Известно, что через 1 ч количество первого вещества равно $31{,}4$ г, а через 3 ч равно $9{,}7$ г. Определить, сколько вещества было в начале процесса.

6. Решить дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка: $y'' = x^2$.

7. Ускорение прямолинейного движения пропорционально времени. Найти закон движения, если в момент $t = 0$ с скорость $v = 0$ м/с, путь $s = 0$ м и в момент $t = 1$ с путь $s = \frac{1}{3}$ м.

8. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' + y = 0$; 2) $y'' + y' - 2y = 0$; 3) $y'' + 4y = 0$.

9. Решить задачу Коши: $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Второй уровень сложности

8.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

<u>Справочный материал.</u>

Функция $f(x;y)$ называется *однородной функцией n-ого измерения*, если при любом значении k выполняется равенство: $f(kx;ky) = k^n f(x;y)$.

В частности, функция $f(x;y)$ называется *однородной функцией нулевого измерения*, если при любом значении k выполняется равенство: $f(kx;ky) = f(x;y)$.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ называется *однородным*, если $f(x;y)$ является однородной функцией нулевого измерения.

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = xu$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

<u>Пример 2.8.1.</u> Решить однородное дифференциальное уравнение первого порядка: $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

<u>Решение.</u> Преобразуем уравнение к виду $y' = f(x; y)$. Получаем: $y' = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Для этого уравнения $f(x; y) = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Функция $f(x; y)$ является однородной нулевого измерения, так как $f(kx; ky) = \frac{ky+\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}}{kx} = \frac{k\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{ky} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} = f(x; y)$. Следовательно, данное уравнение является однородным.

Применяем подстановку $y = xu$:

$(xu)' = \frac{xu+\sqrt{x^2+(xu)^2}}{x}$.

Преобразуем:

$u + xu' = \frac{x\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)}{x}$;

$xu' = \sqrt{1 + u^2}$;

Получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u. Разделяем переменные:

$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$.

Проинтегрируем уравнение:

$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x}$;

$\ln\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = \ln|Cx|$;

$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx.$

Выполняем обратную замену:

$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx.$

Преобразуем:

$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$;

$x^2 + y^2 = (Cx^2 - y)^2$;

$x^2 + y^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2$;

$x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y$;

$y = \frac{C^2x^4-x^2}{2Cx^2}$; $\qquad y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}$.

Получено общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}$.

8.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

<u>Справочный материал.</u>

К дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающих понижение порядка, относят уравнение вида:

$$F(x; y'; y'') = 0.$$

Уравнение не содержит y в явном виде. Порядок уравнения понижается при помощи замены $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$
где p и q – действительные числа, $f(x)$ – некоторая функция.

Общее решение этого уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения исходного неоднородного уравнения: $y = y_{\substack{\text{общее} \\ \text{одн.}}} + y_{\substack{\text{частное} \\ \text{неодн.}}}$.

Частное решение исходного неоднородного уравнения находят по виду его правой части, то есть по виду функции $f(x)$.

Рассмотрим 2 случая.

1) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n; α – некоторое число. Если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение находят в виде:
$$y_{\substack{\text{частное} \\ \text{неодн.}}} = Q_n(x)e^{\alpha x},$$
где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами.

2) $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, $Q_n(x)$ – многочлен степени n; α, β – некоторые числа. Если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение находят в виде:
$$y_{\substack{\text{частное} \\ \text{неодн.}}} = e^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x),$$
где $U_k(x)$, $V_k(x)$ – многочлены степени k с неопределёнными коэффициентами, $k = max(m;\ n)$.

Для нахождения коэффициентов многочленов $Q_n(x)$, $U_k(x)$, $V_k(x)$ используют метод неопределённых коэффициентов. Для этого частное решение подставляют в исходное неоднородное уравнение и приравнивают коэффициенты при подобных слагаемых в левой и правой частях уравнения.

Пример 2.8.2. Решить дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка: $(x+1)y'' = y' - 1$.

Решение. Уравнение задано в виде $F(x; y'; y'') = 0$, то есть не содержит y в явном виде. Выполнив замену $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$(x+1)z' = z - 1.$

Разделяем переменные:

$\frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x+1}.$

Проинтегрируем уравнение:

$\int \frac{dz}{z-1} = \int \frac{dx}{x+1};$

$\ln|z-1| + \ln|C_1| = \ln|x+1|;$

$C_1(z-1) = x + 1.$

Выражаем функцию z:

$z = 1 + \frac{1}{C_1}(x+1).$

Возвращаясь к функции y, приходим к уравнению:

$y' = 1 + \frac{1}{C_1}(x+1).$

Интегрируем:

$$y = \int\left(1 + \frac{1}{C_1}(x+1)\right)dx = x + \frac{1}{2C_1}(x+1)^2 + C_2.$$

Получено общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = x + \frac{1}{2C_1}(x+1)^2 + C_2$.

Пример 2.8.3. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$; 2) $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$.

Решение.

1) Найдём общее решение однородного уравнения. Запишем однородное уравнение: $y'' - 2y' - 3y = 0$. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k - 3 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Корни действительные и различные. Записываем общее решение однородного уравнения: $y_{\substack{\text{общее}\\ \text{одн.}}} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x) = 1$ является многочленом нулевой степени и $\alpha = 4$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения находим в виде $y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = Ae^{4x}$, где A – неопределённый коэффициент.

Найдём производные первого и второго порядков от частного решения: $y'_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = 4Ae^{4x}$, $y''_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = 16Ae^{4x}$. Подставим частное решение и его производные в исходное уравнение:

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}; \qquad 5A = 1, \qquad A = \frac{1}{5}.$$

Запишем частное решение неоднородного уравнения:

$$y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

2) Найдём общее решение однородного уравнения. Запишем однородное уравнение: $y'' + 2y' + 5y = 0$. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$. Корни комплексные. Записываем общее решение однородного уравнения: $y_{\substack{\text{общее}\\ \text{одн.}}} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, где $\alpha = 0$, $P_m(x) = -\frac{17}{2}$ является многочленом нулевой степени, $Q_n(x) = 0$ является многочленом нулевой степени, $\alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения находим в виде $y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A, B – неопределённые коэффициенты.

Найдём производные первого и второго порядков от частного решения:

$y'_{\substack{\text{частное}\\\text{неодн.}}} = -2A\,sin\,2x + 2B\cos 2x,$

$y''_{\substack{\text{частное}\\\text{неодн.}}} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$

Подставим частное решение и его производные в исходное уравнение:

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2(-2A\,sin\,2x + 2B\cos 2x) +$
$+5(A\cos 2x + B\sin 2x) = -\frac{17}{2}\cos 2x.$

После преобразований:

$(A + 4B)\cos 2x + (-4A + B)\sin 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x.$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях уравнения, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A + 4B = -\frac{17}{2}, \\ -4A + B = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = -\frac{1}{2}$, $B = -2$.

Запишем частное решение неоднородного уравнения:

$y_{\substack{\text{частное}\\\text{неодн.}}} = -\frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

Тогда общее решение исходного уравнения:

$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

Ответ: 1) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$;

2) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

Упражнения

1. Решить однородное дифференциальное уравнение первого порядка: $y' = -\frac{x+y}{x}$.

2. Решить дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка: $xy'' = y'$.

3. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$; 2) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

Третий уровень сложности

8.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Справочный материал.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – некоторые функции.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными подстановкой $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – новые неизвестные функции, причём функцию $v = v(x)$ можно выбрать произвольно.

Пример 3.8.1. Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка: $xy' - 2y = x^3 \cos x$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y' + p(x)y = q(x)$. Получаем: $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x$.

Применяем подстановку $y = uv$:

$(uv)' - \frac{2}{x}uv = x^2 \cos x$.

Преобразуем:

$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x^2 \cos x$;

$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x^2 \cos x$.

Подберём функцию v так, чтобы выражение в скобках обращалось в ноль. Получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции v:

$v' - \frac{2}{x}v = 0$.

Отсюда:

$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}$;

$v = Cx^2$.

Возьмём $C = 1$. Получаем $v = x^2$.

Возвращаемся к решению уравнения $u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x^2 \cos x$, учитывая, что при $v = x^2$ выражение в скобках обращается в ноль. Получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u:

$u'x^2 = x^2 \cos x$.

Отсюда:

$u' = \cos x$;

$u = \sin x + C$.

Окончательно получаем общее решение исходного уравнения:

$y = uv = (\sin x + C)x^2$.

Ответ: $y = (\sin x + C)x^2$.

8.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Справочный материал.

К дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающих понижение порядка, относят уравнение вида:

$$F(y; y'; y'') = 0.$$

Уравнение не содержит x в явном виде. Порядок уравнения понижается при помощи замены $y' = z(y)$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p и q – действительные числа, $f(x)$ – некоторая функция.

Общее решение этого уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения исходного неоднородного уравнения: $y = y_{\substack{\text{общее}\\ \text{одн.}}} + y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}}$.

Частное решение исходного неоднородного уравнения находят по виду его правой части, то есть по виду функции $f(x)$.

Рассмотрим 3 случая.

1) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n; α – некоторое число. Если α совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то есть $\alpha = k_1$ или $\alpha = k_2$, то частное решение находят в виде:

$$y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = xQ_n(x)e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами.

2) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n; α – некоторое число. Если α совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, то есть $\alpha = k_1 = k_2$, то частное решение находят в виде:

$$y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = x^2Q_n(x)e^{\alpha x},$$

3) $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, $Q_n(x)$ – многочлен степени n; α, β – некоторые числа. Если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение находят в виде:

$$y_{\substack{\text{частное}\\ \text{неодн.}}} = xe^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x),$$

где $U_k(x)$, $V_k(x)$ – многочлены степени k с неопределёнными коэффициентами, $k = max(m;\, n)$.

Для нахождения коэффициентов многочленов $Q_n(x)$, $U_k(x)$, $V_k(x)$ используют метод неопределённых коэффициентов. Для этого частное решение подставляют в исходное неоднородное уравнение и приравнивают коэффициенты при подобных слагаемых в левой и правой частях уравнения.

Пример 3.8.2. Решить дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка: $2yy'' = (y')^2$.

Решение. Уравнение задано в виде $F(y; y'; y'') = 0$, то есть не содержит x в явном виде. Выполнив замену $y' = z(y)$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$2yz\frac{dz}{dy} = z^2.$$

Преобразуем:

$$z\left(2y\frac{dz}{dy} - z\right) = 0.$$

Отсюда $z = 0$ или $2y\frac{dz}{dy} - z = 0$.

Решение первого уравнения: $y = C$.

Решаем второе уравнение. Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{2y}.$$

Проинтегрируем уравнение:

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dy}{2y};$$

$\ln|z| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln\left|C_1{}^0\right|$.

Выражаем функцию z:

$z = C_1{}^0\sqrt{y}$.

Возвращаясь к функции y, приходим к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$y' = C_1{}^0\sqrt{y}$.

Разделяем переменные:

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = C_1{}^0 dx$.

Проинтегрируем уравнение:

$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int C_1{}^0 dx$;

$2\sqrt{y} = C_1{}^0 x + C_2{}^0$;

$y = \left(\frac{1}{2}C_1{}^0 x + \frac{1}{2}C_2{}^0\right)^2$.

Обозначим: $C_1 = \frac{1}{2}C_1{}^0$, $C_2 = \frac{1}{2}C_2{}^0$.

Тогда: $y = (C_1 x + C_2)^2$.

Получено общее решение дифференциального уравнения.

Решение $y = C$ входит в это решение.

Ответ: $y = (C_1 x + C_2)^2$.

Пример 3.8.3. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x$.

Решение. Найдём общее решение однородного уравнения. Запишем однородное уравнение: $y'' - 3y' + 2y = 0$. Составляем характеристическое уравнение: $k^2 - 3k + 2 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Корни действительные и различные. Записываем общее решение однородного уравнения: $y_{\substack{\text{общее}\\\text{одн.}}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x) = 3 - 4x$ является многочленом первой степени и $\alpha = 1$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения находим в виде $y_{\substack{\text{частное}\\\text{неодн.}}} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$, где A, B – неопределённые коэффициенты.

Найдём производные первого и второго порядков от частного решения:

$y'_{\substack{\text{частное}\\\text{неодн.}}} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = [Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x$,

$y''_{\substack{\text{частное}\\\text{неодн.}}} = [2Ax + (2A + B)]e^x + [Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x =$

$= [Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B)]e^x$.

Подставим частное решение и его производные в исходное уравнение:

$[Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B)]e^x - 3[Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x +$
$+2(Ax^2 + Bx)e^x = (3 - 4x)e^x$.

После преобразований:

$-2Ax + (2A - B) = 3 - 4x.$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях уравнения, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -2A = -4, \\ 2A - B = 3. \end{cases}$$

Отсюда $A = 2$, $B = 1$.

Запишем частное решение неоднородного уравнения:

$y_{\substack{\text{частное}\\\text{неодн.}}} = (2x^2 + x)e^x.$

Тогда общее решение исходного уравнения:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (2x^2 + x)e^x.$

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (2x^2 + x)e^x.$

Упражнения

1. Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка: $y' - \frac{3y}{x} = x.$

2. Точка массой m движется прямолинейно. На неё действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности равен k_1), прошедшего от момента, когда скорость была равна нулю. На точку также действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности равен k_2). Найти зависимость скорости от времени.

3. Решить дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка: $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$

4. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$; 2) $y'' + y = \cos x.$

ГЛАВА 9. РЯДЫ

Первый уровень сложности

9.1. Числовые ряды

__**Справочный материал.**__

Числовым рядом называется выражение вида:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ... действительные числа, называемые *членами* ряда. При этом число u_n называется *общим членом ряда*.

Если все члены ряда положительны, то ряд называется *знакоположительным*. Ряд, содержащий положительные и отрицательные члены, называется *знакопеременным*.

Сумма первых n членов ряда называется *n-ой частичной суммой* ряда и обозначается через S_n. Можно записать:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. При этом число S называется *суммой* ряда.

Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности его частичных сумм не существует или равен бесконечности. При этом ряд не имеет суммы.

Разность между суммой S числового ряда и *n-ой частичной суммой* S_n называется *остатком* ряда и обозначается через r_n. Можно записать:

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

Свойства числовых рядов.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и имеет сумму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, где c – постоянная величина, также сходится и имеет сумму cS.

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и имеют суммы S_1 и S_2 соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ также сходится и имеет сумму $S_1 + S_2$.

3) Отбрасывание или добавление конечного числа членов числового ряда не влияет на его сходимость или расходимость.

4) Если числовой ряд сходится, то последовательность остатков этого ряда является бесконечно малой, то есть $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Рядом геометрической прогрессии называется числовой ряд, составленный из членов геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \cdots + b_1q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_1q^{n-1},$$

где b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии. Ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$, при этом его сумма $S = \frac{b_1}{1-q}$. Ряд геометрической прогрессии расходится при $|q| \geq 1$.

Гармоническим рядом называется числовой ряд вида:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Гармонический ряд расходится.

Обобщённым гармоническим рядом называется числовой ряд вида:

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

где $s > 0$. Обобщённый гармонический ряд сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leq 1$.

Необходимый признак сходимости.

Если числовой ряд сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$ равен нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Это условие является необходимым, но недостаточным: если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится; если $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то вопрос о сходимости остаётся открытым, то есть ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

1) Признаки сравнения.

Первый признак сравнения (с помощью неравенств). Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если при этом выполнятся неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами и из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Второй признак сравнения (в предельной форме). Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

В качестве ряда сравнения часто используют ряд геометрической прогрессии, обобщённый гармонический ряд, гармонический ряд.

2) *Признак Даламбера.* Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если существует предел отношения последующего члена ряда к предыдущему: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд сходится, при $k > 1$ ряд расходится, при $k = 1$ вопрос о сходимости остаётся открытым и нужно воспользоваться другим признаком.

3) *Интегральный признак Коши–Маклорена.* Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого не возрастают, то есть $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq$ $\geq u_n \geq \cdots$. Пусть функция $f(x)$, определённая для $x \geq 1$, непрерывна, не возрастает и $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, ..., $f(n) = u_n$, ... Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от 1 до ∞ определяется равенством: $\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} f(x)\, dx$. Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся. Если предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется расходящимся.

4) *Радикальный признак Коши.* Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если существует предел: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд сходится, при $k > 1$ ряд расходится, при $k = 1$ вопрос о сходимости остаётся открытым и нужно воспользоваться другим признаком.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

где $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ – положительные действительные числа.

Достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов (признак Лейбница).

Знакочередующийся ряд сходится, если выполняются два условия:

1) члены ряда по абсолютной величине убывают, то есть $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots$

2) абсолютная величина общего члена ряда стремится к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма ряда положительна и не превосходит первого члена ряда.

Пример 1.9.1. Дан общий член ряда $u_n = \frac{n}{3n+1}$. Записать первые четыре члена ряда.

Решение. Первый член ряда получается из формулы общего члена ряда при $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{3\cdot 1+1} = \frac{1}{4}$. Второй член ряда получается из формулы общего члена ряда при $n = 2$: $u_2 = \frac{2}{3\cdot 2+1} = \frac{2}{7}$. Третий член ряда получается из формулы общего члена ряда при $n = 3$: $u_3 = \frac{3}{3\cdot 3+1} = \frac{3}{10}$. Четвёртый член ряда получается из формулы общего члена ряда при $n = 4$: $u_4 = \frac{4}{3\cdot 4+1} = \frac{4}{13}$.

Ответ: $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{2}{7}$, $u_3 = \frac{3}{10}$, $u_4 = \frac{4}{13}$.

Пример 1.9.2. Записать формулу общего члена ряда:

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \cdots$.

Решение.

1) Выпишем первые члены ряда, выделив в знаменателе множитель 2: $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 1}$, $u_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2\cdot 2}$, $u_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$, $u_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2\cdot 4}$ и т. д. В знаменателе каждой дроби второй множитель совпадает с номером члена ряда. Поэтому формула общего члена ряда имеет вид: $u_n = \frac{1}{2n}$. В знаменателе находятся последовательные значения чётных чисел. Как известно, $2n$ – это формула чётного числа.

2) Выпишем первые члены ряда: $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1^2+1}$, $u_2 = \frac{2}{5} = \frac{2}{2^2+1}$, $u_3 = \frac{3}{10} = \frac{3}{3^2+1}$, $u_4 = \frac{4}{17} = \frac{4}{4^2+1}$ и т. д. В числителе каждой дроби находится число, совпадающее с номером члена ряда. В знаменателе каждой дроби находится квадрат числа, совпадающего с номером члена ряда, к которому добавлена 1. Поэтому формула общего члена ряда имеет вид: $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

Ответ: 1) $u_n = \frac{1}{2n}$; 2) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

Пример 1.9.3. Найти сумму ряда: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}} + \cdots$.

Решение. Данный ряд является рядом геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -\frac{1}{3}$. Так как $|q| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится и его сумму находим по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$. Получаем: $S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Пример 1.9.4. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение.

1) Находим предел общего члена ряда при $n \to \infty$. Имеет место неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости разделим числитель и знаменатель дроби на n. Получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Необходимый признак сходимости ряда не выполнятся, следовательно ряд расходится.

2) Находим предел общего члена ряда при $n \to \infty$. Имеет место неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия этой неопределённости применим правило Лопиталя:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \ln 2} = 0.$

Необходимый признак сходимости ряда выполнятся, следовательно ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Ответ: 1) Не выполнятся; 2) выполнятся.

<u>Пример 1.9.5.</u> Исследовать ряды на сходимость, используя первый признак сравнения: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$.

<u>Решение.</u>

1) Так как $3n - 1 < 3n$, то общий член ряда $u_n = \frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} = $ $= v_n$. В качестве ряда сравнения с меньшими элементами выступает гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. Поэтому расходится и исходный ряд с большими элементами.

2) Так как $\sin\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$, то общий член ряда $u_n = \sin\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} = v_n$. В качестве ряда сравнения с большими элементами выступает обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится, поскольку $s = 2 > 1$. Поэтому сходится и исходный ряд с меньшими элементами.

Ответ: 1) Расходится; 2) сходится.

<u>Пример 1.9.6.</u> Исследовать ряды на сходимость, используя второй признак сравнения: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

<u>Решение.</u> В обоих примерах общий член ряда представлен как отношение двух многочленов. Поэтому в качестве ряда сравнения можно взять обобщённый гармонический ряд с общим членом $\frac{1}{n^s}$, где s – разность между показателем степени знаменателя и числителя.

1) Общий член исходного ряда $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. В качестве ряда сравнения возьмём обобщённый гармонический ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n^2}$, который сходится. Находим предел отношения общего члена исходного ряда к общему члену ряда сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, то исходный ряд, как и ряд сравнения, сходится.

2) Общий член исходного ряда $u_n = \frac{n}{n^2+1}$. В качестве ряда сравнения возьмём гармонический ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится. Находим предел отношения общего члена исходного ряда к общему члену ряда сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, то исходный ряд, как и ряд сравнения, расходится.

Ответ: 1) Сходится; 2) расходится.

<u>Пример 1.9.7.</u> Исследовать ряды на сходимость, используя признак Даламбера: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

<u>Решение.</u>

1) Общий член исходного ряда $u_n = \frac{n}{2^n}$. Тогда $(n+1)$-ый член ряда $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Составляем предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Так как значение предела меньше 1, то ряд сходится.

2) Общий член исходного ряда $u_n = \frac{3^n}{n!}$. Тогда $(n+1)$-ый член ряда $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$. Составляем предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Так как значение предела меньше 1, то ряд сходится.

Ответ: 1) Сходится; 2) сходится.

<u>Пример 1.9.8.</u> Исследовать ряды на сходимость, используя интегральный признак Коши–Маклорена: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

<u>Решение.</u>

1) Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ является положительной, непрерывной и убывающей при $x \geq 1$. Находим несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \frac{1}{3} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{d(3x-2)}{\sqrt{3x-2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{b\to\infty} \sqrt{3x-2}\Big|_1^b = \frac{2}{3} \lim_{b\to\infty} \left(\sqrt{3b-2} - 1\right) = \infty.$$

Так как предел равен бесконечности, то несобственный интеграл расходится и, следовательно, ряд также расходится.

2) Функция $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ является положительной, непрерывной и убывающей при $x \geq 1$. Находим несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Так как предел конечен, то несобственный интеграл сходится и, следовательно, ряд также сходится.

Ответ: 1) Расходится; 2) сходится.

<u>Пример 1.9.9.</u> Исследовать ряды на сходимость, используя радикальный признак Коши: 1) $\sum_{n=2}^{\infty} arcsin^{\mathrm{n}} \frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$.

<u>Решение.</u>

1) Общий член исходного ряда $u_n = arcsin^{\mathrm{n}} \frac{1}{n}$. Вычисляем предел:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{arcsin^{\mathrm{n}} \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} arcsin \frac{1}{n} = 0.$

Так как значение предела меньше 1, то ряд сходится.

2) Общий член исходного ряда $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$. Вычисляем предел:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2.$

Так как значение предела больше 1, то ряд расходится.

Ответ: 1) Сходится; 2) расходится.

<u>Пример 1.9.10.</u> Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

<u>Решение.</u> Применяем признак Лейбница. Проверяем первое условие: $\frac{1}{1^3} > \frac{1}{3^3} > \frac{1}{5^3} > \cdots$, то есть члены ряда по абсолютной величине убывают. Проверяем второе условие: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = 0$, то есть предел общего члена ряда по абсолютной величине равен нулю. Оба условия выполняются, поэтому ряд сходится.

Ответ: Сходится.

9.2. Степенные ряды

<u>Справочный материал.</u>

Степенным рядом называется выражение вида:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

где a_1, a_2, ..., a_n, ... действительные числа, называемые *коэффициентами степенного ряда*; x – переменная величина.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений переменной x, при которых степенной ряд сходится.

Радиусом сходимости степенного ряда называется такое число R, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал $(-R; R)$.

Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда.

1) Найти радиус сходимости степенного ряда по формулам:

$\mathrm{R} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $\mathrm{R} = \frac{1}{\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \sqrt[\mathrm{n}]{|a_n|}}$.

2) Записать интервал сходимости.

3) Исследовать сходимость ряда на концах интервала, то есть при $x = R$ и $x = -R$.

Степенным рядом называется также выражение вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Радиус сходимости этого ряда находят по тем же формулам, что и для ряда по степеням x. Интервал сходимости имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Пример 1.9.11. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Применяем алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда.

1) Находим радиус сходимости по формуле $\mathrm{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Учитывая, что $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, получаем: $\mathrm{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right| =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$

2) Записываем интервал сходимости ряда: $x \in (4-1; 4+1)$ или $x \in (3; 5)$.

3) Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = 5$ исходный ряд принимает вид:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Получили обобщённый гармонический ряд, который расходится. Значение $x = 5$ в область сходимости не включаем.

При $x = 3$ исходный ряд принимает вид:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Получили знакочередующийся числовой ряд. Для исследования его на сходимость воспользуемся признаком Лейбница. Проверяем первое условие: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \cdots$, то есть члены ряда по абсолютной величине убывают. Проверяем второе условие: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то есть предел общего члена ряда по абсолютной величине равен нулю. Оба условия выполняются, поэтому ряд сходится. Значение $x = 3$ включаем в область сходимости.

Таким образом, область сходимости ряда: $x \in [3; 5)$.

Ответ: $x \in [3; 5)$.

Упражнения

1. Дан общий член ряда $u_n = \frac{2n-1}{n^2}$. Записать первые четыре члена ряда.

2. Записать формулу общего члена ряда:

1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$.

3. Найти сумму ряда: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$.

4. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+1}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя первый признак сравнения: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$.

6. Исследовать ряды на сходимость, используя второй признак сравнения: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+1}$.

7. Исследовать ряды на сходимость, используя признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n(2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}$.

8. Исследовать ряды на сходимость, используя интегральный признак Коши–Маклорена: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

9. Исследовать ряды на сходимость, используя радикальный признак Коши: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}$.

10. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

11. Найти область сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^n}$.

Второй уровень сложности

9.1. Числовые ряды

Справочный материал.

Знакопеременным рядом называется ряд вида:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ – действительные числа произвольного знака.

Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.

Знакопеременный ряд сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Пример 2.9.1. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ряд является расходящимся обобщённым гармоническим рядом. Поэтому абсолютной сходимости исходный ряд не имеет.

Исследуем ряд на условную сходимость. Ряд является знакочередующимся. Применяем признак Лейбница. Проверяем первое условие: $\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>\cdots$, то есть члены ряда по абсолютной величине убывают. Проверяем второе условие: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, то есть предел общего члена ряда по абсолютной величине равен нулю. Оба условия выполняются, поэтому ряд сходится.

Так как исходный ряд сходится, а ряд из абсолютных величин его членов расходится, то исходный ряд сходится условно.

Ответ: Сходится условно.

9.2. Степенные ряды

Справочный материал.

Рядом Тейлора функции $f(x)$, бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0, называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Ряд Тейлора представляет разложение функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$ или разложение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Рядом Маклорена называется частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Ряд Маклорена представляет разложение функции $f(x)$ по степеням x или разложение функции $f(x)$ в окрестности нуля.

Пример 2.9.2. Разложить функцию $f(x) = x^4 - 4x^2$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$ и найти область сходимости.

Решение. Найдём значения функции и её производных в точке $x_0 = -2$:

$f(-2) = 0;$

$f'(x) = 4x^3 - 8x, f'(-2) = -16;$

$f''(x) = 12x^2 - 8, f''(-2) = 40;$

$f'''(x) = 24x, f'''(-2) = -48;$

$f^{(4)}(x) = 24, f^{(4)}(-2) = 24.$

Все производные, начиная с пятого порядка, равны нулю.

Подставляя значения функции и её производных в точке $x_0 = -2$ в ряд Тейлора, получаем:

$$x^4 - 4x^2 = 0 + \frac{-16}{1!}(x + 2) + \frac{40}{2!}(x + 2)^2 + \frac{-48}{3!}(x + 2)^3 +$$
$$+ \frac{24}{4!}(x + 2)^4 = -16(x + 2) + 20(x + 2)^2 - 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4.$$

Область сходимости: $x \in (-\infty; \infty)$.

Ответ: $-16(x + 2) + 20(x + 2)^2 - 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4$, $x \in (-\infty; \infty)$.

Упражнения

1. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$.

2. Разложить функцию $f(x) = x^3 - 2x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

Третий уровень сложности

9.1. Числовые ряды

Справочный материал. Используется справочный материал предыдущих уровней сложности.

Пример 3.9.1. Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

Решение.

1) Воспользуемся признаком Даламбера. Общий член исходного ряда $u_n = \frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$. Тогда $(n+1)$-ый член ряда $u_{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{\sqrt{(n+1)\cdot 3^{n+1}}} = \frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}$. Составляем предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}}{\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)\cdot 3^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{n\cdot 3^n}}{4n-3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n-3} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как значение предела меньше 1, то ряд сходится.

2) Воспользуемся радикальным признаком Коши. Общий член исходного ряда $u_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$. При вычислении предела имеет место неопределённость вида (1^∞). Для раскрытия этой неопределённости используем формулу второго замечательного предела. Получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = (1^\infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2}{n+1}\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}} = e^2.$$

Так как значение предела больше 1, то ряд расходится.

3) Ряд является знакочередующимся. Применяем признак Лейбница. Проверяем первое условие: $\frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12} > \frac{1}{20} > \frac{1}{30} > \cdots$, то есть члены ряда по абсолютной величине убывают. Проверяем второе условие: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, то есть предел общего члена ряда по абсолютной величине равен нулю. Оба условия выполняются, поэтому ряд сходится.

Ответ: 1) Сходится; 2) расходится; 3) сходится.

9.2. Степенные ряды

Справочный материал.

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Область сходимости ряда: $x \in (-\infty; \infty)$.

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Область сходимости ряда: $x \in (-\infty; \infty)$.

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Область сходимости ряда: $x \in (-\infty; \infty)$.

4) $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$
$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$.

Здесь m – любое действительное число. Область сходимости ряда: $x \in [-1; 1]$ при $m \geq 0$; $x \in (-1; 1]$ при $-1 < m < 0$; $x \in (-1; 1)$ при $m \leq -1$.

Этот ряд называется *биномиальным*.

Пример 3.9.2. Разложить функции в ряд Маклорена, используя известные разложения, и найти область сходимости:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$; 2) $f(x) = \frac{3}{4-x}$.

Решение.

1) Преобразуем функцию к виду $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. Воспользуемся известным разложением функции e^x, заменяя в нём x на $-\frac{x}{2}$. Получаем:

$$e^{-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{-\frac{x}{2}}{1!} + \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^3}{3!} \ldots + \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^n}{n!} + \cdots = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 -$$
$$- \frac{1}{2^3\cdot 3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}x^n.$$

Область сходимости ряда находим из условия $-\infty < -\frac{x}{2} < \infty$. Отсюда $-\infty < x < \infty$. Можно записать: $x \in (-\infty; \infty)$.

2) Преобразуем функцию к виду $f(x) = \frac{3}{4\left(1-\frac{x}{4}\right)} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1}$. Воспользуемся биномиальным рядом, то есть известным разложением функции $(1+x)^m$, заменяя в нём x на $-\frac{x}{4}$. Здесь $m = -1$. Получаем:

$$\frac{3}{4}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{-1}{1!}\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{-1\cdot(-2)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)\ldots(-1-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right) = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4^2}x^2 + \frac{1}{4^3}x^3 + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{1}{4^n}x^n + \cdots\right) = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}x^n.$$

Область сходимости ряда находим из условия $-1 < \frac{x}{4} < 1$. Отсюда $-4 < x < 4$. Можно записать: $x \in (-4; 4)$.

Ответ: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}x^n$, $x \in (-\infty; \infty)$; 2) $\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}x^n$, $x \in (-4; 4)$.

Упражнения

1. Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{\ln n}}$.

2. Разложить функции в ряд Маклорена, используя известные разложения, и найти область сходимости: 1) $f(x) = \sin x^2$; 2) $f(x) = \frac{1}{2+x}$.

3. Если l_0 – длина столба ртути в барометре при температуре $T = 0^0 C$, то имеем формулу $l_0 = \frac{l}{1+0{,}00018T}$. Упростить эту формулу с помощью ряда Маклорена. Сравнить результаты вычисления по обеим формулам для $l = 760$ мм, $T = 10^0$.

ГЛАВА 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Первый уровень сложности

10.1. Случайные события

Справочный материал.

Испытанием называется реализация определённого комплекса условий, опыта.

Событием называется результат испытания.

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдёт при выполнении комплекса условий.

Невозможным событием называется событие, которое заведомо не произойдёт при выполнении комплекса условий.

Случайным событием называется событие, которое может произойти, а может и не произойти. Используется обозначение: A, B, C, D и т.д.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать одно из них более возможным, чем другое.

Каждый из возможных результатов испытания называется *элементарным исходом*. Элементарные исходы, в которых наступает интересующее нас событие, называются *благоприятствующими* этому событию.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n – число всех элементарных исходов.

Вероятность события заключена между 0 и 1, то есть $0 \le P(A) \le 1$.

Вероятность достоверного события равна 1. Вероятность невозможного события равна 0.

Элементы комбинаторики.

Комбинаторика изучает количества комбинаций, которые можно составить из элементов.

Перестановками называются комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число перестановок вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Если в множестве из n элементов содержится k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент повторяется n_2 раз, ..., $k-ый$ элемент повторяется n_k раз, причём $n_1+n_2+\cdots+$ $+n_k=n$, то перестановки из n элементов называются *перестановками с повторениями*. Число перестановок с повторениями из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n(n_1;n_2;\ldots;n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число размещений вычисляется по формуле:

$$A_n^m=\underbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}_{m\text{ множителей}}.$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний вычисляется по формуле:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать A или B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то оба объекта A и B в указанном порядке можно выбрать $m\cdot n$ способами.

Пример 1.10.1. В урне 5 белых и 4 чёрных шара. Найти вероятность того, что наудачу вынутый шар будет чёрным.

Решение. Обозначим событие:

A – наудачу вынутый шар будет чёрным.

Число всех элементарных исходов $n=5+4=9$. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию, $m=4$. Тогда искомая вероятность: $P(A)=\frac{4}{9}$.

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Пример 1.10.2. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся числа очков, сумма которых равна 8.

Решение. Обозначим событие:

A – на верхних гранях появятся числа очков, сумма которых равна 8.

Число всех элементарных исходов можно найти по правилу произведения: $n=6\cdot6=36$. Распишем возможные исходы:

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	**62**
13	23	33	43	**53**	63
14	24	34	**44**	54	64
15	25	**35**	45	55	65
16	**26**	36	46	56	66

Здесь первая цифра обозначает число очков на первой кости, вторая цифра обозначает число очков на второй кости.

Далее находим число элементарных исходов, благоприятствующих событию. Для этого среди возможных исходов выберем те, у которых сумма цифр равна 8 (в таблице эти варианты выделены жирным цветом):

вариант 26, так как $2+6=8$;

вариант 35, так как $3+5=8$;

вариант 44, так как $4+4=8$;

вариант 53, так как $5+3=8$;

вариант 62, так как $6+2=8$.

Таким, образом, число элементарных исходов, благоприятствующих событию, $m=5$. Тогда искомая вероятность: $P(A)=\frac{5}{36}$.

Ответ: $\frac{5}{36}$.

<u>Пример 1.10.3.</u> Из урны, содержащей 4 перенумерованных шара, наудачу достают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: $1, 2, 3, 4$.

<u>Решение.</u> Обозначим событие:

A – номера вынутых шаров будут идти по порядку: $1, 2, 3, 4$.

Комбинации четырёх различных цифр отличаются только порядком расположения цифр. Поэтому для нахождения числа всех элементарных исходов используем перестановки: $n=P_4$. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию, $m=1$. Тогда искомая вероятность: $P(A)=\frac{1}{P_4}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$.

Ответ: $\frac{1}{24}$.

<u>Пример 1.10.4.</u> Дано 6 карточек с буквами "а", "а", "а", "з", "д", "ч". Наудачу одна за другой выбираются все 6 карточек и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово "задача".

<u>Решение.</u> Обозначим событие:

A – получится слово "задача".

Для нахождения числа всех элементарных исходов используем перестановки с повторениями, учитывая, что буква "а" повторяется 3 раза, остальные буквы не повторяются: $n=P_6(3;1;1)$. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию, $m=1$. Тогда искомая вероятность: $P(A)=\frac{1}{P_6(3;1;1)}=\frac{1}{\frac{6!}{3!\cdot1!\cdot1!}}=\frac{3!}{6!}=\frac{3!}{3!\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{1}{4\cdot5\cdot6}=\frac{1}{120}$.

Ответ: $\frac{1}{120}$.

<u>Пример 1.10.5.</u> Дано 5 карточек с буквами "о", "м", "е", "д", "т". Наудачу одна за другой выбираются 3 карточки и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово "дом".

<u>Решение.</u> Обозначим событие:

A – получится слово "дом".

Комбинации трёх различных букв из имеющихся пяти различных букв отличаются либо составом букв, либо их порядком. Поэтому для нахождения числа всех элементарных исходов используем размещения:

$n = A_5^3$. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию, $m = 1$. Тогда искомая вероятность: $P(A) = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{5\cdot4\cdot3} = \frac{1}{60}$.

Ответ: $\frac{1}{60}$.

Пример 1.10.6. В урне 3 белых и 5 чёрных шара. Из урны достают одновременно два шара. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение. Обозначим событие:

A – оба шара одного цвета (оба белые или оба чёрные).

Число всех элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 2 шара из 8 имеющихся шаров, то есть используем сочетания: $n = C_8^2$.

Далее находим число элементарных исходов, благоприятствующих событию. Если оба шара белого цвета, то их можно извлечь из имеющихся трёх белых шаров C_3^2 способами. Если оба шара чёрного цвета, то их можно извлечь из имеющихся пяти чёрных шаров C_5^2 способами.

Число элементарных исходов, благоприятствующих событию, находим по правилу суммы: $m = C_3^2 + C_5^2$.

Тогда искомая вероятность: $P(A) = \frac{C_3^2 + C_5^2}{C_8^2} = \frac{\frac{3!}{2!1!} + \frac{5!}{2!3!}}{\frac{8!}{2!6!}} = \frac{3+10}{28} = \frac{13}{28}$.

Ответ: $\frac{13}{28}$.

Пример 1.10.7. В ящике имеется 12 деталей, среди которых 8 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 7 деталей будет 5 окрашенных.

Решение. Обозначим событие:

A – среди наудачу извлечённых 7 деталей будет 5 окрашенных (и, следовательно, 2 неокрашенные).

Число всех элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 7 деталей из 12 имеющихся деталей, то есть используем сочетания: $n = C_{12}^7$.

Далее находим число элементарных исходов, благоприятствующих событию. Выбрать 5 окрашенных деталей из имеющихся 8 окрашенных деталей можно C_8^5 способами и выбрать остальные 2 неокрашенные детали из имеющихся 4 неокрашенных деталей можно C_4^2 способами. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию, находим по правилу произведения: $m = C_8^5 \cdot C_4^2$.

Тогда искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_4^2}{C_{12}^7} = \frac{\frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{\frac{12!}{7!5!}} = \frac{8!\cdot4!\cdot7!\cdot5!}{5!\cdot3!\cdot2!\cdot2!\cdot12!} = \frac{8!\cdot4!\cdot7!}{3!\cdot2!\cdot2!\cdot(8!\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12)} =$$

$$= \frac{4!\cdot(3!\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)}{3!\cdot2!\cdot2!\cdot(9\cdot10\cdot11\cdot12)} = \frac{4!\cdot7}{2!\cdot2!\cdot(9\cdot11)} = \frac{(2!\cdot3\cdot4)\cdot7}{2!\cdot2!\cdot(9\cdot11)} = \frac{14}{33}.$$

Ответ: $\frac{14}{33}$.

10.2. Случайные величины

Справочный материал.

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение, причём заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины обозначают прописными латинскими буквами: $X, Y, Z, \ldots$, а принимаемые ими значения – строчными латинскими буквами: $x_1, x_2, \ldots x_n$; $y_1, y_2, \ldots y_n$; $z_1, z_2, \ldots z_n$; ...

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга значения.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Для дискретной случайной величины X закон распределения можно задать в виде таблицы, где первая строка содержит все возможные значения случайной величины, вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, то есть $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения.

1. Значения функции распределения принадлежит отрезку $[0; 1]$, то есть $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, то есть, если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) <$ $< F(x_2)$.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключённое в интервале $(a; b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

5. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси Ox, то $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Математические операции над случайными величинами.

Пусть даны 2 случайные величины X и Y:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Y	y_1	y_2	...	y_m
p'	p'_1	p'_2	...	p'_m

1. Произведением CX случайной величины X на постоянную величину C называется случайная величина, которая принимает значения Cx_i с теми же вероятностями p_i, $i = \overline{1; n}$.

2. Степенью k случайной величины X, называется случайная величина, которая принимает значения x_i^k с теми же вероятностями p_i, $i = \overline{1;n}$.

3. Суммой (разностью, произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ $(x_i - y_j,\ x_i \cdot y_j)$ с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а случайная величина Y примет значение y_j, то есть $p_{ij} = P(X = x_i;\ Y = y_j)$. Если случайные величины X и Y независимы, то $p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot p_j^{'}$, $i = \overline{1;n}$, $j = \overline{1;m}$.

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Пусть задана дискретная случайная величина X:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех её значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для вычисления дисперсии удобно пользоваться следующей формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называется квадратный корень из её дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 1.10.8. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -2;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2} \text{ при } -2<x\le 2;\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключённое в интервале $(-1;1)$.

Решение. Используем свойство 3 функции распределения: $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$. Получаем:

$$P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 1.10.9. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2;\\ \frac{1}{16}(x^2-4x+4) \text{ при } 2<x\le 6;\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение меньше 5.

Решение. Используем определение функции распределения: $F(x)=$ $=P(X<x)$. Получаем:

$$P(X<5)=F(5)=\frac{1}{16}(5^2-4\cdot 5+4)=\frac{9}{16}.$$

Ответ: $\frac{9}{16}$.

Пример 1.10.10. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-3	-1	2	7
p	0,2	0,3	0,1	0,4

Решение. Используем формулу для нахождения математического ожидания дискретной случайной величины: $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$. Получаем:

$$M(X)=-3\cdot 0{,}2+(-1)\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}1+7\cdot 0{,}4=2{,}1.$$

Ответ: 2,1.

Пример 1.10.11. Найти математическое ожидание случайной величины $Z=3X-Y+2$, если известно, что $M(X)=2$, $M(Y)=1$.

Решение. Используем свойства 1, 2, 3 математического ожидания. Получаем:

$$M(Z)=M(3X-Y+4)=M(3X)+M(-Y)+M(4)=3M(X)-$$
$$-M(Y)+4=3\cdot 2-1+4=9.$$

Ответ: 9.

Пример 1.10.12. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

Решение. Пусть X – случайная величина числа очков, которые могут выпасть на первой игральной кости; Y – случайная величина числа очков, которые могут выпасть на второй игральной кости. Запишем законы распределения случайных величин X и Y:

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Вычислим математическое ожидание случайной величины X:

$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Законы распределения случайных величин X и Y совпадают, поэтому и математические ожидания этих величин совпадают, то есть $M(Y) = \frac{7}{2}$.

Так как случайные величин X и Y независимы, то по свойству 4 математического ожидания $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$.

Ответ: $\frac{49}{4}$.

<u>Пример 1.10.13.</u> Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-1	2	3	6
p	0,2	0,3	0,4	0,1

<u>Решение.</u> Используем формулу для нахождения дисперсии дискретной случайной величины: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Сначала находим математическое ожидание случайной величины X:

$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}1 = 2{,}2$.

Затем найдём математическое ожидание случайной величины X^2, используя математическую операцию 2 над случайными величинами:

$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 6^2 \cdot 0{,}1 = 8{,}6$.

Находим дисперсию:

$D(X) = 8{,}6 - 2{,}2^2 = 3{,}76$.

Для нахождения среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины используем формулу: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Получаем:

$\sigma(X) = \sqrt{3{,}76} \approx 1{,}94$.

Ответ: $D(X) = 3{,}76$; $\sigma(X) \approx 1{,}94$.

<u>Пример 1.10.14.</u> Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 5X - 2Y + 3$, если известно, что $D(X) = 1$, $D(Y) = 3$.

<u>Решение.</u> Используем свойства 1, 2, 3 дисперсии. Получаем:

$D(Z) = D(5X - 2Y + 3) = D(5X) + D(-2Y) + D(3) = 5^2 D(X) + (-2)^2 D(Y) + 0 = 25 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 37$.

Ответ: 37.

10.3. Элементы математической статистики

Справочный материал.

Статистической совокупностью называется множество однородных объектов.

Генеральной совокупностью называется статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов.

Выборочной совокупностью или выборкой называется множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объёмом генеральной совокупности называется число объектов этой совокупности. Используется обозначение: N.

Объёмом выборочной совокупности называется число объектов этой совокупности. Используется обозначение: n.

Пусть для изучения количественного признака X проводится ряд опытов. В каждом опыте величина X принимает числовое значение.

Вариантами называются различные значения признака X. Используется обозначение: x_i, $i = \overline{1, k}$.

Частотами называются числа, показывающие, сколько раз встречается каждая варианта. Используется обозначение: n_i, $i = \overline{1, k}$. Сумма всех частот равна объёму выборки: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Вариационным рядом называется последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке.

Относительными частотами называются отношения частот к объёму выборки. Обозначение: W_i, $i = \overline{1, k}$. Относительные частоты находят по формуле: $W_i = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1, k}$. Сумма относительных частот равна 1: $W_1 +$ $+W_2 + \dots + W_k = 1$.

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Эмпирической функцией распределения или функцией распределения выборки называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x; n – объём выборки.

Свойства эмпирической функции распределения.

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0; 1]$, то есть $0 \leq F^*(x) \leq 1$.

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$; если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x \geq x_k$.

Полигоном частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$.

Полигоном относительных частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1; W_1)$, $(x_2; W_2)$, ..., $(x_k; W_k)$.

В случае непрерывного признака интервал, в котором заключены наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала сумму частот вариант n_i, попавших в i-ый интервал.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$. Отношение $\frac{n_i}{h}$ называется *плотностью частоты*.

Гистограммой относительных частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{W_i}{h}$. Отношение $\frac{W_i}{h}$ называется *плотностью относительной частоты*.

Пусть выборка объёма n задана таблицей распределения:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Выборочной средней называется среднее арифметическое значений выборки. Используется обозначение: $\bar{x}_\text{В}$. Формула для нахождения выборочной средней имеет вид:

$$\bar{x}_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i.$$

Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней. Используется обозначение: $D_\text{В}$. Формула для нахождения выборочной дисперсии имеет вид:

$$D_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x}_\text{В})^2.$$

Для вычисления выборочной и генеральной дисперсий удобно пользоваться следующей формулой:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Пример 1.10.15. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	1	3	7	9
n_i	3	15	24	8

Найти распределение относительных частот.

Решение. Найдём объём выборки: $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3 + 15 +$ $+24 + 8 = 50$. Затем найдём относительные частоты по формуле $W_i = \frac{n_i}{n}$. Получаем: $W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{50} = 0{,}06$; $W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{15}{50} = 0{,}30$; $W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{24}{50} = 0{,}48$; $W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{8}{50} = 0{,}16$.

Запишем распределение относительных частот:

x_i	1	3	7	9
W_i	0,06	0,30	0,48	0,16

Выполним контроль вычислений. Для этого проверим, что сумма всех относительных частот равна 1. Получаем: $0{,}06 + 0{,}30 + 0{,}48 + 0{,}16 =$ $= 1$. Вычисления верные.

Ответ:

x_i	1	3	7	9
W_i	0,06	0,30	0,48	0,16

Пример 1.10.16. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	3	4	8	10
n_i	2	6	8	4

Решение. Найдём объём выборки: $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 6 + +8 + 4 = 20$.

Используем определение эмпирической функции распределения: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x; n – объём выборки.

Если $x \le 3$, то $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{0}{20} = 0$.

Если $3 < x \le 4$, то $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1$.

Если $4 < x \le 8$, то $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{2+6}{20} = 0{,}4$.

Если $8 < x \le 10$, то $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{2+6+8}{20} = 0{,}8$.

Если $x > 10$, то $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{2+6+8+4}{20} = 1$.

Аналитически функцию распределения можно записать следующим образом:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 3; \\ 0{,}1 \text{ при } 3 < x \le 4; \\ 0{,}4 \text{ при } 4 < x \le 8; \\ 0{,}8 \text{ при } 8 < x \le 10; \\ 1 \text{ при } x > 10. \end{cases}$$

Ответ: $F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 3; \\ 0{,}1 \text{ при } 3 < x \le 4; \\ 0{,}4 \text{ при } 4 < x \le 8; \\ 0{,}8 \text{ при } 8 < x \le 10; \\ 1 \text{ при } x > 10. \end{cases}$

Пример 1.10.17. Построить полигон частот и относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	8	10
n_i	6	18	4	12

Решение. Для построения полигона частот нужно построить точки, абсцисса которых равна значению варианты x_i, ордината равна значению частоты n_i, то есть построим точки $(1; 6)$, $(4; 18)$, $(8; 4)$, $(10; 12)$ и соединим их отрезками (рис. 1.10.1).

Для построения полигона относительных частот нужно построить точки, абсцисса которых равна значению варианты x_i, ордината равна значению относительной частоты W_i. Для этого найдём объём выборки: $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 6 + 18 + 4 + 12 = 40$. Затем найдём относительные частоты по формуле $W_i = \frac{n_i}{n}$. Получаем: $W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{40} = 0{,}15$; $W_2 = = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{40} = 0{,}45$; $W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{4}{40} = 0{,}10$; $W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{12}{40} = 0{,}30$. Далее построим точки $(1; 0{,}15)$, $(4; 0{,}45)$, $(8; 0{,}10)$, $(10; 0{,}30)$ и соединим их отрезками (рис. 1.10.2).

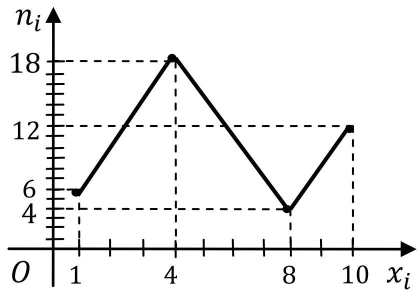

Рис. 1.10.1

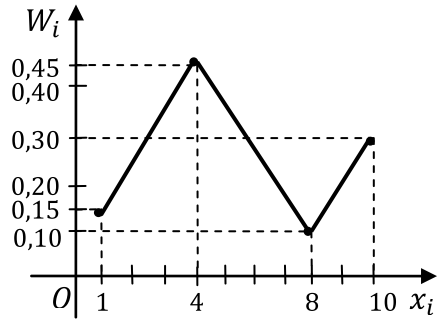

Рис. 1.10.2

Пример 1.10.18. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал, $(x_i; x_{i+1})$	$(1;3)$	$(3;5)$	$(5;7)$	$(7;9)$
Сумма частот вариант частичного интервала, n_i	10	28	42	20

Решение. Для построения гистограммы частот нужно найти длину каждого частичного интервала и плотности частот. Из распределения выборки видно, что длина каждого частичного интервала $h = 2$. Плотность частоты равна $\frac{n_i}{h}$. Сделаем расчётную таблицу:

Частичный интервал, $(x_i; x_{i+1})$	Сумма частот вариант частичного интервала, n_i	Плотность частоты, $\frac{n_i}{h}$
$(1;3)$	10	5
$(3;5)$	28	14
$(5;7)$	42	21
$(7;9)$	20	10

Затем строим прямоугольники, основаниями которых служат частичные интервалы длиною $h = 2$, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (рис. 1.10.3).

Для построения гистограммы относительных частот нужно найти длину каждого частичного интервала, относительные частоты и плотности относительных частот. Из распределения выборки видно, что длина каждого частичного интервала $h = 2$. Относительные частоты находим по формуле $W_i = \frac{n_i}{n}$, где n – объём выборки, то есть $n = 10 + 28 + 42 + 20 = 100$. Плотности относительных частот равны $\frac{W_i}{h}$. Сделаем расчётную таблицу:

Частичный интервал, $(x_i; x_{i+1})$	Сумма частот вариант частичного интервала, n_i	Относительная частота, $W_i = \frac{n_i}{n}$	Плотность относительной частоты, $\frac{W_i}{h}$
$(1;3)$	10	0,1	0,05
$(3;5)$	28	0,28	0,14
$(5;7)$	42	0,42	0,21
$(7;9)$	20	0,20	0,10

Затем строим прямоугольники, основаниями которых служат частичные интервалы длиною $h = 2$, а высоты равны отношению $\frac{W_i}{h}$ (рис. 1.10.4).

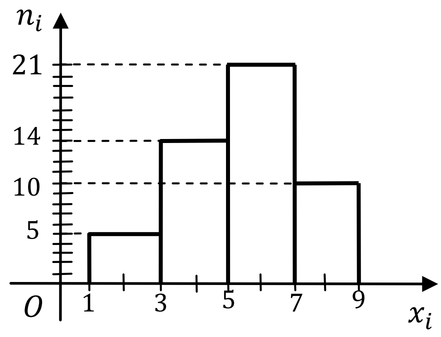

Рис. 1.10.3

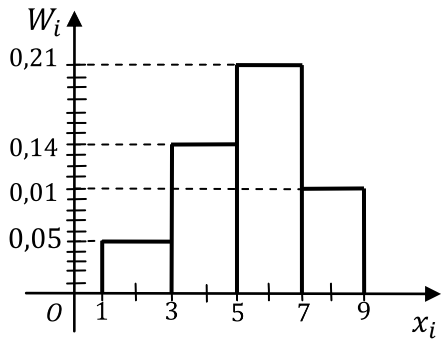

Рис. 1.10.4

Пример 1.10.19. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	-5	-4	2	8
n_i	3	7	24	16

Найти выборочную среднюю.

Решение. Сначала найдём объём выборки: $n = 3 + 7 + 24 + 16 = 50$. Выборочную среднюю находим по формуле $\bar{x}_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i$. Получаем: $\bar{x}_В = \frac{3\cdot(-5)+7\cdot(-4)+24\cdot 2+16\cdot 8}{50} = \frac{133}{50} = 2{,}66$.

Ответ: 2,66.

Пример 1.10.20. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	3	6	7
n_i	8	17	13	12

Найти выборочную дисперсию.

Решение. Сначала найдём объём выборки: $n = 8 + 17 + 13 + 12 = 50$. Выборочную дисперсию находим по формуле $D_В = \left(\overline{x^2}\right)_В - (\bar{x}_В)^2$.

Найдём выборочную среднюю:

$\bar{x}_В = \frac{8\cdot 1+17\cdot 3+13\cdot 6+12\cdot 7}{50} = \frac{221}{50} = 4{,}42$.

Затем найдём среднюю квадратов значений признака:

$\overline{x^2} = \frac{8\cdot 1^2+17\cdot 3^2+13\cdot 6^2+12\cdot 7^2}{50} = \frac{1217}{50} = 24{,}34$.

Находим выборочную дисперсию:

$D_В = 24{,}34 - 4{,}42^2 = 24{,}34 - 19{,}5364 = 4{,}8036$.

Ответ: 4,8036.

Упражнения

1. Игральная кость бросается 1 раз. Найти вероятность того, что появится не менее 5 очков.

2. Брошены 3 монеты. Найти вероятность того, что только на двух монетах появится герб.

3. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что верхних гранях появятся числа очков, сумма которых больше 8.

4. Дано 3 карточки с буквами "о", "к", "т". Наудачу одна за другой выбираются все 3 карточки и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово "кот".

5. Дано 5 карточек с буквами "о", "о", "р", "р", "т". Наудачу одна за другой выбираются все 5 карточек и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово "ротор".

6. Дано 4 карточки с буквами "о", "к", "р", "т". Наудачу одна за другой выбираются 3 карточки и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово "ток".

7. В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из урны достают одновременно два шара. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

8. В ящике имеется 9 деталей, среди которых 6 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 5 деталей будет 4 окрашенных.

9. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq -1; \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \text{ при } -1 < x \leq 3; \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключённое в интервале $(0; 1)$.

10. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq -1; \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \text{ при } -1 < x \leq 3; \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение меньше 2.

11. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-4	1	2	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

12. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 3X - Y + 1$, если известно, что $M(X) = 4$, $M(Y) = 2$.

13. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

14. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	5	6	8
p	0,1	0,3	0,4	0,2

15. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = X + 2Y - 1$, если известно, что $D(X) = 5$, $D(Y) = 3$.

16. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	3	6	10
n_i	3	7	11	4

Найти распределение относительных частот.

17. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	3	4	6
n_i	5	1	2	2

18. Построить полигон частот и относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	8	13	34	25	20

19. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал, $(x_i; x_{i+1})$	$(2;7)$	$(7;12)$	$(12;17)$	$(17;22)$
Сумма частот вариант частичного интервала, n_i	15	35	30	20

20. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	-3	1	2	4
n_i	17	30	50	3

Найти выборочную среднюю.

21. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	4	7
n_i	36	34	20	10

Найти выборочную дисперсию.

Второй уровень сложности

10.1. Случайные события

Справочный материал.

Суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Если два события A и B несовместные, то суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого. Используется обозначение: $A+B$.

Теорема 1. Сложение вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Противоположными называются два единственно возможных событий, образующих полную группу. Используется обозначение: $\bar{A}$.

Теорема 2. Сложение вероятностей противоположных событий. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном появлении этих событий. Используется обозначение: AB.

Условной вероятностью называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Используется обозначение: $P_B(A)$.

Теорема 3. Умножение вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Событие A называется *независимым* от события B, если появление события B не изменяет вероятности события A, то есть, если условная вероятность события A равна его безусловной вероятности: $P_B(A) = P(A)$.

Теорема 4. Умножение вероятностей независимых событий. Вероятность умножения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Теорема 5. Сложение вероятностей совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

<u>Пример 2.10.1.</u> В урне 7 синих, 2 зелёных и 3 жёлтых шара. Из урны достают один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет зелёным или жёлтым.

<u>Решение.</u> Обозначим события:

A – шар будет зелёным или жёлтым, A_1 – будет извлечён зелёный шар, A_2 – будет извлечён жёлтый шар.

Так как событие A состоит в появлении событий A_1 или A_2, то событие A можно записать как сумму событий A_1 и A_2. Получаем: $A = A_1 + A_2$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий $P(A) =$ $= P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, где $P(A_1)$ – вероятность того, что будет извлечён зелёный шар, $P(A_2)$ – вероятность того, что будет извлечён жёлтый шар. Подставляем числовые данные: $P(A_1) = \frac{2}{7+2+3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $P(A_2) =$ $= \frac{3}{7+2+3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Тогда $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

<u>Пример 2.10.2.</u> В урне 5 белых и 6 чёрных шаров. Из урны последовательно достают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

<u>Решение.</u> Обозначим события:

A – оба шара будут белыми, A_1 – первым достанут белый шар, A_2 – вторым достанут белый шар.

Так как событие A состоит в совместном появлении событий A_1 и A_2, то событие A можно записать как произведение событий A_1 и A_2. Получаем: $A = A_1 \cdot A_2$. По теореме умножения вероятностей $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) =$

$= P(A_1)P_{A_1}(A_2)$, где $P(A_1)$ – вероятность того, что первым достанут белый шар; $P_{A_1}(A_2)$ – вероятность того, что вторым достанут белый шар при условии, что первым достанут белый шар. Подставляем числовые данные: $P(A_1) = \frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$, $P_{A_1}(A_2) = \frac{5-1}{5+6-1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Тогда $P(A) = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{11}$.

Ответ: $\frac{2}{11}$.

<u>**Пример 2.10.3.**</u> В урне 3 белых и 8 чёрных шаров. Из урны достают один шар, отмечают его цвет и шар возвращают в урну. После этого из урны достают ещё один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.

<u>**Решение.**</u> Обозначим события:

A – оба шара будут белыми, A_1 – первым достанут белый шар,

A_2 – вторым достанут белый шар.

Так как событие A состоит в совместном появлении событий A_1 и A_2, то событие A можно записать как произведение событий A_1 и A_2. Получаем: $A = A_1 \cdot A_2$. По теореме умножения вероятностей независимых событий $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2)$, где $P(A_1)$ – вероятность того, что первым достанут белый шар; $P(A_2)$ – вероятность того, что вторым достанут белый шар. Подставляем числовые данные: $P(A_1) = \frac{3}{3+8} = \frac{3}{11}$, $P(A_2) = \frac{3}{3+8} = \frac{3}{11}$. Тогда $P(A) = \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{11} = \frac{9}{121}$.

Ответ: $\frac{9}{121}$.

<u>**Пример 2.10.4.**</u> Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,9. Оба стрелка производят по одному выстрелу. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

<u>**Решение.**</u> Обозначим события:

A – цель будет поражена только одним стрелком,

A_1 – первый стрелок поразит цель, A_2 – второй стрелок поразит цель.

Событие A означает следующее: если цель будет поражена первым стрелком, то вторым стрелком она поражена не будет, или, если цель будет поражена вторым стрелком, то первым стрелком она поражена не будет.

Так как событие A состоит в совместном появлении событий A_1, $\bar{A}_2$ или $\bar{A}_1$, A_2, то событие A можно записать следующим образом:
$A = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий и теореме умножения вероятностей независимых событий получаем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2),$$

где $P(A_1)$ – вероятность того, что первый стрелок поразит цель; $P(\bar{A}_2)$ – вероятность того, что второй стрелок не поразит цель; $P(\bar{A}_1)$ – вероятность того, что первый стрелок не поразит цель; $P(A_2)$ – вероятность того, что второй стрелок поразит цель.

Подставляем числовые данные: $P(A_1) = 0{,}8$; $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) =$ $= 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}9$. Тогда $P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}26$.

Ответ: 0,26.

10.2. Случайные величины

Справочный материал.

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная её функции распределения $F(x)$, то есть:

$$f(x) = F'(x).$$

Свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения является неотрицательной функцией: $f(x) \geq 0$.

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(a; b)$ равна определённому интегралу от её плотности распределения в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через её плотность распределения вероятностей по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

4. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения вероятностей равен 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется несобственный интеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется несобственный интеграл:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

или

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из её дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 2.10.5. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	1	3	4	6
p	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить её график.

Решение. Используем определение функции распределения: $F(x) = P(X < x)$ и теорему сложения вероятностей несовместных событий.

Если $x \leq 1$, то $F(x) = P(X < x) = P(X < 1) = 0$.

Если $1 < x \leq 3$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0{,}1$.

Если $3 < x \leq 4$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

Если $4 < x \leq 6$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 3) +$
$+P(X = 4) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$.

Если $x > 6$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 3) +$
$+P(X = 4) + P(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1$.

Аналитически функцию распределения можно записать следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 1; \\ 0{,}1 \text{ при } 1 < x \leq 3; \\ 0{,}3 \text{ при } 3 < x \leq 4; \\ 0{,}7 \text{ при } 4 < x \leq 6; \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

Строим график (рис. 2.10.1).

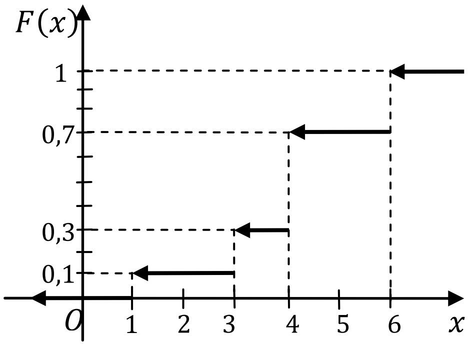

Рис. 2.10.1

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 1; \\ 0{,}1 \text{ при } 1 < x \leq 3; \\ 0{,}3 \text{ при } 3 < x \leq 4; \\ 0{,}7 \text{ при } 4 < x \leq 6; \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$

Пример 2.10.6. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 2; \\ \frac{1}{16}(x^2 - 4x + 4) \text{ при } 2 < x \leq 6; \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение не меньше 3.

Решение. Используем определение функции распределения: $F(x) =$ $= P(X < x)$ и теорему сложения противоположных событий. Так как события $X \geq 3$ и $X < 3$ противоположны, то $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 -$ $= F(3) = 1 - \frac{1}{16}(3^2 - 4 \cdot 3 + 4) = \frac{15}{16}$.

Ответ: $\frac{15}{16}$.

Пример 2.10.7. Случайная величина X задана функцией распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0; \\ \frac{1-\cos x}{2} \text{ при } 0 < x \leq \pi; \\ 1 \text{ при } x > \pi. \end{cases}$ Найти плотность распределения.

Решение. Учитывая, что плотность распределения равна производной от функции распределения, получаем:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \frac{\sin x}{2} \text{ при } 0 < x \le \pi; \\ 0 \text{ при } x > \pi. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \quad x \le 0; \\ \frac{\sin x}{2} \text{ при } 0 < x \le \pi; \\ 0 \text{ при } x > \pi. \end{cases}$

Пример 2.10.8. Плотность распределения случайной величины X задана на всей оси Ox формулой: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(-1; 1)$.

Решение. Используем свойство 2 плотности распределения. Получаем:

$$P(-1 < X < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} arctg\, x \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi} arctg\, 1 -$$
$$- \frac{1}{\pi} arctg(-1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2.10.9. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \quad x \le 1; \\ x - \frac{1}{2} \text{ при } 1 < x \le 2; \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

Решение. Используем свойство 3 плотности распределения.

Если $x \le 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0 +$
$+ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right)\Big|_{1}^{x} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$

Если $x > 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{2}^{x} 0dx = 0 +$
$+ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right)\Big|_{1}^{2} + 0 = 1.$

Аналитически функцию распределения можно записать следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \quad x \le 1; \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \text{ при } 1 < x \le 2; \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \quad x \le 1; \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \text{ при } 1 < x \le 2; \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

Пример 2.10.10. Задана плотность распределения случайной величины X: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1; \\ \frac{a}{x^4} \text{ при } x \geq 1. \end{cases}$ Найти значение параметра a.

Решение. Используем свойство 4 плотности распределения: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^4}dx = 0 + a\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4}dx =$$

$$= a\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} x^{-4}dx = a\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{1}^{b}\right) = -\frac{1}{3}a\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\Big|_{1}^{b}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}a\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{1^3}\right) = -\frac{1}{3}a(0-1) = \frac{1}{3}a.$$

Приравниваем полученное выражение к 1. Получаем: $\frac{1}{3}a = 1$. Отсюда $a = 3$.

Ответ: 3.

Пример 2.10.11. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0; \\ \frac{2}{25}x \text{ при} 0 < x < 5; \\ 0 \text{ при } x \geq 5. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения математического ожидания используем формулу: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Получаем:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx + \int_{0}^{5} x\cdot\frac{2}{25}xdx + \int_{5}^{\infty} x\cdot 0dx = 0 + \frac{2}{25}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{5} + 0 =$$

$$= \frac{10}{3}.$$

Для нахождения дисперсии используем формулу: $D(X) = = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$. Получаем:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx + \int_{0}^{5} x^2\cdot\frac{2}{25}xdx + \int_{5}^{\infty} x^2\cdot 0dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 =$$

$$= 0 + \frac{2}{25}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{5} + 0 - \frac{100}{9} = \frac{25}{2} - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}.$$

Для нахождения среднего квадратического отклонения используем формулу: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Получаем: $\sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$.

Ответ: $M(X) = \frac{10}{3}$; $D(X) = \frac{25}{18}$; $\sigma(X) = \frac{5}{3\sqrt{2}}$.

10.3. Элементы математической статистики

Справочный материал.

Если варианты x_i являются большими числами, то удобно перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$. В качестве C обычно принимают варианту, расположенную в середине вариационного ряда. Формула для нахождения выборочной средней имеет вид: $\bar{x}_В = C + \bar{u}_В$. Формула для вычисления выборочной дисперсии не меняется: $D_В(X) = D_В(U)$.

Если варианты x_i являются десятичными дробями с k знаками после запятой, то удобно перейти к условным вариантам $u_i = Cx_i$, где $C = 10^k$. Формула для нахождения выборочной средней имеет вид: $\bar{x}_{\text{В}} = \frac{1}{C}\bar{u}_{\text{В}}$. Формула для вычисления выборочной дисперсии имеет вид: $D_{\text{В}}(X) = \frac{1}{C^2}D_{\text{В}}(U)$.

<u>Пример 2.10.12.</u> Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1120	1130	1150	1180	1220
n_i	13	26	20	34	7

Найти выборочную среднюю.

<u>Решение.</u> Сначала найдём объём выборки: $n = 13 + 26 + 20 + 34 + +7 = 100$. Так как варианты x_i – большие числа, то перейдём к условным вариантам $u_i = x_i - 1150$. Запишем таблицу распределения условных вариант:

u_i	-30	-20	0	30	70
n_i	13	26	20	34	7

Найдём выборочную среднюю для условных вариант:

$\bar{u}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i = \frac{13\cdot(-30)+26\cdot(-20)+20\cdot 0+34\cdot 30+7\cdot 70}{100} = \frac{600}{100} = 6.$

Найдём искомую выборочную среднюю:

$\bar{x}_{\text{В}} = C + \bar{u}_{\text{В}} = 1150 + 6 = 1156.$

Ответ: 1156.

<u>Пример 2.10.13.</u> Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	0,02	0,03	0,05	0,07	0,10
n_i	4	12	20	9	5

Найти выборочную среднюю.

<u>Решение.</u> Сначала найдём объём выборки: $n = 4 + 12 + 20 + 9 + +5 = 50$. Так как варианты x_i являются десятичными дробями с двумя знаками после запятой, то перейдём к условным вариантам $u_i = 100x_i$. Запишем таблицу распределения условных вариант:

u_i	2	3	5	7	10
n_i	4	12	20	9	5

Найдём выборочную среднюю для условных вариант:

$\bar{u}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i = \frac{4\cdot 2+12\cdot 3+20\cdot 5+9\cdot 7+5\cdot 10}{50} = \frac{257}{50} = 5{,}14.$

Найдём искомую выборочную среднюю:

$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{1}{C}\bar{u}_{\text{В}} = \frac{1}{100}\cdot 5{,}14 = 0{,}0514.$

Ответ: 0,0514.

<u>Пример 2.10.14.</u> Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	3450	3460	3490	3510	3560
n_i	1	3	8	6	2

Найти выборочную дисперсию.

<u>Решение.</u> Сначала найдём объём выборки: $n = 1 + 3 + 8 + 6 + 2 =$

$= 20$. Так как варианты x_i являются большими числами, то перейдём к условным вариантам $u_i = x_i - 3490$. Запишем таблицу распределения условных вариант:

u_i	-40	-30	0	20	70
n_i	1	3	8	6	2

Найдём выборочную среднюю для условных вариант:
$\bar{u}_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i = \frac{1\cdot(-40)+3\cdot(-30)+8\cdot 0+6\cdot 20+2\cdot 70}{20} = \frac{130}{20} = 6{,}5$.

Затем найдём среднюю квадратов значений признака:
$\left(\overline{u^2}\right)_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i^2 = \frac{1\cdot(-40)^2+3\cdot(-30)^2+8\cdot 0^2+6\cdot 20^2+2\cdot 70^2}{20} = \frac{16500}{20} = 825$.

Найдём искомую выборочную дисперсию:
$D_В(X) = D_В(U) = \left(\overline{u^2}\right)_В - (\bar{u}_В)^2 = 825 - 6{,}5^2 = 782{,}75$.

Ответ: 782,75.

Пример 2.10.15. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	2,7	3,2	3,4	3,8	4,1
n_i	2	5	6	4	3

Найти выборочную дисперсию.

Решение. Сначала найдём объём выборки: $n = 2 + 5 + 6 + 4 + 3 = 20$. Так как варианты x_i являются десятичными дробями с одним знаком после запятой, то перейдём к условным вариантам $u_i = 10x_i$. Запишем таблицу распределения условных вариант:

u_i	27	32	34	38	41
n_i	2	5	6	4	3

Найдём выборочную среднюю для условных вариант:
$\bar{u}_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i = \frac{2\cdot 27+5\cdot 32+6\cdot 34+4\cdot 38+3\cdot 41}{20} = \frac{693}{20} = 34{,}65$.

Затем найдём среднюю квадратов значений признака:
$\left(\overline{u^2}\right)_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i^2 = \frac{2\cdot 27^2+5\cdot 32^2+6\cdot 34^2+4\cdot 38^2+3\cdot 41^2}{20} = \frac{24333}{20} = 1216{,}65$.

Находим выборочную дисперсию для условных вариант:
$D_В(U) = \left(\overline{u^2}\right)_В - (\bar{u}_В)^2 = 1216{,}65 - 34{,}65^2 = 16{,}0275$.

Найдём искомую выборочную дисперсию:
$D_В(X) = \frac{1}{C^2} D_В(U) = \frac{1}{10^2} \cdot 16{,}0275 = 0{,}160275$.

Ответ: 0,160275.

Упражнения

1. В урне 3 белых, 5 чёрных и 2 красных шаров. Из урны достают один шара. Найти вероятность того, что этот шар будет чёрным или красным.

2. В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из урны достают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

3. В урне 5 белых и 2 чёрных шаров. Из урны достают один шар, отмечают его цвет и шар возвращают в урну. После этого из урны достают ещё один шар. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

4. Узел содержит 3 независимо работающих детали. Вероятности отказа деталей соответственно равны 0,02; 0,01; 0,04. Найти вероятность отказа узла, если для этого достаточно, чтобы отказала хотя бы одна деталь.

5. Для сигнализации об аварии установлены 2 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

6. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	2	4	7
p	0,3	0,2	0,5

Найти функцию распределения и построить её график.

7. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq -1; \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \text{ при } -1 < x \leq 3; \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение не меньше $\frac{1}{2}$.

8. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0; \\ x \text{ при } 0 < x \leq 1; \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

9. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ \frac{3}{32}(4x - x^2) \text{ при } 0 \leq x \leq 4; \\ 0 \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0; 3)$.

10. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0; \\ 3x^2 \text{ при } 0 < x \leq 1; \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

11. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0; \\ ax^3 \text{ при } 0 < x \leq 2; \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найти значение параметра a.

12. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0; \\ 2x \text{ при } 0 < x \leq 1; \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

13. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	210	240	250	290	300
n_i	6	9	18	12	5

Найти выборочную среднюю.

14. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	0,01	0,03	0,08	0,11	0,12
n_i	2	6	7	4	1

Найти выборочную дисперсию.

Третий уровень сложности

10.1. Случайные события

Справочный материал.

Повторные независимые испытания.

Формула Бернулли. Если проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A постоянна, то вероятность того, что в n испытаниях событие A появится k раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях k раз, определяется приближённой формулой:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Локальная теорема Лапласа применяется при большом числе испытаний.

В Приложении 2 приведена таблица значений функции $\varphi(x)$. В таблице помещены значения для неотрицательных значений x. Для отрицательных значений x пользуются той же таблицей, учитывая, что $\varphi(x)$ – чётная функция. В таблице приведены значения лишь до $x = 3{,}99$. Для $x \geq 4$ $\varphi(x) \approx 0$.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, определяется приближённой формулой:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$, $x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функцию $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*. Интегральная теорема Лапласа применяется при большом числе испытаний.

В Приложении 3 приведена таблица значений функции $\Phi(x)$. В таблице помещены значения для неотрицательных значений x. Для отрицательных значений x пользуются той же таблицей, учитывая, что $\varphi(x)$ – нечётная функция. В таблице приведены значения лишь до $x = 5$. Для $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0{,}5$.

Формула Пуассона. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к 0 при неограниченном увеличении числа испытаний n, причём произведение np стремится к постоянному числу λ, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях k раз, определяется приближённой формулой:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Эту формулу называют *формулой Пуассона*.

<u>Пример 3.10.1.</u> Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Найти вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдут: 1) 8; 2) по крайней мере 8; 3) не менее 3.

<u>Решение.</u> Для решения задачи используем формулу Бернулли.

Одно семя рассматриваем как одно независимое испытание. Число всех независимых испытаний равно числу посеянных семян, то есть $n = 10$. По условию всхожесть семян составляет 70%. Поэтому вероятность всхожести каждого семени постоянна и равна 0,7, то есть $p = 0{,}7$. Соответственно, невсхожесть семян составляет 30%. Поэтому вероятность невсхожести каждого семени постоянна и равна 0,3, то есть $q = 0{,}3$.

а) Имеем следующие числовые данные: $n = 10$, $k = 8$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Подставляем в формулу Бернулли:

$$P_{10}(8) = C_{10}^{8} \cdot 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^2 \approx \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 0{,}0576 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}2333.$$

б) Выражение "по крайней мере 8" означает, что из 10 семян взойдут 8 или 9 или все 10. Здесь величина k принимает 3 значения: $k = 8$ или $k = 9$ или $k = 10$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий запишем выражение для искомой вероятности:

$$P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10).$$

Вероятность $P_{10}(8)$ вычислена в пункте а).

Вычислим вероятность $P_{10}(9)$. Имеем следующие числовые данные: $n = 10$, $k = 9$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Подставляем в формулу Бернулли:

$$P_{10}(9) = C_{10}^{9} \cdot 0{,}7^9 \cdot 0{,}3^1 \approx \frac{10!}{9! \cdot 1!} \cdot 0{,}0404 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}1212.$$

Вычислим вероятность $P_{10}(10)$. Имеем следующие числовые данные: $n = 10$, $k = 10$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Подставляем в формулу Бернулли:

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} \cdot 0{,}7^{10} \cdot 0{,}3^0 \approx \frac{10!}{10! \cdot 0!} \cdot 0{,}0282 \cdot 1 \approx 0{,}0282.$$

Окончательно:

$$P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) \approx 0{,}2333 + 0{,}1212 + 0{,}0282 = 0{,}3827.$$

в) Выражение "не менее 3" означает, что из 10 семян взойдут от 3 до 10. Здесь величина k принимает 8 значений. По теореме сложения вероятностей несовместных событий запишем выражение для искомой вероятности:

$$P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) +$$
$$+P_{10}(10).$$

Задачу рационально решить с помощью противоположного события. Для события "не менее 3" противоположным является событие "менее 3". Это событие означает, что из 10 семян взойдут 0 или 1 или 2.

Величина k принимает 3 значения. По теореме сложения вероятностей противоположных событий и теореме сложения вероятностей несовместных событий запишем выражение для искомой вероятности:

$1-\left(P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)\right)$.

Вычислим вероятность $P_{10}(0)$. Имеем следующие числовые данные: $n=10$, $k=0$, $p=0{,}7$, $q=0{,}3$. Подставляем в формулу Бернулли:

$P_{10}(0)=C_{10}^{0}\cdot 0{,}7^{0}\cdot 0{,}3^{10}\approx \frac{10!}{0!\cdot 10!}\cdot 1\cdot 0{,}000006\approx 0.$

Вычислим вероятность $P_{10}(1)$. Имеем следующие числовые данные: $n=10$, $k=1$, $p=0{,}7$, $q=0{,}3$. Подставляем в формулу Бернулли:

$P_{10}(1)=C_{10}^{1}\cdot 0{,}7^{1}\cdot 0{,}3^{9}\approx \frac{10!}{1!\cdot 9!}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}00002\approx 0{,}0001.$

Вычислим вероятность $P_{10}(2)$. Имеем следующие числовые данные: $n=10$, $k=2$, $p=0{,}7$, $q=0{,}3$. Подставляем в формулу Бернулли:

$P_{10}(2)=C_{10}^{2}\cdot 0{,}7^{2}\cdot 0{,}3^{8}\approx \frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot 0{,}49\cdot 0{,}00007\approx 0{,}0015.$

Окончательно:

$1-\left(P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)\right)\approx 1-(0+0{,}0001+0{,}0015)=$
$=0{,}9984.$

Ответ: 1) 0,2333; 2) 0,3827; 3) 0,9984.

Пример 3.10.2. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдёт 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,75.

Решение. Для решения задачи используем локальную теорему Лапласа. Одно семя рассматриваем как одно независимое испытание. Число всех независимых испытаний равно числу посеянных семян, то есть $n=500$. По условию вероятность всхожести семян равна 0,75, то есть $q=0{,}75$. Соответственно, вероятность невсхожести семян равна 0,25, то есть $p=0{,}25$.

Имеем следующие числовые данные: $n=500$, $k=130$, $p=0{,}25$, $q=0{,}75$.

Выполняем вычисления:

$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{130-500\cdot 0{,}25}{\sqrt{500\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=\frac{5}{\sqrt{93{,}75}}\approx \frac{5}{9{,}6825}\approx 0{,}52.$

Учитывая, что $\varphi(0{,}52)=0{,}3485$, находим искомую вероятность:

$P_{500}(130)\approx \frac{1}{\sqrt{500\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\varphi(0{,}52)\approx \frac{1}{9{,}6825}\cdot 0{,}3485\approx 0{,}036.$

Ответ: 0,036.

Пример 3.10.3. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдёт не менее 700.

Решение. Для решения задачи используем интегральную теорему Лапласа. Одно семя рассматриваем как одно независимое испытание. Число всех независимых испытаний равно числу посеянных семян, то есть $n=800$. По условию всхожесть семян составляет 90%. Поэтому вероятность всхожести каждого семени постоянна и равна 0,9, то есть $p=0{,}9$.

Соответственно, невсхожесть семян составляет 10%. Поэтому вероятность невсхожести каждого семени постоянна и равна 0,1, то есть $q = 0{,}1$.

Имеем следующие числовые данные: $n = 800$, $k_1 = 700$, $k_2 = 800$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$.

Выполняем вычисления:

$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{700 - 800\cdot 0{,}9}{\sqrt{800\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = \frac{-20}{\sqrt{72}} \approx -\frac{20}{8{,}4853} \approx -2{,}36;$

$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{800 - 800\cdot 0{,}9}{\sqrt{800\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = \frac{80}{\sqrt{72}} \approx \frac{80}{8{,}4853} \approx 9{,}43.$

Учитывая, что $\Phi(-2{,}36) = -0{,}4909$, $\Phi(9{,}43) = 0{,}5$, находим искомую вероятность:

$$P_{800}(700; 800) \approx \Phi(9{,}43) - \Phi(-2{,}36) = 0{,}5 + 0{,}4909 = 0{,}9909.$$

Ответ: 0,9909.

Пример 3.10.4. На базу отправлено 30 000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудет 4 повреждённых изделия.

Решение. Одно изделие рассматриваем как одно независимое испытание. Число всех независимых испытаний равно числу отправленных изделий, то есть $n = 30\,000$. По условию вероятность повреждения изделия равна 0,0002, то есть $p = 0{,}0002$. Так как число испытаний достаточно велико и вероятность наступления события в одном испытании достаточно мала, то для решения задачи используем формулу Пуассона.

Имеем следующие числовые данные: $n = 30\,000$, $k = 4$, $p = 0{,}0002$, $\lambda = np = 6$.

Выполняем вычисления:

$P_{30\,000}(4) \approx \frac{6^4}{4!} e^{-6} \approx 0{,}1339.$

Ответ: 0,1339.

10.2. Случайные величины

Справочный материал.

Законы распределения дискретных случайных величин.

1. *Биномиальное распределение.* Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A постоянна. Пусть X – дискретная случайная величина числа появлений события A в этих испытаниях. Она принимает значения $0; 1; 2; \ldots; n$ с вероятностями, вычисленными по формуле Бернулли: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Табличная форма биномиального распределения имеет вид:

$X = k$	0	1	2	…	k	…	n
$P(X = k)$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Для биномиального распределения $M(X) = np$, $D(X) = npq$.

2. *Распределение Пуассона.* Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A постоянна. Пусть вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к 0 при неограниченном увеличении числа испытаний n, причём произведение np стремится к постоянному числу λ. Пусть X – дискретная слу-

чайная величина числа появлений события A в этих испытаниях. Она принимает значения $0; 1; 2; 3; \ldots$ с вероятностями, вычисленными по формуле Пуассона: $P(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $k = 0; 1; 2; \ldots$.

Табличная форма распределения Пуассона имеет вид:

$X = k$	0	1	2	...	k	...
$P(X = k)$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

Для распределение Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda$.

3. *Геометрическое распределение.* Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A постоянна. Пусть X – дискретная случайная величина числа испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Она принимает значения $1; 2; 3; \ldots$ с вероятностями, вычисленными по формуле:
$P(X = k) = q^{k-1}p$, где $q = 1 - p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Табличная форма геометрического распределения имеет вид:

$X = k$	1	2	3	...	k	...
$P(X = k)$	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

Для геометрического распределения $M(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$.

4. *Гипергеометрическое распределение.* Это распределение используют при решении следующей задачи. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных. Из партии случайно отбирают n изделий, причём отобранное изделие перед отбором следующего в партию не возвращается. Требуется найти вероятность того, что среди отобранных изделий m стандартных. Пусть X – дискретная случайная величина числа m стандартных изделий среди n отобранных. Она принимает значения $0; 1; 2; \ldots; min(n, M)$ с вероятностями, вычисленными по формуле: $P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, где
$m = 0; 1; 2; \ldots; min(n, M)$.

Для гипергеометрического распределения $M(X) = n\frac{M}{N}$,
$D(X) = n\frac{M}{N-1}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n}{N}\right)$.

<u>Пример 3.10.5.</u> Игральная кость брошена 3 раза. Составить закон распределения случайной величины X, выражающей число появлений шестёрки. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

<u>Решение.</u> По условию X – случайная величина числа появлений шестёрки. При трёх бросаниях игральной кости шестёрка может ни разу не выпасть, или выпасть 1 раз, или 2 раза или 3 раза. Поэтому X может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Так как числа выпадений шестёрки независимы между собой, то вероятности этих значений найдём по формуле Бернулли. Будем учитывать, что вероятность появления шестёрки при одном бросании игральной кости составляет $p = \frac{1}{6}$ и вероятность непоявления шестёрки при одном бросании игральной кости составляет $q = \frac{5}{6}$. Получаем:

$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$;

$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$;

$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}$;

$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}$.

Составляем биномиальный закон распределения в виде таблицы:

X	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Выполним контроль вычислений. Для этого проверим, что сумма вероятностей всех значений случайной величины равна 1. Получаем: $\frac{125}{216}+$ $+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=1$. Вычисления верные.

Так как случайная величина X имеет биномиальное распределение, то её математическое ожидание находим по формуле: $M(X)=np$; дисперсию находим по формуле: $D(X)=npq$. Получаем: $M(X)=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$; $D(X)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$.

Среднее квадратическое отклонение находим по формуле: $\sigma(X)=$ $=\sqrt{D(X)}$. Получаем: $\sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{12}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Ответ:

X	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$M(X)=\frac{1}{2}$; $D(X)=\frac{5}{12}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

10.3. Элементы математической статистики

Справочный материал.

Пусть даны эмпирические частоты n_i и теоретические частоты n_i', вычисленные исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_i	n_1	n_2	...	n_s
n_i'	n_1'	n_2'	...	n_s'

Алгоритм проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию согласия Пирсона.

1) Вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\left(n_i-n_i'\right)^2}{n_i'}$.

2) Вычислить число степеней свободы $k=s-3$, где s – число различных вариант выборки.

3) Задать уровень значимости α. В качестве α обычно берут 0,05; 0,01 или 0,001.

4) По таблице Приложения 4 критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;k)$.

5) Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то гипотезу принимают. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то гипотезу отвергают.

Пример 3.10.6. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i', которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i'	10	24	34	80	18	22	12

Решение. Вычислим наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$. Для этого составим расчётную таблицу:

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$
1	14	10	4	16	1,6
2	18	24	-6	36	1,5
3	32	34	-2	4	0,118
4	70	80	-10	100	1,25
5	20	18	2	4	0,222
6	36	22	14	196	8,909
7	10	12	-2	4	0,333
Σ	200				$\chi^2_{\text{набл}}$ 13,932

Далее вычислим число степеней свободы: $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$.

По таблице Приложения 3 критических точек распределения χ^2, уровню значимости $\alpha = 0{,}05$, числу степеней свободы $k = 4$ найдём критическую точку: $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 4) = 9{,}5$.

Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем, то есть расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами значимо.

Ответ: Значимо.

Упражнения

1. В партии очень большого объёма имеется 95% небракованных изделий. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 5 изделий окажется: 1) менее 2 бракованных; 2) более двух бракованных.

2. Определить вероятность того, что среди 400 проб руды окажется 275 проб с промышленным содержанием металла, если вероятность промышленного содержания металла одинакова для каждой пробы и равна 0,7.

3. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется от 410 до 430 (включительно) точных.

4. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 2 000 деталей окажется 3 нестандартных.

5. Монета брошена 4 раза. Составить закон распределения случайной величины X, выражающей число появлений герба. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

6. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнётся. Составить закон распределения случайной величины X, выражающей число патронов, выданных стрелку. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

7. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения случайной величины X, выражающей число стандартных деталей среди отобранных. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

8. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i', которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

Заключение

В настоящее время в агропромышленном комплексе востребованы кадры, способные эффективно использовать имеющиеся технологии, а также создавать новые технологии. Создание технологий связано с разработкой математических моделей процессов или объектов и их дальнейшего исследования.

Математические модели разрабатываются при решении инженерных задач, задач экологии, биологии, химии, при этом используются методы аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики. Это говорит о важности математического образования, владения основами математического моделирования и математическими методами исследования созданных моделей.

С этой целью в учебно-методическое пособие включены задачи на математическое моделирование, где математические модели представлены в виде функциональных зависимостей характеристик изучаемых процессов или объектов. Причём в одних задачах модель дана и нужно выполнить её исследование, в других – модель требуется сначала составить, а затем выполнить её исследование.

Модели разнообразны: от линейной зависимости, когда применяются средства аналитической геометрии, до сложных зависимостей, содержащих производную неизвестной функции, когда применяются средства математического анализа и математическая модель выражается дифференциальным уравнением.

Для решения таких задач нужно владеть навыком применения математических методов к решению типовых задач дисциплины «Математика». В связи с этим в упражнения пособия включены типовые задачи, когда требуется, например, найти определить матрицы, составить уравнение прямой, найти производную функции, решить дифференциальное уравнение, разложить функцию в степенной ряд, найти вероятность случайного события.

Для включения в работу над упражнениями всех обучающихся, независимо от уровня их подготовки, каждая глава пособия разбита на три уровня сложности, включает справочный материал по теории и примеры, при этом обучающийся поэтапно продвигается к выполнению более сложных заданий и может оценить свой уровень формирования умений и навыков.

Пособие позволит обучающимся получить основательные умения и навыки в области математики, применять их при изучении специальных дисциплин, с пониманием читать математическую литературу, решать профессиональные задачи, подготовиться к текущему и итоговому контролю.

Библиографический список

1. Баврин, И. И. Высшая математика для педагогических направлений : учебник для бакалавров / И. И. Баврин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 568 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-12889-5. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468943.
2. Баврин, И. И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для вузов / И. И. Баврин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 397 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07021-7. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468944.
3. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учебное пособие / Г. Н. Берман. – 9-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2020. – 492 с. – ISBN 978-5-8114-4862-3. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/126705.
4. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для вузов : в двух частях. Часть 1 / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва : Мир и Образование, 2016. – 368 с.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для вузов : в двух частях. Часть 2 / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва : Мир и Образование, 2016. – 448 с.
6. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 406 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08389-7. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468330.
7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 479 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00211-9. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468331.
8. Гроссман, С. Математика для биологов: пер. с англ. / С. Гроссман, Дж. Тернер. – М.: Высшая школа, 1983. – 383 с.
9. Деменева, Н. В. Комплексные числа: учебное пособие / Н. В. Деменева ; Пермская ГСХА. – Пермь : Прокростъ, 2017. — 112 с. – URL: https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/.
10. Деменева, Н. В. Линейная алгебра : сборник задач / Н. В. Деменева ; ФГБОУ ВО Пермская ГСХА. – Пермь : Прокростъ, 2016. – 142 с. – URL: https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/.
11. Деменева Н. В., Аналитическая геометрия. Прямая линия на плоскости: учебное пособие / Н. В. Деменева; Пермский ГАТУ. – Пермь: Прокростъ, 2019. – 196 с. – URL: https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/.

12. Деменева Н. В., Аналитическая геометрия. Кривые второго порядка: учебное пособие / Н. В. Деменева; Пермский ГАТУ. – Пермь: Прокростъ, 2019. – 310 с. – URL: https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/.
13. Деменева Н. В., Аналитическая геометрия в пространстве: учебное пособие / Н. В.Деменева; Пермский ГАТУ. – Пермь: ИПЦ "Прокростъ", 2020. – 215 с. – URL: https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/.
14. Деменева Н. В., Прикладные задачи по теме "Производная функции" / Н. В. Деменева, С. Б. Югова. – Пермь: Изд-во ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА, 2011. – 115 с.
15. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – 14-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 240 с.
16. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие для вузов / Д. В. Клетеник. – 17-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 224 с. – ISBN 978-5-8114-1051-4. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/174993.
17. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 538 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-10004-4. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/475438.
18. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.
19. Нагибин, Ф. Ф. Экстремумы / Ф. Ф. Нагибин. – М.: «Просвещение», 1966. – 120 с.
20. Ноздрин, И. Н. Прикладные задачи по высшей математике / И. Н. Ноздрин, И. М. Степаненко, Л. К. Костюк. – Издательское объединение «Вища школа», 1976. – 176 с.
21. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : учебник : в 2 частях. Часть 1 / Д. Т. Письменный. – 14-е изд. – Москва: Айрис-Пресс, 2015. – 280 с.
22. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : учебник : в 2 частях. Часть 2 / Д. Т. Письменный. – 11-е изд. – Москва: Айрис-Пресс, 2015. – 252 с.
23. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 288 с.
24. Пономарёв, К. К. Составление дифференциальных уравнений / К. К. Пономарёв. – Минск: Издательство "Вышэйшая школа", 1973. – 560 с.
25. Привалов, И. И. Аналитическая геометрия : учебник для вузов / И. И. Привалов. – 40-е изд., стер. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 233 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-01262-0. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/469966.

26. Ризниченко, Г. Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии : учебное пособие для вузов / Г. Ю. Ризниченко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 181 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07037-8. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/470480.

27. Цубербиллер, О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии : учебное пособие / О. Н. Цубербиллер. – 34-е изд.,стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 336 с. – ISBN 978-5-8114-0475-9. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/167791.

Глава 1. Комплексные числа

Первый уровень сложности

1. 1) $x=-3, y=2$; 2) $x=6, y=0$; 3) $x=0, y=-1$. **2.** 1) 1; 2) $-i$. **3.** 1) $4+7i$; 2) -3; 3) $-2i$. **4.** 1) См. рис. 1.1.1; 2) см. рис. 1.1.2; 3) см. рис. 1.1.3.

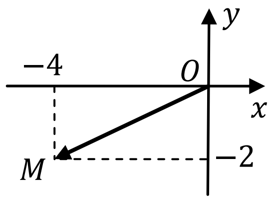

Рис. 1.1.1

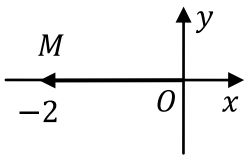

Рис. 1.1.2

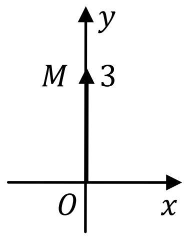

Рис. 1.1.3

5. $z_1+z_2=5+3i$, $z_1-z_2=-3+7i$, $z_1z_2=14+18i$, $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$.
6. 1) $x_{1,2}=\pm 4i$; 2) $x_{1,2}=-1\pm 3i$.

Второй уровень сложности

1. $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$, $z=2e^{\frac{\pi}{6}i}$. **2.** $z_1z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\frac{z_1}{z_2}=$ $=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$. **3.** -64. **4.** 1) $z_1=1$; $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3=-\frac{1}{2}-$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)\right)$.
5. $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $x_3=-i$.

Третий уровень сложности

1. 1) См. рис. 3.1.1; 2) см. рис. 3.1.2; 3) см. рис. 3.1.3; 4) см. рис. 3.1.4.

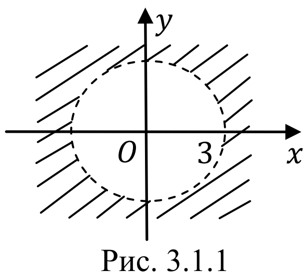

Рис. 3.1.1

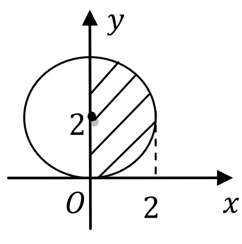

Рис. 3.1.2

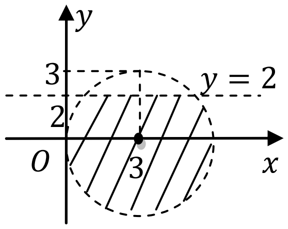

Рис. 3.1.3

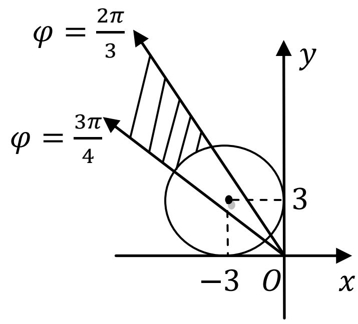

Рис. 3.1.4

Глава 2. Элементы линейной алгебры

Первый уровень сложности

1. $A+B=\begin{pmatrix}9 & 7\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 6 & 9\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}-10 & 5\\ -7 & 2\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$. **2.** $a_{11}=0$ означает, что особь первого вида себе подобных не потребляет; $a_{12}=1$ означает, что особь первого вида потребляет в среднем в день 1 единицу особей второго вида; $a_{13}=2$ означает, что особь первого вида потребляет в среднем в день 2 единицы особей третьего вида; $a_{21}=0$ означает, что особь второго вида не потребляет особей первого вида; $a_{22}=0$ означает, что особь второго вида себе подобных не потребляет; $a_{23}=1$ означает, что особь второго вида потребляет в среднем в день 1 единицу особей третьего вида; $a_{31}=3$ означает, что особь третьего вида потребляет в среднем в день 3 единицы особей первого вида; $a_{32}=0$ означает, что особь третьего вида не потребляет особей второго вида; $a_{33}=0$ означает, что особь третьего вида себе подобных не потребляет.

3. Общий энергетический доход определяется матрицей $AR=\begin{pmatrix}500\\ 100\\ 600\end{pmatrix}$, которая означает, что особь первого вида получает в день 500 калорий, особь второго вида получает в день 100 калорий и особь третьего вида получает в день 600 калорий. **4.** 11. **5.** 43. **6.** $(-4;1;3)$.

Второй уровень сложности

1. $M_{12}=-3$, $A_{12}=3$. **2.** 27. **3.** $A^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & -11/3 & 13/3\\ 4 & 7/3 & -8/3\\ -1 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}$.
4. $(2;-3;-5)$.

Третий уровень сложности

1. 1) $X=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{8}{5}\end{pmatrix}$; 2) $X=\begin{pmatrix}13 & -28\\ \frac{19}{2} & -\frac{41}{2}\end{pmatrix}$. **2.** $(-7;2;3)$.

Глава 3. Аналитическая геометрия

Первый уровень сложности

1. $4\sqrt{2}$. **2.** $(2;-3)$. **3.** 1) $\frac{11}{4}$; 2) угловой коэффициент не определён; 3) 0.
4. $y=\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}$. **5.** 1) См. рис. 1.3.1; 2) см. рис. 1.3.2; 3) см. рис. 1.3.3; 4) см. рис. 1.3.4. **6.** $y=2x-7$. **7.** $y=-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}$. **8.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$ (рис. 1.3.5); 2) данное уравнение невозможно преобразовать к уравнению прямой в отрезках; 3) $\frac{x}{1}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$ (рис. 1.3.6).

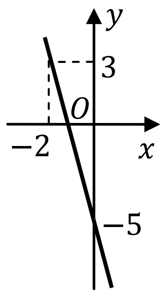

Рис. 1.3.1

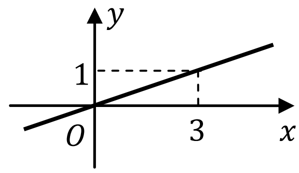

Рис. 1.3.2

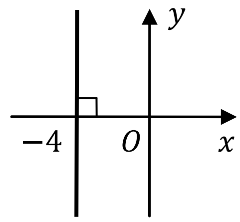

Рис. 1.3.3

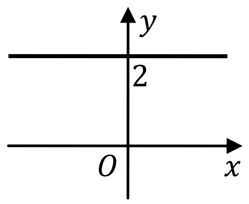

Рис. 1.3.4

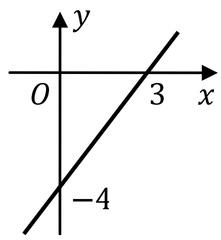

Рис. 1.3.5

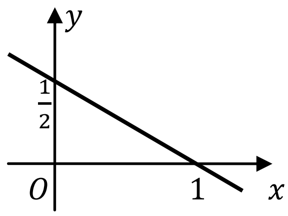

Рис. 1.3.6

9. $arctg\frac{7}{11}$. **10.** а) 5; б) $-\frac{1}{5}$. **11.** $\frac{13}{5}$. **12.** $(1;\ 2)$. **13.** $M(6;0)$; $y=-\frac{2}{3}x+4$.
14. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=\frac{64}{25}$. **15.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$. **16.** 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; 2) $(x-3)^2-\frac{(y+6)^2}{\frac{9}{16}}=1$.
17. 1) $y^2=\frac{6}{7}x$; 2) $\left(x+\frac{7}{3}\right)^2=6\left(y-\frac{2}{3}\right)$. **18.** 1) $a=5,\ b=3$; 2) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$. **19.** 1) $a=\sqrt{5},\ b=2$; 2) $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$. **20.** 1) Центр эллипса находится в начале координат, полуоси $a=3$, $b=2$ (рис. 1.3.7); 2) вершина параболы находится в начале координат, параметр $p=2$, фокус $F(1;0)$, директриса $x=-1$ (рис. 1.3.8); 3) центр окружности находится в начале координат, радиус $R=3$ (рис. 1.3.9); центр гиперболы находится в начале координат, полуоси $a=5$, $b=4$ (рис. 1.3.10). **21.** 7,5 см от вершины.
22. $(7;-3;5)$. **23.** 7. **24.** $\cos\alpha=\frac{11}{15}$, $\cos\beta=-\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$.
25. 1) $(2;6;4)$; 2) $(-4;2;2)$; 3) $(-2;8;6)$; 4) $\left(-\frac{9}{2};11;\frac{17}{2}\right)$. **26.** $\bar{a}=5\bar{\imath}+\bar{\jmath}-3\bar{k}$. **27.** 35. **28.** 19. **29.** $3\bar{\imath}+7\bar{\jmath}-8\bar{k}$. **30.** -6.

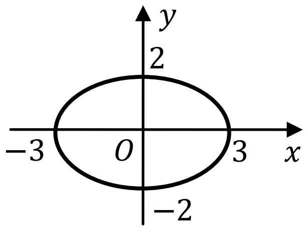

Рис. 1.3.7

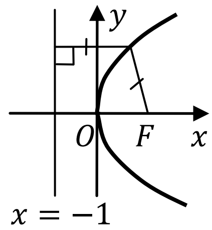

Рис. 1.3.8

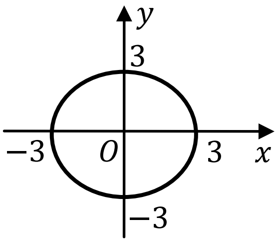

Рис. 1.3.9

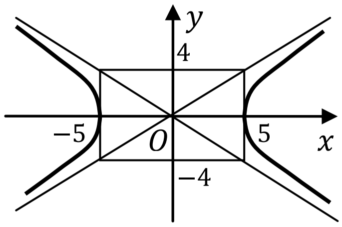

Рис. 1.3.10

Второй уровень сложности

1. $18 + 8\sqrt{5}$. **2.** $2\sqrt{10}$. **3.** $M(-3; 7)$. **4.** $(5;\ 5)$. **5.** 17. **6.** Точки не лежат на одной прямой. **7.** $4x + y - 3 = 0$. **8.** $y = -\frac{3}{7}x + \frac{9}{7}$. **9.** 1) См. рис. 2.3.1; 2) см. рис. 2.3.2; 3) см. рис. 2.3.3. **10.** $arctg\,\frac{11}{3}$. **11.** а) $-\frac{5}{3}$; б) $\frac{3}{5}$.

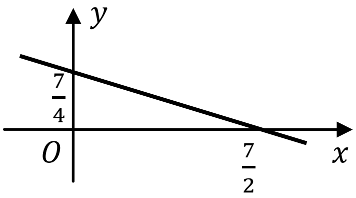

Рис. 2.3.1

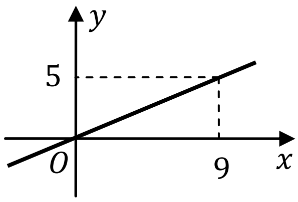

Рис. 2.3.2

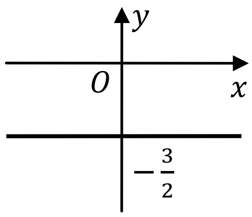

Рис. 2.3.3

12. $5x - 2y - 17 = 0$. **13.** $5x - 3y + 26 = 0$. **14.** $7x + 4y - 3 = 0$.
15. 1) $e = \frac{2}{3}$; 2) $x = \pm\frac{9}{2}$. **16.** 1) $e = \frac{4}{3}$; 2) $x = \pm\frac{9}{4}$; 3) $y = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$.
17. 1) $3x - 4y + 43 = 0$; 2) $5x - 3y - 13 = 0$. **18.** $arccos\,\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **19.** $\frac{25}{7}$.
20. $2\sqrt{6}$. **21.** 3.

Третий уровень сложности

1. См. рис. 3.3.1. **2.** $A\left(-2;\ 2\sqrt{3}\right)$. **3.** $3x + 4y - 2 = 0$. **4.** $\frac{8\sqrt{5}}{15}$. **5.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} =$ $= 1$. **6.** $\frac{\sqrt{26}}{6}$.

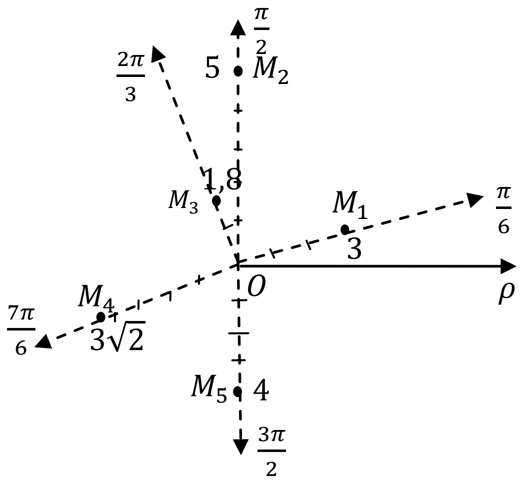

Рис. 3.3.1.

Глава 4. Введение в математический анализ

Первый уровень сложности

1. 1) -1; 2) 0; 3) $\frac{7}{13}$. **2.** 1) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$; 2) $x \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right]$; 3) $x \in \left[-\frac{2}{3}; 0\right]$. **3.** 1) Нечётная; 2) ни чётная, ни нечётная; 3) чётная. **4.** 1) См. рис. 1.4.1; 2) см. рис. 1.4.2; 3) см. рис. 1.4.3. **5.** 1) -5; 2) 0; 3) $\frac{5}{4}$; 4) ∞; 5) ∞; 6) 0; 7) $\frac{4}{7}$; 8) 0; 9) $\frac{7}{3}$; 10) $\frac{1}{6}$. **6.** 1) $x = -1$ – точка разрыва; 2) в точке $x = 4$ функция непрерывна. **7.** В точке $x = 0$ функция непрерывна. **8.** $U(t) = -0{,}7t + 12$. **9.** $V(t) = 0{,}2 \cdot 1{,}04^t$; $\approx$ через 6 лет.

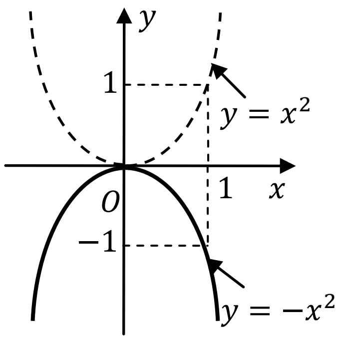

Рис. 1.4.1

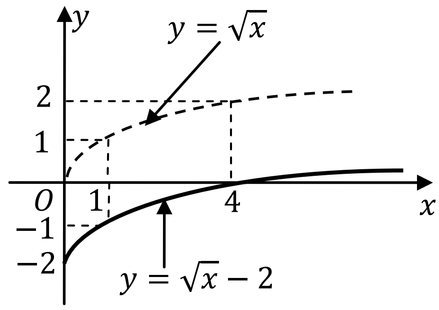

Рис. 1.4.2

Второй уровень сложности

1. 1) $\frac{a-1}{a+3}$; 2) $\frac{2a-1}{2a+3}$; 3) $\frac{2(a-1)}{a+3}$; 4) $\frac{a-2}{a+2}$; 5) $\frac{1-a}{1+3a}$; 6) $\frac{a+3}{a-1}$. **2.** 1) $x\epsilon[-2; 9]$; 2) $x \in (2; 3]$. **3.** 1) Нечётная; 2) не является ни чётной, ни нечётной; 3) нечётная. **4.** См. рис. 2.4.1. **5.** 1) 7; 2) $\frac{2}{5}$; 3) 7; 4) 9; 5) 2; 6) $\frac{1}{4}$. **6.** 1) e^3; 2) e^4; 3) e^{-5}. **7.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$; 2) точек разрыва нет.

Третий уровень сложности

1. 1) $y = \frac{x-2}{x+1}$; 2) $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$. **2.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4.

3. 1) $x = -4$ является точкой разрыва второго рода; 2) $x = 0$ является точкой разрыва первого рода; 3) $x = 1$ является точкой разрыва первого рода.

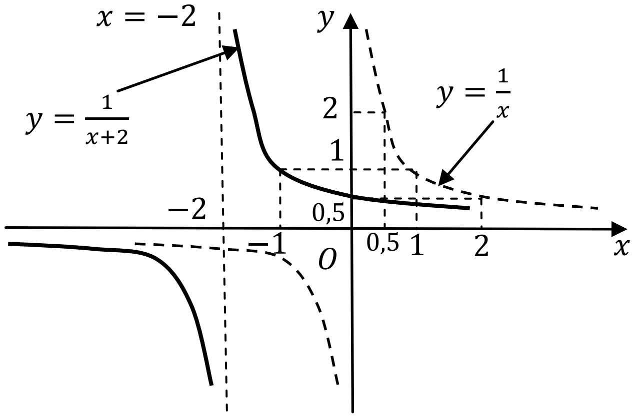

Рис. 1.4.3

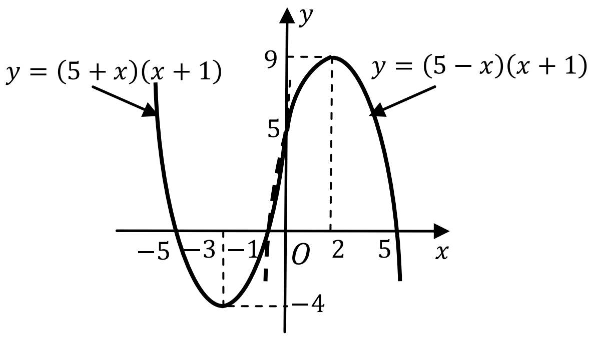

Рис. 2.4.1

Глава 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Первый уровень сложности

1. 1) 0; 2) $3x^2$; 3) $\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$; 4) $-\frac{4}{x^5}$; 5) $-\frac{2}{5x\sqrt[5]{x^2}}$; 6) $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x^2}\right)$; 7) $3^x(2 + (2x + 1)\ln 3)$; 8) $\frac{7}{(4x+1)^2}$. **2.** 1) $15(3x + 2)^4$; 2) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$; 3) $\frac{14}{(1-7x)\sqrt{1-7x}}$; 4) $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$; 5) $\frac{3}{(1+3x)\ln 2}$; 6) $-2\sin 2x$; 7) $\frac{2arctg\, x}{1+x^2}$.
3. $2\ln 3 \cdot 3^{2x-1}dx$. **4.** 1) При $x \in (-\infty; -1) \cup (3;\ \infty)$ функция возрастает; при $x \in (-1; 3)$ функция убывает; $y_{max} = f(-1) = \frac{5}{3}$, $y_{min} = f(3) = -9$; 2) при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 4) \cup (4;\ \infty)$ функция убывает; при $x \in (-2; 1) \cup$ $\cup\ (1; 2)$ функция возрастает; $y_{max} = f(2) = -1$, $y_{min} = f(-2) = -\frac{1}{9}$.
5. 1) $\frac{7}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$. **6.** $t_1 = 0$, $t_2 = 4$, $t_3 = 8$. **7.** $181{,}5\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}$. **8.** 61 г/см. **9.** 1) 8 000 бактерий в час; 2) 6 000 бактерий в час. **10.** $\alpha \approx 158^0$. **11.** Максимальная реакция первого лекарства составляет $e^{-1} \approx 0{,}37$, максимальная реакция второго лекарства составляет $4e^{-2} \approx 0{,}54$, то есть максимальная реакция выше у второго лекарства.

Второй уровень сложности

1. 1) $\frac{3\ln 7\cdot 7^{3x}}{2\sqrt{1+7^{3x}}}$; 2) $-\frac{3arctg^2(1-x)}{1+(1-x)^2}$. **2.** 1) $12(x-1)$; 2) $4\ln^2 3\cdot 3^{2x}$; 3) $-\frac{6}{(x+1)^3}$. **3.** $2-\frac{2}{3}t$. **4.** $-4\cos 2x\,dx^2$. **5.** 1) При $x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$ функция имеет выпуклость вверх; при $x\in\left(\frac{5}{3};\infty\right)$ функция имеет выпуклость вниз; $x=\frac{5}{3}$ – точка перегиба; 2) при $x\in\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\infty\right)$ функция имеет выпуклость вниз; при $x\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ функция имеет выпуклость вверх;
$x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ – точки перегиба.

Третий уровень сложности

1. $x^{x^2-3x}\big((2x-3)\ln x+x-3\big)$. **2.** $\frac{y-x^2}{y^2-x}$. **3.** $1{,}99375$. **4.** 1) $x=-4$ – вертикальная асимптота; $y=1$ – горизонтальная асимптота; наклонных асимптот нет; 2) $x=2$ – вертикальная асимптота, $y=x+2$ – наклонная асимптота, горизонтальных асимптот нет.

Глава 6. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Первый уровень сложности

1. 1) -9; 2) $-\frac{2}{5}$. **2.** 1) $z'_x=2y+1$, $z'_y=2x-6y$; 2) $z'_x=\frac{2x}{y}$, $z'_y=-\frac{x^2}{y^2}$; 3) $z'_x=\frac{5y}{(3x+y)^2}$, $z'_y=-\frac{5x}{(3x+y)^2}$; 4) $z'_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $z'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$. **3.** 1) $z''_{xx}=-6$, $z''_{xy}=2y$, $z''_{yy}=2x+4$; 2) $z''_{xx}=0$, $z''_{xy}=\frac{1}{\cos^2 y}$, $z''_{yy}=\frac{2x\,siny}{\cos^3 y}$. **4.** $ydx+$ $+(x+5)dy$. **5.** $y_{min}=f(-2;1)=-4$. **6.** $x=25\%$, $y=50\%$, $z=25\%$.

Второй уровень сложности

1. 1) Функция определена, когда $x^2+y^2\neq 4$; геометрически область определения функции образуют все точки, расположенные в плоскости Oxy за исключением точек окружности с центром в начале координат радиуса 2 (рис. 2.6.1); 2) функция определена, когда $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\geq 1$; геометрически область определения функции образуют все точки, расположенные вне эллипса с центром в начале координат, полуосями 3 и 2 и точки, расположенные на эллипсе (рис. 2.6.2); 3) функция определена, когда $-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$; геометрически область определения функции образуют все точки, расположенные внутри квадрата с вершинами в точках $(-1;-1)$, $(-1;1)$, $(1;1)$, $(1;-1)$ (рис. 2.6.3). **2.** $\frac{2-x}{y+3}$. **3.** 1) $4ydxdy+2xdy^2$.
4. $y=5{,}04x-8{,}21$.

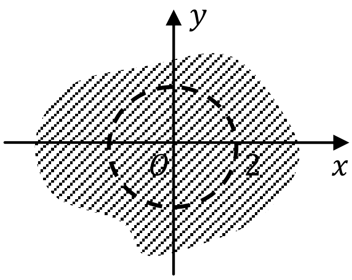

Рис. 2.6.1.

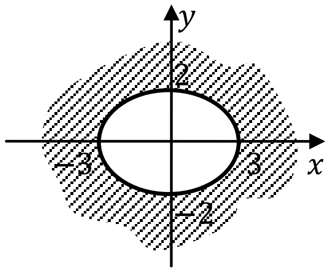

Рис. 2.6.2.

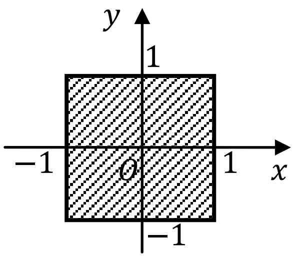

Рис. 2.6.3.

Третий уровень сложности

1. 1) Линия уровня определяется уравнением $y = -x + c$ и геометрически представляет множество параллельных прямых (рис. 3.6.1); 2) линия уровня определяется уравнением $y = x^2 - c$ и геометрически представляет множество парабол с вершинами в точке $(0; -c)$ и ветвями, симметричными относительно оси Oy (рис. 3.6.2); 3) линия уровня определяется уравнением $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$, $c > 0$ и геометрически представляет множество концентрических окружностей с центром в начале координат радиуса $\frac{1}{\sqrt{c}}$ (рис. 3.6.3).

2. 4. **3.** 1,08. **4.** $z_{min} = f(2; 2) = 4$, $y_{max} = f(-2; -2) = -4$.

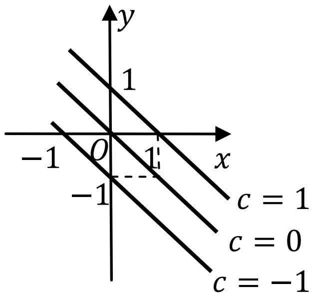

Рис. 3.6.1.

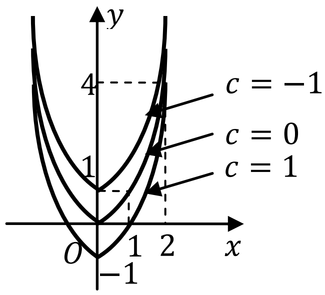

Рис. 3.6.2.

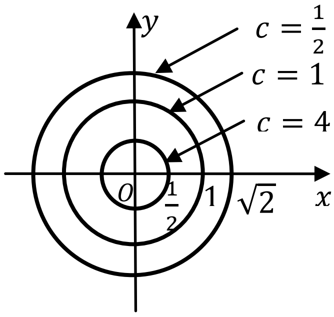

Рис. 3.6.3

Глава 7. Интегральное исчисление функции одной переменной

Первый уровень сложности

1. 1) $\frac{1}{3}x^3 + C$; 2) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$; 3) $-\frac{1}{5x^5} + C$; 4) $3\sqrt[3]{x} + C$; 5) $2x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$;

6) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+5\sin x+C$. **2.** 1) $\frac{1}{5}(x-1)^5+C$; 2) $\frac{3}{8}(2x+5)\sqrt[3]{2x+5}+C$; 3) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$; 4) $\frac{1}{3}tg3x+C$; 5) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 6) $\arcsin\frac{x}{2}+C$.
3. $x\ln(1+x^2)-2x+2arctgx+C$. **4.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) e^2-1.
5. 1) $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; 2) 0; 3) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{24}$; 4) $\frac{1}{5}(e-1)^5$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{\pi}{24}$. **6.** $2\ln 2-1$.
7. 1) $e-1$; 2) $\frac{125}{6}$. **8.** 162 см.

Второй уровень сложности

1. 1) $-\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}+C$; 2) $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$. **2.** 1) $\frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{4}+C$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{6}arctg\frac{\sqrt{2}x}{3}+$ $+C$; 3) $2x+3\ln|x-2|+C$; 4) $\frac{1}{2}x^2+2x+5\ln|x-1|+C$. **3.** $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+$ $+C$. **4.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$; 2) $7+2\ln 2$. **5.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$. **6.** 1) 12π; 2) $\frac{96\pi}{5}$; 3) $\frac{112\pi}{5}$.

Третий уровень сложности

1. $x+\cos x+C$. **2.** $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|$. **3.** $\frac{\pi}{12}$. **4.** $2\ln 3-1$.

Глава 8. Дифференциальные уравнения

Первый уровень сложности

1. 1) $y=Cx$; 2) $y=\frac{C}{1-x}-1$. **2.** $S(t)=25\cdot 2^{\frac{t}{5}}$. **3.** $x(t)=100\cdot 2^{\frac{t}{3}}$; количество бактерий увеличится в 8 раз. **4.** $T(t)=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{10}}$. **5.** 56,5 г.
6. $y=\frac{1}{12}x^4+C_1x+C_2$. **7.** $S(t)=\frac{1}{3}t^3$. **8.** 1) $y=e^x(C_1+C_2x)$;
2) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$; 3) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. **9.** $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

Второй уровень сложности

1. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{C}{x}$. **2.** $y=C_1x^2+C_2$. **3.** 1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}e^{3x}$;
2) $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{7}{74}\cos x+\frac{5}{74}\sin x$.

Третий уровень сложности

1. $y=Cx^3-x^2$. **2.** $v(t)=\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}\left(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}\right)\right)$. **3.** $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$.
4. 1) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x\right)e^x$; 2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+\frac{1}{2}x\sin x$.

Глава 9. Ряды

Первый уровень сложности

1. $u_1=1, u_2=\frac{3}{4}, u_3=\frac{5}{9}, u_4=\frac{7}{16}$. **2.** 1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$; 2) $u_n=\frac{n}{n+1}$. **3.** 2.
4. 1) Выполняется; 2) не выполняется. **5.** 1) Расходится; 2) сходится.
6. 1) Расходится; 2) расходится. **7.** 1) Сходится; 2) расходится.

8. 1) Расходится; 2) сходится. **9.** 1) Сходится; 2) сходится. **10.** Сходится.
11. 1) $x \in (-2; 2)$; 2) $x \in (-\infty; \infty)$; 3) $x \in [-5; 3)$.

Второй уровень сложности

1. 1) Сходится абсолютно; 2) расходится; 3) сходится условно.
2. $-1 + (x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$, $x \in (-\infty; \infty)$.

Третий уровень сложности

1. 1) Расходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) сходится.
2. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$, $x \in (-\infty; \infty)$; 2) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$, $x \in (-2; 2)$.
3. $l_0 \approx l(1 - 0{,}00018T)$; по первой формуле $l_0 \approx 758{,}634$, по второй формуле $l_0 \approx 758{,}632$.

Глава 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Первый уровень сложности

1. $\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{3}{8}$. **3.** $\frac{5}{18}$. **4.** $\frac{1}{6}$. **5.** $\frac{1}{30}$. **6.** $\frac{1}{24}$. **7.** $\frac{3}{7}$. **8.** $\frac{5}{14}$. **9.** $\frac{1}{4}$. **10.** $\frac{3}{4}$. **11.** 1,7. **12.** 11. **13.** 7.
14. $D(X) = 2{,}61$; $\sigma(X) \approx 1{,}62$. **15.** 17.
16.

x_i	2	3	6	10
W_i	0,12	0,28	0,44	0,16

17. $F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1; \\ 0{,}5 \text{ при } 1 < x \le 3; \\ 0{,}6 \text{ при } 3 < x \le 4; \\ 0{,}8 \text{ при } 4 < x \le 6; \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$

18. Полигон частот приведён на рис. 1.10.1. Полигон относительных частот приведён на рис. 1.10.2. **19.** Гистограмма частот приведена на рис. 1.10.3. Гистограмма относительных частот приведена на рис. 1.10.4. **20.** 0,91.
21. 3,3684.

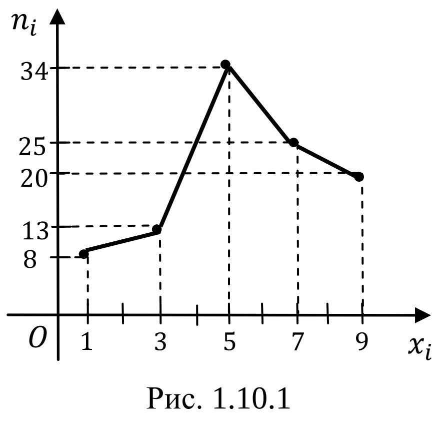

Рис. 1.10.1

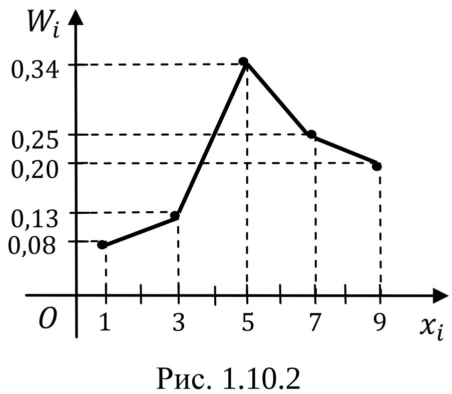

Рис. 1.10.2

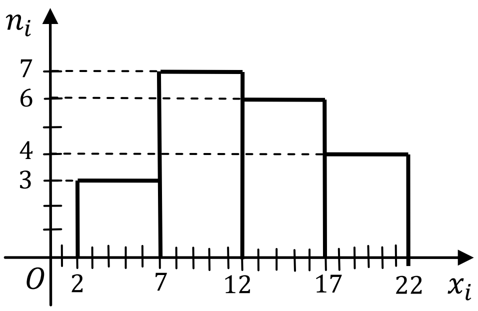

Рис. 1.10.3

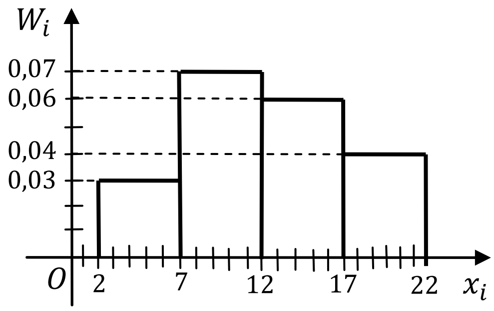

Рис. 1.10.4

Второй уровень сложности

1. $\frac{7}{10}$. **2.** $\frac{2}{7}$. **3.** $\frac{20}{49}$. **4.** $\approx 0{,}07$. **5.** $0{,}14$.

6. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2; \\ 0{,}3 \text{ при } 2 < x \le 4; \\ 0{,}5 \text{ при } 4 < x \le 7; \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases}$ (рис. 2.10.1). **7.** $\frac{5}{8}$. **8.** $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ 1 \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

9. $\frac{27}{32}$. **10.** $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \quad x \le 0; \\ x^3 \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

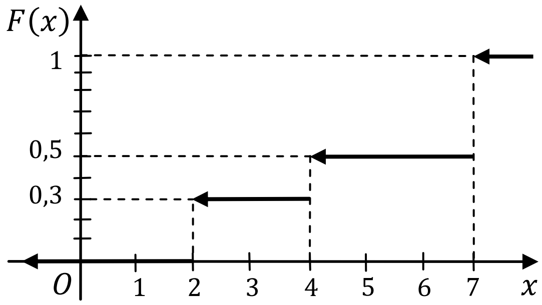

Рис. 2.10.1

11. $a = \frac{1}{4}$. **12.** $M(X) = \frac{2}{3}$; $D(X) = \frac{1}{18}$; $\sigma(X) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. **13.** 258. **14.** 0,001304.

Третий уровень сложности

1. 1) 0,9774; 2) 0,0012. **2.** 0,0374. **3.** 0,1311. **4.** 0,1804.

5.

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$M(X) = 2$; $D(X) = 1$; $\sigma(X) = 1$.

6.

X	1	2	3	...	k	...
p	0,2	0,16	0,128	...	$0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2$	...

$k = 1; 2; 3; \ldots$ $M(X) = 5$; $D(X) = 20$; $\sigma(X) = 2\sqrt{5}$.

7.

X	1	2	3
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$M(X) = 2$; $D(X) = \frac{2}{5}$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{5}}$. **8.** Случайно.

Приложение 2. Таблица значений функции φ(x)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3043	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 3. Таблица значений функции $\Phi(x)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192
0,12	0,0478	0,55	0,2088	0,98	0,3365	1,41	0,4207
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3888	1,65	0,4505
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,72	0,5000	1,94	0,4738	2,32	0,4898	2,76	0,4971
1,73	0,4582	1,95	0,4744	2,34	0,4904	2,78	0,4973
1,74	0,4591	1,96	0,4750	2,36	0,4909	2,80	0,4974
1,75	0,4599	1,97	0,4756	2,38	0,4913	2,82	0,4976
1,76	0,4608	1,98	0,4761	2,40	0,4918	2,84	0,4977
1,77	0,4616	1,99	0,4767	2,42	0,4922	2,86	0,4979
1,78	0,4625	2,00	0,4772	2,44	0,4927	2,88	0,4980
1,79	0,4633	2,02	0,4783	2,46	0,4931	2,90	0,4981
1,80	0,4641	2,04	0,4793	2,48	0,4934	2,92	0,4982
1,81	0,4649	2,06	0,4803	2,50	0,4938	2,94	0,4984
1,82	0,4656	2,08	0,4812	2,52	0,4941	2,96	0,4985
1,83	0,4664	2,10	0,4821	2,54	0,4945	2,98	0,4986
1,84	0,4671	2,12	0,4830	2,56	0,4948	3,00	0,49865
1,85	0,4678	2,14	0,4838	2,58	0,4951	3,20	0,49931
1,86	0,4686	2,16	0,4846	2,60	0,4953	3,40	0,49966
1,87	0,4693	2,18	0,4854	2,62	0,4956	3,60	0,499841
1,88	0,4699	2,20	0,4861	2,64	0,4959	3,80	0,499928
1,89	0,4706	2,22	0,4868	2,66	0,4961	4,00	0,499968
1,90	0,4713	2,24	0,4875	2,68	0,4963	4,50	0,499997
1,91	0,4719	2,26	0,4881	2,70	0,4965	5,00	0,500000
1,92	0,4726	2,28	0,4887	2,72	0,4967		
1,93	0,4732	2,30	0,4893	2,74	0,4969		

Приложение 4. Таблица критических точек

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41

18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0