МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА Д. Н. ПРЯНИШНИКОВА»

**М.В. Зильберман**

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
# И ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОСИСТЕМ

**Учебное пособие**

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2018

УДК 502:517
ББК 20.1:22.17
З-615

*Рецензенты:*

Ходяшев Н.Б., доктор технических наук, заведующий кафедрой химии и биотехнологии

Костылева Н.В., кандидат технических наук, начальник отдела прикладной экологии ФГБУ УралНИИ «Экология»

Зильберман М.В. Системный анализ и основы моделирования экосистем: учебное пособие / М.В. Зильберман. М-во с.-х. РФ, ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ.- Пермь: ИПЦ «Прокростъ», 2018. – 99 с. – 50 экз.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по программам бакалавриата и магистратуры направлений подготовки 06.03.01 и 06.04.01 Биология, 05.03.06 Экология и природопользование и может быть использовано при изучении дисциплин «Системный анализ и основы моделирования экосистем» и «Экологический прогноз и моделирование экосистем». В пособии рассматриваются современные подходы к использованию системного анализа как методологии выбора оптимальной стратегии управления объектами материального мира на основе анализа имеющихся экспериментальных данных. Особое внимание уделено особенностям применения методов системного анализа и построения математических моделей при решении экологических проблем.

Учебное пособие рекомендовано к изданию кафедрой экологии (протокол № 18 от 25.01.2018 г.) и методической комиссией факультета почвоведения, агрохимии, экологии и товароведения (протокол № 5 от 30.01.2018 г.).

Содержание

стр.
Введение 4
1. Теория операций 9
1.1 Типовая схема принятия решения 9
1.2 Типичные задачи теории операций 13
1.2.1 Транспортная задача 13
1.2.2 Задача о распределении удобрений 16
1.2.3 Задача об ирригации и складировании 18
1.2.4 Задача составления расписаний 24
1.3 Разрешение неопределенностей 27
1.3.1 Неопределенность целей 29
1.3.2 Природные неопределенности 39
1.3.3 Активный партнер 45
2. Теория управления 54
2.1 Управления 54
2.2 Цель управления и критерий качества 58
2.3 Оптимизация управления в случае стохастической задачи 59
3. Математические модели систем 66
3.1 Динамические модели 67
3.2Статистические модели 69
4. Динамика численности изолированных популяций 75
4.1Экспоненциальная модель роста 75
4.2Модель логистического роста 76
4.3 Модель с нижней границей численность популяции 79
5. Динамика численности взаимодействующих популяций 83
5.1 Модель хищник – жертва 83
5.2 Модель конкуренции популяций. 87
Заключение 90
Словарь терминов и определений 91
Список рекомендованных источников 99

## Введение

Основную задачу системного анализа можно определить как выбор оптимальной стратегии управления объектами материального мира.

В самом общем виде задачу управления можно трактовать как выбор одного решения из множества альтернатив. Задачи такого рода стары как мир, и на протяжении человеческой истории с большим или меньшим успехом решались с применением традиционных подходов, например, исходя из собственного опыта и интуиции, на основе анализа опыта предшественников и т.д. Для решения задач оптимального управления в современном мире в подавляющем большинстве случаев человеку, принимающему решение, вполне достаточно этих средств. Однако встречаются настолько сложные проблемы, когда человек, принимающий решение, испытывает сомнения в правильности своего выбора. Такие сомнения и являются основанием для попыток научного обоснования принятия решения, то есть применения методов системного анализа.

Приступая к изучению курса «Системный анализ и моделирование экологических систем», следует иметь в виду некоторые отличия этого курса от большей части преподаваемых учебных дисциплин.

Обычно учебная дисциплина связана с тем или иным разделом науки (химией, физикой, почвоведением и т.д.), и ее содержание определяется необходимостью изложения закономерностей, которые характерны для изучаемой группы объектов или явлений. Сами же объекты и явления, изучаемые в рамках отдельных дисциплин, группируются по тому или иному принципу, объединяющему эти объекты или явления.

Задача выявления и описания свойств изучаемого объекта является одной из задач системного анализа, однако, совокупность изучаемых свойств в этом случае определяется свойствами самого объекта и задачами исследования. Это обстоятельство определяет междисциплинарный характер системных исследований. Кроме того, собственно описание объекта исследования является не столько целью, сколько средством системного анализа, поскольку описание обычно используется для выбора тех или иных управленческих решений в отношении объекта исследования, то есть решений преследующих определенные цели.

С этой точки зрения выполнение системного анализа можно представить как последовательность, первым шагом которой является создание математической модели изучаемого объекта, вторым – определение цели (желаемых характеристик объекта), а третьим – решение математической задачи поиска условий, при которых достигается поставленная цель. Иными словами, в ходе системного анализа решаются три вопроса:

С чем имеем дело?

Чего хотим?

Как получить желаемое?

В ходе системного анализа, по сути, человек, принимающий решения, согласует свои субъективные устремления и возможности, которыми он располагает, с объективной реальностью (свойств объекта системного исследования).

Предшественником системного анализа принято считать теорию принятия решений, развитие которой определялось, с одной стороны, развитием математического аппарата, появлением приемов формализации, а с другой – новыми задачами, возникавшими в промышленности, военном деле и экономике. Особенно бурное развитие теории принятия решений началось после пятидесятых годов, когда на основе теории эффективности, теории игр, теории массового обслуживания появилась синтетическая дисциплина – «исследование операций».

Другим научным направлением, результаты которого широко используются в системном анализе, является теория управления. Развитию этого научного направления способствовало создание в начале XX века сложных технических систем и стремление к автоматизации работы этих систем.

Системный анализ в его современном виде явился синтезом теории исследования операций и теории управления. Возникновению и развитию системного анализа способствовали два обстоятельства. Во-первых, развитие научных знаний позволило создавать количественное описание (математические модели) самых разнообразных объектов и явлений материального мира. Во-вторых, появление в середине двадцатого века электронно-вычислительных машин (компьютеров) позволило создать эффективные вычислительные алгоритмы для работы с этими моделями.

Сегодня системный анализ – это обширная синтетическая дисциплина, включающая в себя целый ряд разделов, носящих характер самостоятельных научных дисциплин. Наиболее подробное и систематическое изложение данной дисциплины дано в «Математических задачах системного анализа» (Моисеев Н.Н., 1981). Последовательность изложения материала и многие примеры, изложенные в данном учебном пособии, заимствованы из этого источника.

Одной из сфер приложения системного анализа является управление экологическими системами. Целесообразность применения методов системного анализа и построения математических моделей при решении экологических проблем определяется, по крайней мере, следующими соображениями.

Во-первых, исходными данными о состоянии экологических систем являются результаты наблюдений, которые чаще всего представляют собой те или иные количественные показатели (концентрации компонентов природных сред, численность и возрастная структура популяций, интенсивность экзогенных воздействий и т.д.). В то же время результатами анализа состояния экологической системы должны служить оценки ее продуктивности, устойчивости, интенсивности процессов деградации и т.п. Простая необходимость преобразования одних количественных характеристик в другие предполагает наличие того или иного расчетного алгоритма, то есть математической модели.

Во-вторых, разработка предложений по улучшению состояния экологических систем (природоохранных мероприятий) должна осуществляться на основе тем или иным образом определенных целей, причем эти цели должны определяться в терминах состояния экологической системы, то есть цель должна быть функционалом математической модели экологической системы. Такой подход обеспечивает возможность оценки результатов природоохранного мероприятия в рамках тех же методов, которые применялись этапе исследования экологической системы.

В-третьих, природоохранная деятельность, как и любая другая, осуществляется в условиях ограничения используемых ресурсов. Поэтому оптимизация природоохранных мероприятий (достижение поставленных целей при минимальном потреблении ресурсов) является чрезвычайно важной проблемой, тем более что любое потребление ресурсов, в конечном счете, оборачивается негативным воздействием на окружающую среду.

Дисциплины «Системный анализ и основы моделирования экосистем» и «Экологический прогноз и моделирование экосистем» для студентов бакалавриата и магистратуры направлений подготовки Биология и Экология и природопользование направлены на формирование компетенций, связанных с готовностью творчески применять современные компьютерные технологии для анализа накопленной информации для решения самых разнообразных профессиональных задач.

В то же время автор полагал, что для студентов наиболее полезными окажутся подходы к постановке оптимизационных задач, а не математические методы решения этих задач.

# 1. Теория операций

## 1.1 Типовая схема принятия решения

Любая целенаправленная деятельность состоит из последовательности принятия решений и их исполнения. Принятие решения в свою очередь сводится к выбору одного варианта из альтернативного (взаимоисключающего) набора. В самом общем виде процедура принятия решения может быть формализована в виде схемы (рис. 1).

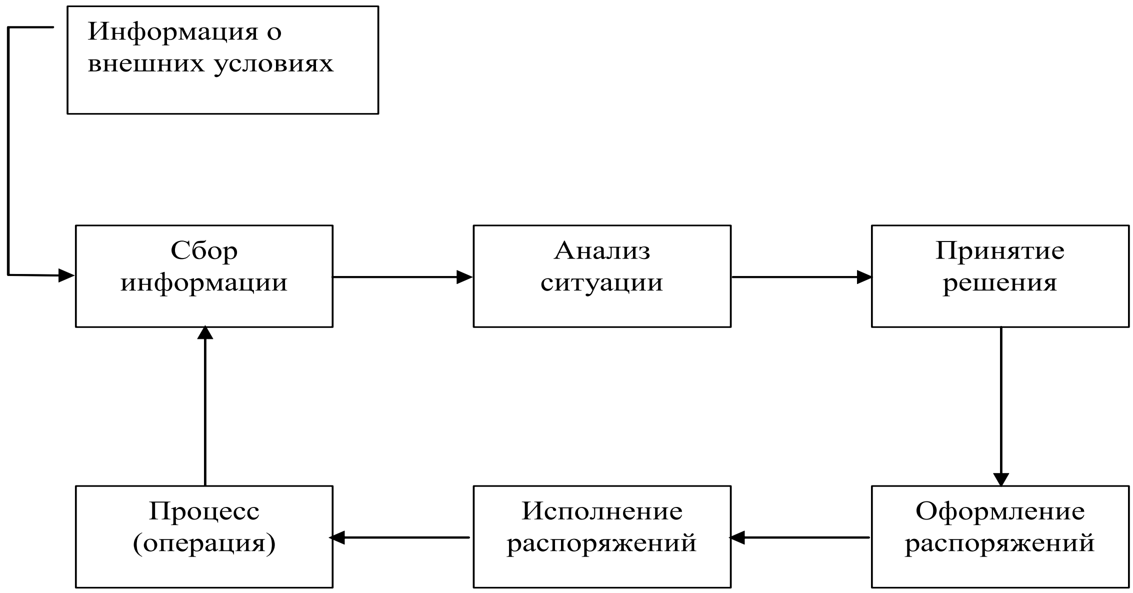



**Рис. 1 – Типовая схема принятия решений**

На рисунке 1 изображена схема процедуры принятия решения в отношении осуществления некоторого процесса (операции). В ходе этой процедуры осуществляется сбор информации о текущем состоянии процесса и внешних условиях. Далее эта информация подвергается анализу, в ходе которого анализируются последствия возможных решений. Эти последствия анализируются с точки зрения критерия оптимизации решения, который на стадии анализа считается заданным. Результаты анализа служат основой для принятия решения. Следует отметить, что на этой стадии критерий оптимизации, в принципе, может быть пересмотрен, что приведет к необходимости повторного анализа.

Этапы оформления распоряжений и их передачи на исполнение в принципе являются техническими, однако, качество и сроки выполнения этих действий имеют определенное влияние на качество управления. В самом деле, исполнение решения всегда отдалено от момента сбора информации определенным промежутком времени. Чем больше этот промежуток, тем в большей мере реальное состояние объекта отличается от того, для которого проводилась оптимизация решения. Поэтому несвоевременное исполнение даже очень хорошего решения может не привести к желаемым результатам. К тем же последствиям может привести и искажение принятого решения, возникшее на стадиях оформления и исполнения распоряжений.

Как следует из рисунка 1, методы системного анализа в типовой схеме принятия решения применяются в блоке анализа информации. По сути дела применение этих методов обеспечивает отбор наиболее эффективного решения на основе анализа входной информации (о состоянии процесса и внешних условиях).

Отметим, что применение методов системного анализа сопряжено с взаимодействием двух людей – человека, принимающего решения, и человека, проводящего системный анализ (исследователь операции). Человек, принимающий решение, представляет оперирующую сторону – лицо или группу лиц, в интересах которых проводится операция.

Именно оперирующая сторона формулирует общие представления о критерии оптимальности операции.

Человек, проводящий системный анализ (исследователь операций) действует в интересах оперирующей стороны, однако, его нельзя полностью отождествлять с оперирующей стороной. Его задачей является практическое выполнение исследование операции, которое обычно проводится в три последовательных этапа.

**Построение модели, то есть формализация изучаемого процесса или явления.** Построение модели сводится к математическому описанию процесса. Существенным является то, что получаемая модель относится именно к процессу, а не к операции. Одна и та же модель может использоваться для изучения разных по своим целям операций, относящихся к одному и тому же процессу.

**Описание операции – постановка задачи.** Оперирующая сторона (субъект, ассоциированный с системой) формулирует цель операции. Цель операции всегда предполагается внешним (экзогенным) фактором по отношению к операции, и должна быть формализована, то есть, представлена в виде функционала модели. Задача исследователя операции – провести необходимый анализ неопределенностей, ограничений и сформулировать, в конечном счете, (совместно с субъектом, в интересах которого проводится операция) некоторую оптимизационную задачу (1.1.1).

$$f(x) \to \max, \quad x \in G \tag{1.1.1}$$

Здесь $x$ – элемент некоторого нормированного пространства $E$, определяемого природой модели, $G \subset E$ - множество, которое может иметь сколь угодно сложную природу, определяемую структурой модели и особенностями исследуемой операции. Таким образом, задача исследования операции на этом этапе нами трактуется как некоторая оптимизационная проблема. В действительности задача исследователя операции несколько шире. Анализируя требования к операции, то есть цели, которых предполагает достичь оперирующая сторона, и те неопределенности, которые при этом неизбежно присутствуют, исследователь операции должен сформулировать цель операции на языке математики. Язык оптимизации здесь является естественным и удобным, но вовсе не единственно возможным. Примером другого подхода может служить определение цели операции как обеспечение устойчивости управления. Таким образом, представление цели в форме (1.1.1) не единственный способ формализации. Но оно удобно, поскольку методы оптимизации достаточно развиты, а язык оптимизации обладает, как мы увидим, достаточно большой степенью общности.

**Решение возникающей оптимизационной задачи.** Строго говоря, только этот третий, заключительный этап исследования операции, можно отнести к чисто математической задаче, хотя успех первых двух этапов во многом зависит от того, насколько хорошо исследователь операции владеет возможностями математического аппарата.

Для оптимизационной задачи могут потребоваться тонкие математические методы. Довольно часто сложность (связанная, например, с размерностью вектора $x$ или структурой множества $G$) не позволяет ограничиться чисто математическим исследованием задачи (1.1.1), доведение до конца исследования данной операции может потребовать разнообразных эвристических приемов. Заметим попутно, что трудности неформального анализа подчас являются определяющими. В конечном счете, именно формулирование гипотез и характер описания процесса могут стать решающими факторами эффективности анализа.

По этому поводу уместно сделать одно замечание. Один из крупнейших русских математиков А.М. Ляпунов считал необходимым любую, однажды поставленную физическую задачу изучать в дальнейшем как задачу «чистой математики», то есть не использовать никаких соображений неформального характера. В задачах исследования операций провести эту точку зрения очень трудно. Успешное завершение исследования требует использования на всех этапах неформальных рассуждений. Поэтому проверка качества решения, его соответствия исходной цели исследования превращается в важнейшую проблему теории.

## 1.2 Типичные задачи теории операций

В этом разделе рассматриваются несколько примеров, демонстрирующих те классы задач, с которыми имеет дело исследователь операций.

### 1.2.1 Транспортная задача

Исследуемая операция состоит в доставке грузов из некоторой совокупности исходных пунктов (например, складов) в некоторую совокупность конечных пунктов (например, к потребителям).

Введем следующие обозначения

| | |
|---|---|
| $X_i \quad i=1,2,\ldots N$ | количество груза, имеющегося в исходном пункте |
| $Y_j \quad j=1,2\ldots M$ | количество груза, которое необходимо доставить в конечный пункт |
| $x_{ij}$ | количество груза, перевозимого из пункта $i$ в пункт $j$ |

$d_{ij}$ стоимость перевозки единицы груза из пункта $i$ в пункт $j$

Исследование операции сводится к тому, чтобы определить объемы перевозок между пунктами $i$ и $j$ (величины $x_{ij}$).

Цель операции заключается в том, чтобы обеспечить каждого из потребителей грузом в количестве не меньшем, чем его потребность. Это условие формализуется серией неравенств (1.2.1), записанных для каждого потребителя.

$$\sum_i x_{ij} \geq Y_j \tag{1.2.1}$$

Однако, количество грузов в исходных пунктах ограничено и мы не можем вывести оттуда груза больше, чем имеется. Это означает, что искомые величины должны удовлетворять еще одной системе неравенств (1.2.2), записанных для каждого исходного пункта.

$$\sum_i x_{ij} \leq X_i \tag{1.2.2}$$

Удовлетворить условия (1.2.1) и (1.2.2), то есть составить план перевозок, обеспечивающих запросы потребителей, можно бесконечным числом способов. Для того чтобы исследователь операций мог выбрать определенное решение, то есть назначить определенные величины $x_{ij}$, должно быть сформулировано некоторое правило отбора, определяемое с помощью критерия, который отражает субъективное представление о цели. При этом мы получим лишь одну из возможных оценок выбранного решения.

Проблема критерия, как уже говорилось, решается независимо от исследователя операции – критерий должен быть задан оперирующей стороной. В данной задаче одним из возможных критериев будет стоимость перевозки. Она определяется очевидным образом.

$$J(x) = \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot x_{ij} \tag{1.2.3}$$

Теперь задачу о перевозках мы можем сформулировать следующим образом: определить величины $x_{ij} \geq 0$, удовлетворяющие ограничениям (1.2.1), (1.2.2) и доставляющие функции (1.2.3) минимальное значение.

Отметим, что данная постановка задачи приводит к линейной зависимости критерия оптимизации от определяемых величин (1.2.3). Задачи подобного рода называют задачами линейного программирования.

Ограничение (1.2.2) – это условие баланса, или закон сохранения, то есть представляет собой условие физического типа; условие (1.2.1) естественно назвать целью операции, ибо смысл операции в том и состоит, чтобы обеспечить запросы потребителей. Эти два условия составляют по существу модель операции. Реализация операции будет зависеть от критерия, то есть от того, как мы будем выбирать способ, при помощи которого будет обеспечено достижение цели операции. В частности, план, обеспечивающий минимизацию стоимости перевозок, может существенным образом отличаться от плана, обеспечивающего минимизацию времени операции.

Такое разделение имеет определенный смысл, поскольку в одной и той же модели операции (то есть модели целенаправленных действий, имеющих одну и ту же цель) могут возникать разные критерии – разные способы оценки пути достижения цели. Таким образом, критерий может фигурировать в различных ролях. Он может выступать и как способ формализации цели, и как принцип отбора (выбора) способа действий из числа допустимых, то есть удовлетворяющих ограничениям.

Отметим, что существуют условия, при которых рассмотренная операция неосуществима. Действительно, если общее количество грузов, сосредоточенных в исходных пунктах, меньше суммарной потребности, то ни один план перевозок не обеспечит выполнение условия (1.2.1). Разумеется, и в этих условиях оперирующей стороной будет найдено какое-то решение, однако, это будет уже другая операция, с другими целями и другим критерием оптимизации.

### 1.2.2 Задача о распределении удобрений

Будем рассматривать задачу распределения ограниченного количества удобрений между посевами нескольких различных сельскохозяйственных культур.

Введем следующие обозначения

| | |
|---|---|
| $s_i \quad i=1,2,\ldots N$ | площадь, занятая *i* культурой |
| $x_i \quad i=1,2,\ldots N$ | доза удобрения, внесенного под *i* культуру в расчете на единицу площади |
| $f_i(x_i) \quad i=1,2,\ldots N$ | зависимость урожайности *i* культуры от дозы внесенного удобрения |

Будем считать, что функции $f_i(x_i)$ являются нелинейными и имеют характер кривых, изображенных на Рис. 2.

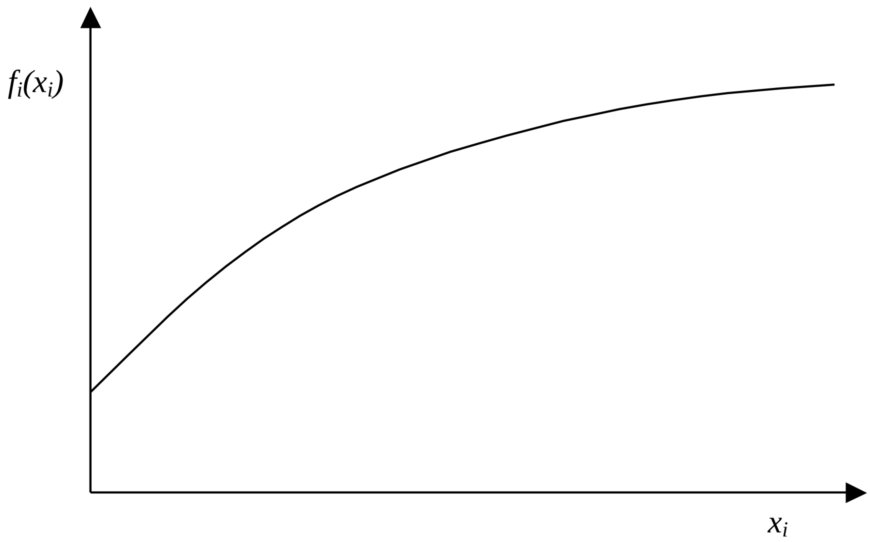



**Рис. 2 – Зависимость урожайности культуры от дозы внесенного удобрения**

Будем считать, что общая площадь посевов и имеющееся количество удобрений фиксированы. Эти условия формализуются неравенствами (1.2.4.) и (1.2.5)

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \le S \tag{1.2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot x_i \le X \tag{1.2.5}$$

где

$S$ – общая площадь посевов;

$X$ – имеющееся количество удобрений.

Будем также считать, что продукция должна быть получена во вполне определенном ассортименте. Это условие формализуется в виде серии отношений (1.2.6)

$$\frac{s_i \cdot f_i(x_i)}{s_1 \cdot f_1(x_1)} = \lambda_i, \quad i = 2,3,\ldots,n \tag{1.2.6}$$

В отношениях (1.2.6) λ – это заданные числа, определяющие структуру продукции.

Изменяя величины доз удобрения под различные культуры ($x_i$) и площади, занятые этими культурами ($s_i$), так, чтобы не нарушить условия (1.2.4) – (1.2.5), мы будем получать различные варианты плана использования общей посевной площади ($S$). Эти планы мы должны научиться сравнивать между собой. В качестве такого критерия можно использовать суммарный доход от продажи продукта за вычетом расходов на покупку удобрений (1.2.7).

$$J(x,s)=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\cdot s_i\cdot f(x_i)-q\cdot s_i\cdot x_i\right)$$
$$x=(x_1,\ldots,x_n) \qquad s=(s_1,\ldots,s_n) \tag{1.2.7}$$

где

$J(x,s)$ – суммарный доход от продажи продукта за вычетом расходов на покупку удобрений

$p_i$ – цена $i$ продукта;

$q$ – цена единицы удобрений.

В такой постановке задача сводится к отысканию такого способа распределения земель, который максимизирует функционал (1.2.7) при ограничениях (1.2.4) – (1.2.5). Заметим, что нелинейный характер зависимости урожайности от дозы удобрения (Рис. 2) приводит к том, что, начиная с определенной дозы, затраты на покупку удобрений перестанут окупаться приростом урожая. Поэтому в данной постановке задачи величина суммарного количества вносимых удобрений ($X$) может рассматривать не только как ограничение, но и как искомую величину.

Задачи, приводящие к нелинейным выражениям для критерия оптимизации, принято называть задачами нелинейного программирования.

### 1.2.3 Задача об ирригации и складировании

Рассмотрим теперь более сложную задачу, в условиях которой присутствуют случайные величины. Она является упрощенным вариантом задачи о распределении инвестиций на создание зон поливного земледелия и строительство складов. Задача является многошаговой задачей принятия решений (в том смысле, что мы получаем некоторый динамический процесс, развертывающийся во времени), поскольку планирование инвестиций производится на ряд лет вперед.

Случайными факторами являются погодные условия, которые определяют случайный характер урожайности.

Введем следующие обозначения:

$p$ – урожайность на богарных землях (без искусственного орошения);

$q$ – урожайность на поливных землях;

$F_{p}$ – функция распределения урожайности на богарных землях;

$F_q$ – функция распределения величины урожайность на поливных землях;

$S(n)$ – площадь богарных земель;

$s(n)$ – площадь поливных в год;

$\Phi(n)$ – потребность в зерне;

$n$ – номер года планирования.

Будем считать, что функции распределения урожайности на богарных и поливных землях известны, также как известна общая площадь сельскохозяйственных угодий и удовлетворяет соотношению (1.2.8), а суммарный урожай будет случайной величиной, определяемой выражением (1.2.9), функцию распределения которой мы можем вычислить.

$$S^*(n) = S(n) + s(n) \qquad (1.2.8)$$

$$\Phi^+(n) = p \cdot S(n) + q \cdot s(n) \qquad (1.2.9)$$

Разность между фактическим урожаем и потребностью в зерне может быть как положительной, так и отрицательной. Если эта разность положительна, то избыток урожая мы можем отправить на склад (элеватор); если отрицательны – мы можем взять недостающий продукт со склада. Эта величина должна удовлетворять некоторым очевидным соотношениям. Так, на склад мы не можем отправить количество зерна, большее тех свободных емкостей, которыми в данный момент располагают склады. В свою очередь, величина этих свободных (или резервных) емкостей зависит от предыстории, то есть от того, какое количество зерна в предыдущие годы мы брали со склада или отправляли на склад. Кроме того, объем складов зависит от того, какие инвестиции мы направляли на строительство складов. Точно также количество зерна, которое мы можем взять со складов, зависит от того, сколько зерна там в данный год хранится, то есть от предыстории процесса. Эти соображения формализуются в виде выражения (1.2.10)

$$Q(n)=\begin{cases}\min\left(\Phi^{+}(n)-\Phi(n),G(n)-R(n-1)\right) & \text{если} \quad \Phi^{+}(n)\geq\Phi(n)\\ \max\left(\Phi^{+}(n)-\Phi(n)-R(n-1)\right) & \text{если} \quad \Phi^{+}(n)<\Phi(n)\end{cases} \tag{1.2.10}$$

где *Q(n)* – количество зерна, которое мы можем поместить на склад либо взять со склада;

*R(n-1)*– количество зерна, которое находилось на складе в предшествующий год;

*G(n)*– суммарная емкость складов в текущем году.

Кроме того, все величины *Q, R, G, Ф* (вычисленные в одних и тех же единицах – кубометрах или тоннах) должны очевидно удовлетворять динамическим соотношениям (1.2.11) и (1.2.12)

$$G(n)=G(n-1)+\frac{x(n-1)}{C_x} \tag{1.2.11}$$

$$R(n)=R(n-1)+Q(n) \tag{1.2.12}$$

где

*x(n-1)* – капитальные затраты на строительство элеваторов;

$C_x$ – стоимость единицы емкости элеватора.

Величина урожая данного года зависит от количества поливных земель (1.2.9) В свою очередь количество поливных земель определяется динамическим соотношением (1.2.13)

$$s(n) = s(n-1) + \frac{y(n-1)}{C_y} \tag{1.2.13}$$

где

$C_y$ – затраты на единицу орошаемой площади;

*y(n-1)* – капитальные затраты (инвестиции) на орошение в предшествующем году.

Уравнения (1.2.8), (1.2.11) – (1.2.13), где величина *Q(n)* определяется уравнением (1.2.10), - это и есть математическая модель изучаемого многошагового процесса. При этом величины инвестиций на строительство элеваторов и обустройство поливных земель связаны общим ограничением:

$$x(n) + y(n) = z(n) \tag{1.2.14}$$

где

z(n) – суммарные средства, выделяемые на инвестиции в строительство элеваторов и создание ирригационных систем.

Зная начальное состояние системы *G(0), R(0)* и *s(0)*, и задавая тем или иным образом величины *x(n)* и *y(n)* мы можем для любого года вычислить распределение важной характеристики исследуемой системы, величины дефекта, определяемой выражением (1.2.15).

$$\Delta(n) = S(n) \cdot p + s(n) \cdot q - \Phi(n) - Q(n) \tag{1.2.15}$$

В том случае, если фактический урожай превышает потребность в зерне, но избыток зерна может быть размещен на складах или фактический урожай меньше потребности, но недостаток зерна может быть компенсирован имеющимся на складах зерном, то величина дефекта, определяемого выражением (1.2.15) будет равна нулю. В противном случае эта величина будет отличаться от нуля.

Перейдем к обсуждению возможных критериев эффективности (целевых функций). С точки зрения устойчивого обеспечения потребности в зерне, очевидно, что чем меньше математическое ожидание абсолютной величины дефекта, тем система будет лучше. Поэтому в качестве критерия, оценивающего функционирование системы за один год номера n, можно принять величину этого математического ожидания:

$$I(x,y) = M(|\Delta(n)|) = \overline{|\Delta(n)|}$$ [1]

Но система функционирует не один год, а много лет. Тогда, обозначив через N горизонт (срок) планирования, мы можем в качестве критерия, оценивающего систему в целом принять (1.2.16), представляющий собой максимум математического ожидания величины дефекта за период планирования.

$$J_1 = \max_{1 \le n \le N} \overline{|\Delta(n)|} \qquad (1.2.16)$$

Вместо критерия (1.2.16) можно принять выражение (1.2.17)

$$J_1^* = \overline{\max_{1 \le n \le N} |\Delta(n)|} \qquad (1.2.17)$$

Критерий (1.2.17) может оказаться более удобным для оперирующей стороны. Заметим, что он всегда мажорирует критерий (1.2.16) то есть $J_1 \le J_1^*$, но вычисление критерия (1.2.17) обычно бывает значительно проще вычисления критерия (1.2.16).

Наряду с критерием (1.2.16) оценку проекта дает и критерий (1.2.18)

$$J_2 = \sum_{i=1}^{N} \overline{|\Delta(n)|} \qquad (1.2.18)$$

[1] Здесь и далее черта наверху будет означать математическое ожидание соответствующей случайной величины.

Положительные и отрицательные дефекты не равнозначны. Если $\Delta(n)>0$, то это значит, что часть урожая просто пропадет. Если $\Delta(n)<0$, то зерна для покрытия потребностей не хватит и его придется импортировать. С учетом этого в качестве еще одного критерия можно принять величину, определяемую выражением (1.2.19), для которого усреднение ведется по отрицательным дефектам: $(\Delta(n)<0)$

$$J_3 = \sum_n \left|\overline{\Delta(n)}\right| \qquad (1.2.20)$$

Итак, мы видим, что в одной и той же операции могут фигурировать самые разные критерии эффективности. А поскольку стратегии (в данном случае распределение инвестиций) мы будем определять из условия (1.2.21), то каждому $J_i$ будет соответствовать своя стратегия – решение одной из задач, которую мы будем называть оптимальной стратегией.

$$J_i \to \min \qquad (1.2.21)$$

Напомним еще раз, что решение данной задачи ищется для ряда последовательных временных шагов, причем это решение должно оптимизировать критерий, относящийся ко всему периоду планирования. Задачи подобного типа называются задачами динамического программирования.

### 1.2.4 Задача составления расписаний

Теория расписаний представляет собой целое направление в дискретной математике и теории исследования операций. Проблема составления расписаний заключается в определении очередности выполнения работ и выделения определенного объема ресурсов на каждую из этих работ.

Рассмотрим содержание этой проблемы на примере одной из основных задач этого класса: найти такую очередность выполнения работ и такое распределение ресурсов, чтобы вся совокупность работ составляющих проект была выполнена за минимальное время. Исходными данными в этой задаче является перечень работ, которые необходимо выполнить и требуемый ресурс для выполнения каждой из этих работ. Используемые ресурсы могут иметь различную природу, например, рабочая сила, оборудование, сырье, деньги и т.д. По этой причине, когда речь идет об определении объема требуемого ресурса, то он (ресурс) может быть представлен в виде вектора, компоненты которого соответствуют ресурсам различной природы.

Кроме того, выполнение работ обычно бывает стеснено многими ограничениями, которые обычно удается разделить на две группы.

Ограничения (α)

Эти ограничения описывают взаимную зависимость работ и имеют логическую природу. Наиболее типичный пример заключается в том, что некоторым работам обязательно должна предшествовать совокупность других работ. Например, нельзя начать изготовления детали до того, как разработаны ее чертежи, и нельзя установить эту деталь в агрегат до того, как она изготовлена.

Ограничения такого рода изображаются в виде ориентированного графа. Граф представляет собой некоторую совокупность точек, называемых вершинами, соединенных между собой отрезками (ребрами). Для ориентированного графа определено направление ребер.

В приложении к задаче составления расписаний ребра графа ассоциируются с работами, а вершины с событиями, которые определяют возможность выполнения тех или иных работ. В свою очередь наступление тех или иных событий связано с выполнением одной или нескольких работ.

Например, для графа, изображенного на рисунке 3, работы «а» и «в» могут начаться сразу после старта проекта, а работе «б» должно предшествовать событие 1, обусловленное выполнением работы «а», но никак не связанное с выполнением работы «в», событию 5 должны предшествовать события 2 и 4, а также выполнение работ «д» и «е».

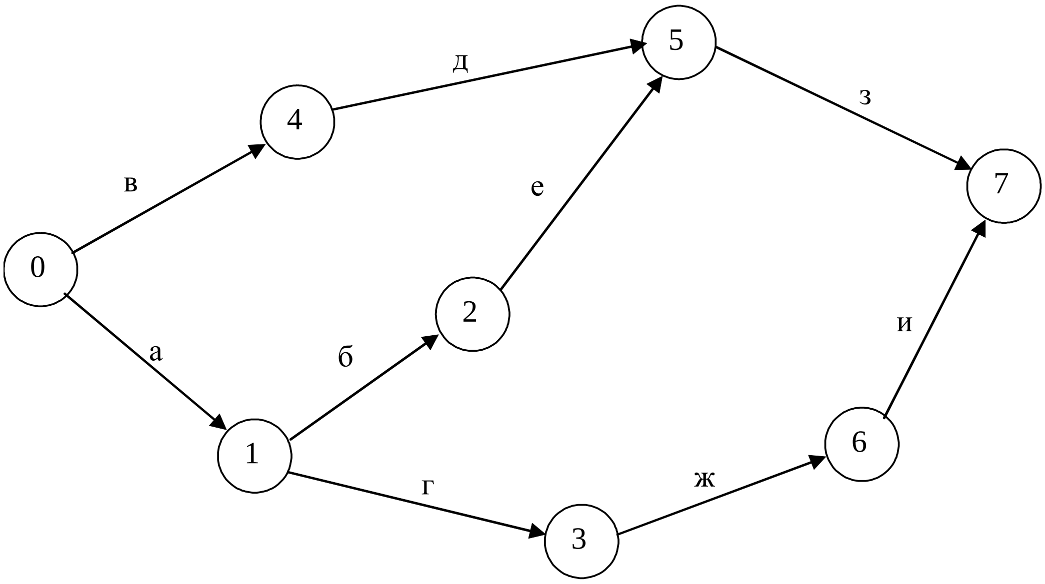



**Рис. 3 – Ориентированный граф**

Ограничения логической природы могут носить и более сложный характер. Например, работы могут быть взаимозаменяемыми или некоторые работы в обязательном порядке должны вестись параллельно и т.д.

<u>Ограничения (β)</u>

Этот тип ограничений связан с объемом ресурсов, которые можно выделить на реализацию проекта. Если реализация проекта разбита на дискретные интервалы времени, то ограничения типа (β) могут быть выражены соотношением (1.2.22)

$$\sum_i q^i\left(u^i(t)\right) \le v(t) \qquad \forall t \qquad (1.2.22)$$

где

$v(t)$ – общий объем ресурса, выделяемый на выполнение проекта в интервал времени $t$;

$u^i(t)$ – доля работ i, выполняемая в интервал времени $t$;

$q^i(u^i(t))$ – ресурс, необходимый для выполнения доли работ $i$, в интервал времени $t$.

Условия этого типа – это условия, с которыми исследователю операций приходится иметь дело при решении любой распределительной задачи. Если заданы векторы ограничения ресурсов, то планирование реализации проекта сводится к следующей задаче: для каждого интервала времени следует определить перечни выполняемых работ и доля этих работ, которую необходимо выполнить, в течение этого интервала, причем перечни работ и их доли выбираются так, чтобы суммарное время осуществления проекта оказалось минимальным.

В том случае, если доли работ и временные интервалы полагаются дискретными, задача построения расписания оказывается задачей дискретного (целочисленного) программирования. Количество допустимых альтернатив (решений) конечно. Казалось бы, что решение таких задач не представляет трудностей, поскольку оно может быть найдено простым перебором возможных альтернатив. Однако, в практических случаях, при составлении расписаний, включающих порядка 1000 работ (что не считается очень сложной или редкой задачей) время, необходимое для решения путем полного перебора возможных вариантов, становится совершенно неприемлемым.

## 1.3 Разрешение неопределенностей

Как мы уже отмечали, методы системного анализа используются в тех случаях, когда решаемая проблема является сложной. Эта сложность, помимо иных причин, может быть обусловлена наличием неопределенности в постановке задачи исследования. Причины этих неопределенностей могут быть различны.

В предыдущем разделе были приведены примеры некоторых задач, в которых решение определялось исходя из условия максимума того или иного функционала, отражающего цель операции. Как уже отмечалось, при разработке описания операции цель операции является экзогенной, то есть внешней по отношению к объекту, в отношении которого планируется операция. В предыдущем разделе (Задача об ирригации и складировании) мы сталкивались с ситуацией, когда для одного и того же объекта оказывалось возможным использовать различные критерии оптимизации операции. При этом различия между критериями (1.2.16) – (1.2.20) сводились всего лишь к тому, что мы разным образом определяли функционал от одной и той же характеристики операции, а именно, величины дефекта.

Еще сложнее обстоит дело в том случае, когда для учета интересов оперирующей стороны необходимо принимать в расчет не один, а несколько частных критериев. Тогда при постановке оптимизационной задачи в качестве критерия оптимизации приходится использовать функционалы, зависящие одновременно от каждого частного критерия.

Нередко бывает так, что желание оперирующей стороны добиться наилучших показателей операции по всем частным критериям оказывается невыполнимым. Например, нельзя одновременно обеспечить максимальную урожайность и минимальные затраты на обработку земли, хотя желание оперирующей стороны увеличить объем продукции и снизить издержки представляется вполне естественным. Впрочем, так же естественным выглядит и необходимость компромиссного решения, обеспечивающего частичную реализацию обеих целей.

Проблемы подобного характера носят название «неопределенности цели». Процедура выбора критерия оптимизации носит неформальный характер. Главным требованием, предъявляемым к этому критерию, является то, чтобы он наилучшим образом отражал интересы оперирующей стороны. Некоторые математические приемы, используемые при формировании единого критерия оптимизации на основе группы частных критериев, рассматриваются в разделе «Неопределенность целей».

Другим видом неопределенностей, с которыми сталкивается исследователь операций, являются факторы, которые влияют на исход операции, но не могут контролироваться оперирующей стороной. Эти неопределенности могут носить природный характер, например, вариация погодных условий, или являться следствием того, что результат операции зависит от действий нескольких оперирующих сторон.

В первом случае, вследствие того, что параметры процесса являются случайными величинами, результат операции тоже оказывается случайным. Поэтому в качестве критерия оптимизации используют тот или иной функционал от случайной величины (математическое ожидание, дисперсию и т.д.). Подробнее эти вопросы рассматриваются в разделе «Природные неопределенности».

Во втором случае при оптимизации стратегии оперирующей стороны приходится использовать те или иные гипотезы о поведении других оперирующих сторон. Рассмотрению этой группы неопределенностей посвящен раздел «Активный партнер».

### 1.3.1 Неопределенность целей

В предыдущем разделе мы видели, что исследование операции сводится к разработке ее модели, определению критерия оптимизации, отражающего интересы оперирующей стороны и отысканию стратегии, соответствующей оптимальному значению этого критерия. При этом оказалось, что при осуществлении одной и той же операции интересы оперирующей стороны могут быть разными. Учет этих различий осуществляется путем модификации критерия оптимизации, в то время как модель операции сохраняется в прежнем виде.

Значительно более сложные проблемы возникают в том случае, когда интересы оперирующей стороны касаются нескольких разнородных аспектов планируемой операции. Например, совершенно естественным выглядит желание предпринимателя выпускать продукцию, которая была бы самой удобной в использовании, самой красивой и при этом самой дешевой, хотя понятно, что одновременное выполнение всех этих условий практически не возможно.

В некоторых случаях комбинирование нескольких показателей в одном критерии оптимизации выглядит совершенно естественно. Например, в задаче о распределении удобрений мы в качестве критерия использовали разность между доходом от продажи продукции и расходом на приобретение удобрения (1.2.7), то есть фактически комбинировали в одной целевой функции два критерия. Такая комбинация дает оценку эффективности хозяйственной деятельности и обычно адекватно отражает интересы оперирующей стороны.

Сложнее сформулировать единую цель операции, если ставится задача одновременно обеспечить максимальные значения для нескольких критериев. Такие задачи мы будем называть многокритериальными, а затруднения, связанные с формулированием единой цели операции – ситуацией неопределенности цели.

Напомним, что цель операции всегда рассматривается нами как экзогенный фактор, то есть фактор, не вытекающий из природы операции или модели описывающей эту операцию. Цель операции отражает интересы оперирующей стороны. Поэтому, оставаясь в рамках «чистой» математики, сформулировать цель операции невозможно. Тем не менее, существует ряд математических приемов, которые полезны для формулирования цели операции для многокритериальных задач. Рассмотрим некоторые из этих приемов.

Все эти приемы исходят из того, что результат операции зависит от способа ее осуществления, который в самом общем виде может быть представлен вектором, компоненты которого характеризуют отдельные факторы осуществления операции. В этих условиях, все частные критерии определяются этим вектором. При этом сами частные критерии, в свою очередь, образуют вектор, характеризующий результаты осуществления операции.

Компромиссы Парето

Одним из подходов к анализу многокритериальных задач является подход, основанный на сокращении числа рассматриваемых вариантов за счет исключения заведомо плохих решений. Один из путей реализации такого подхода был предложен в 1904 г. итальянским экономистом Парето.

Этот путь основан на сравнении вариантов выбора с использованием серии неравенств (1.3.1). Если каждое из неравенств (1.3.1) соблюдается, причем хотя бы одно из этих неравенств оказывается строгим, то это значит, что выбор $x_1$ оказывается предпочтительней выбора $x_2$, поскольку величина каждого критерия для первого выбора не хуже чем для второго, а величина по крайней мере одного из этих критериев лучше.

$$f_i(x_1) \geq f_i(x_2) \quad i = 1,2\ldots,n \qquad (1.3.1)$$

По указанной причине все векторы, удовлетворяющие неравенствам (1.3.1) можно исключить из рассмотрения, и рассматривать только те, для каждого из которых не существует вектора, удовлетворяющего неравенствам (1.3.1).

Множество таких векторов называют множеством Парето, а вектора, принадлежащие к этому множеству, неулучшаемыми векторами результатов (векторами Парето). Важное свойство множества векторов Парето заключается в том, что улучшение любого критерия по сравнению с его значением для заданного вектора обязательно приведет к уменьшению значения хотя бы одного из остальных критериев. В этом смысле множество Парето можно рассматривать как математическую модель тришкиного кафтана из известной басни Крылова.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример. Допустим, что цели операции определяются двумя однозначными функциями (1.3.2).

$$\begin{aligned} f_1(x) &\to \max \\ f_2(x) &\to \max \end{aligned} \qquad (1.3.2)$$

В этом случае каждому вектору будет соответствовать вполне определенная пара значений критериев. Допустим, что взаимозависимость этих критериев определяется кривой, изображенной на рисунке 4.

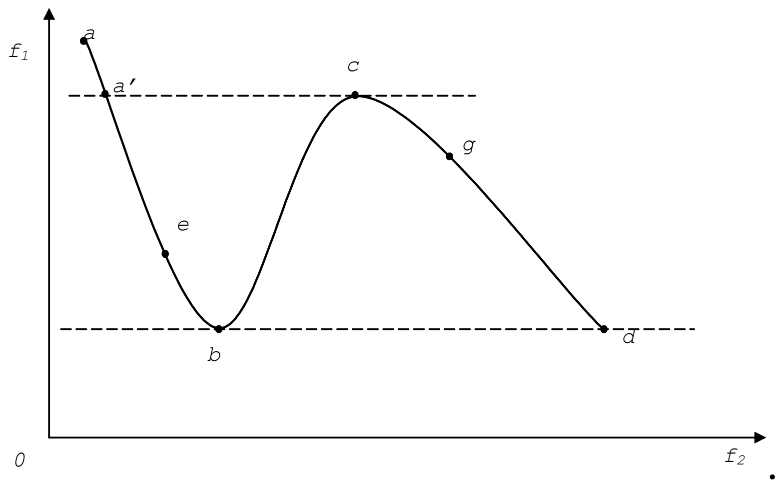



**Рис. 4. Взаимозависимость пары критериев**

Отметим, что все вектора, относящиеся к участку $bc$, исключая точку с не относятся к множеству Парето, поскольку для этого участка имеет место одновременный рост обоих критериев, причем в каждой точке этого участка значения обоих критериев меньше, чем в точка $c$. Участок $a'b$ также не принадлежит к множеству Парето, поскольку для каждой точки $e$ этого участка можно найти точку $g$ на участке $cd$, в которой значения обоих критериев окажутся больше.

Таким образом, к множеству Парето могут быть отнесены только векторы, соответствующие участкам $aa'$ и $cd$, причем точку $a'$ необходимо исключить. Отметим, что для всех перечисленных участков рост величины одного критерия сопровождается уменьшением другого.

Из сказанного понятно, что построение множества Парето не решает проблему выбора оптимального решения, а только сужает область поиска. В теории управления существует так называемый «принцип Парето», согласно которому в качестве вектора решения следует выбирать только вектор, принадлежащий множеству Парето. Отметим, что в любом случае окончательное решение о том, как именно проводить операцию, остается за оперирующей стороной, однако, построение исследователем операции множества Парето может во многом упростить этот выбор.

Линейная свертка

Вместо нескольких частных критериев предлагается рассматривать обобщенный критерий вида (1.3.3)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i(x) \tag{1.3.3}$$

где

$F(x)$ – обобщенный критерий;

$c_i$ – некоторые положительные числа (весовые коэффициенты);

$f_i(x)$ – частные критерии;

$x$ – вектор, характеризующий способ действий.

Линейная свертка устанавливает отношение эквивалентности различных критериев (целевых функций), поскольку вес критерия показывает, насколько изменится обобщенный при изменении частного критерия на единицу.

Система весовых коэффициентов отражает представления оперирующей стороны об относительной ценности отдельных частных критериев. Обычно система весовых коэффициентов является результатом экспертной оценки и в этом смысле является той дополнительной гипотезой, которая необходима для сведения многокритериальной задачи к задаче с единственным критерием.

Отметим, что система весовых коэффициентов с одной стороны определяется представление оперирующей стороны о ранжировании целей операции, а с другой – содержание того компромисса, который оперирующая сторона готова принять.

Ранжирование целей представляется собой отнюдь не универсальный способ преодоления неопределенности целей. Действительно, выражение (1.3.3) дает ясное представление об относительной ценности отдельных критериев, но не содержит информации о том, какое сочетание абсолютных значений критериев является предпочтительным.

Использование контрольных показателей

В этом случае для каждого частного критерия вводится определенное значение контрольного показателя, а критерий оптимизации формулируется в виде выражения (1.3.4).

$$F(x) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \qquad (1.3.4)$$

где

$x$ – вектор, характеризующий способ действий;

$F(x)$ – обобщенный критерий;

$f_i^*$ – величина контрольного показателя.

При этом задача сводится к поиску вектора, обеспечивающего максимальное значение обобщенному критерию. Смысл такой постановки задачи довольно прост и иллюстрируется таблицей 1.

Допустим, что мы имеем ограниченный набор векторов, характеризующих способ действия (операцию), и некоторое количество частных критериев, которые характеризуют каждый из этих векторов.

Таблица 1– Выбор наилучшего вектора с использованием контрольных показателей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Отношения частных критериев к контрольным показателям</td><td rowspan="2">Обобщенный критерий</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>m</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Векторы, характеризующие способ действия</td><td>1</td><td>$\frac{f_1(x_1)}{f_1^*}$</td><td>$\frac{f_2(x_1)}{f_2^*}$</td><td>...</td><td>$\frac{f_m(x_1)}{f_m^*}$</td><td>$\min\limits_i \frac{f_i(x_1)}{f_i^*}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{f_1(x_2)}{f_1^*}$</td><td>$\frac{f_2(x_2)}{f_2^*}$</td><td>...</td><td>$\frac{f_m(x_2)}{f_m^*}$</td><td>$\min\limits_i \frac{f_i(x_2)}{f_i^*}$</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>n</td><td>$\frac{f_1(x_n)}{f_1^*}$</td><td>$\frac{f_2(x_n)}{f_2^*}$</td><td>...</td><td>$\frac{f_m(x_n)}{f_m^*}$</td><td>$\min\limits_i \frac{f_i(x_n)}{f_i^*}$</td></tr>
</table>

Вычислим частные от деления каждого значения частного критерия на величину контрольного показателя и выберем минимальное значение для каждой из полученных строк. Это значение и будет величиной обобщенного критерия, на основании которого выбирает наилучший вектор. Отметим, что каждой из строк обобщенному критерию соответствует только один из частных критериев, хотя в разных строках могут фигурировать разные критерии.

Для выбора наилучшего вектора необходимо определить строку, которой соответствует максимальное значение обобщенного критерия.

Отметим одно ценное качество метода контрольных показателей.

В том случае, когда ограничения на вектор, характеризующий способ действий, носят линейный характер (1.3.5) и функции, определяющие зависимость частных критериев от компонентов этого вектора, тоже являются линейными (1.3.6), то задача выбора оптимального решения с использованием критерия (1.3.4) сводится к задаче линейного программирования: определить максимум линейной формы (1.3.7) при линейных ограничениях (1.3.5).

$$\sum a_s^j \cdot x_s \le b_j \qquad (1.3.5)$$

$$f_i = \sum_s d_s^i \cdot x_s \qquad (1.3.6)$$

$$F(x) = \sum \sum c_i \cdot d_s^i \cdot x_s \qquad (1.3.7)$$

Отметим, в рамках использования метода контрольных показателей, на что на выбор решений могут быть наложены дополнительные условия, например, ни один частный критерий не может быть меньше контрольного показателя.

Такая система ограничений может использоваться для существенного упрощения задачи. Действительно, если все показатели кроме одного рассматривать как ограничения, которые просто должны соблюдаться, то мы приходим к необходимости оптимизации только одного критерия, то есть к однокритериальной задаче.

Такая схема редукции к однокритериальной задаче является самой простой и чаще всего используется в инженерной практике. Основными задачами в данном случае является выбор главного показателя (критерия оптимизации) и определения границ, в которых должны находиться остальные показатели.

Введение метрики в пространство целевых функций

Для любой многокритериальной задачи в принципе может быть поставлена и решена серия однокритериальных задач, в которой отдельно оптимизируется каждый из рассматриваемых критериев (1.3.8). При этом будет получена серия векторов, характеризующих способ действия, при котором достигается максимум каждого из критериев (1.3.9)

$$f_i(x) \to \max \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1.3.8)$$

$$f_i(x_i) = \hat{f}_i \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1.3.9)$$

Совокупность скалярных величин $\hat{f}$, определяемых уравнениями (1.3.9), образует в пространстве критериев некоторую точку, которую мы будем называть «точкой абсолютного максимума».

Если в результате решения серии оптимизационных задач были получены векторы, отличающиеся друг от друга, то это свидетельствует о том, что ни один способ осуществления операции не может обеспечить одновременно максимальные значения для всех критериев. Тем не менее, полученные оценки показывают максимально достижимые показатели по каждому из критериев и с этой точки зрения являются весьма полезными.

Действительно, ведь для каждого реализуемого варианта мы можем попытаться каким-то образом измерить его расстояние от точки «абсолютного максимума» и использовать это расстояние в качестве обобщенного критерия операции. Понятно, что чем ближе окажется реализуемый вариант к точке абсолютного максимума, тем лучше оценка этого варианта.

В качестве меры, определяющей расстояние от точки, соответствующей заданному вектору, характеризующему операцию до точки абсолютного максимума, используют выражение (1.3.10)

$$h = \sqrt{\sum_{i,j}\left(f_i(x) - \hat{f}_i\right) \cdot r_{ij} \cdot \left(f_j(x) - \hat{f}_j\right)} \qquad (1.3.10)$$

где $r_{ij}$ – элементы положительно определенной матрицы *R*.

В частности, если в качестве матрицы R используется единичная матрица, то выражение (1.3.10) упрощается до выражения (1.3.11), которое представляет расстояние между точками в евклидовом пространстве.

$$h = \sqrt{\sum_{i}\left(f_i(x) - \hat{f}_i\right)^2} \qquad (1.3.11)$$

В целом метод линейных метрик дает весьма гибкое средство формулирования критерия оптимизации, в частности в тех случаях, когда необходимо учесть возможность взаимосвязи отдельных частных критериев.

Отметим также, что использование рассмотренных выше обобщенных критериев, наиболее эффективно в том случае, если они применяются не на всей доступной области решений, а только на множестве Парето.

Поясним это положение следующим примером. Будем считать, что цели операции по-прежнему определяются выражением (1.3.2), однако на вектор, определяющий результат операции, наложены определенные ограничения. В силу этого векторы, которые могут быть использованы, принадлежат некоторому множеству (1.3.12). Каждому вектору, принадлежащему множеству (1.3.12), соответствует своя пара решений задачи оптимизации (1.3.2), а совокупность этих решений образует свое множество (1.3.13).

$$x \in G_x \qquad (1.3.12)$$

$$f \in G_f \qquad (1.3.13)$$

Эта ситуация изображена на рис. 5, на левой части которого изображено множество доступных векторов, а на правой – множество достижимых критериев (множество достижимости).

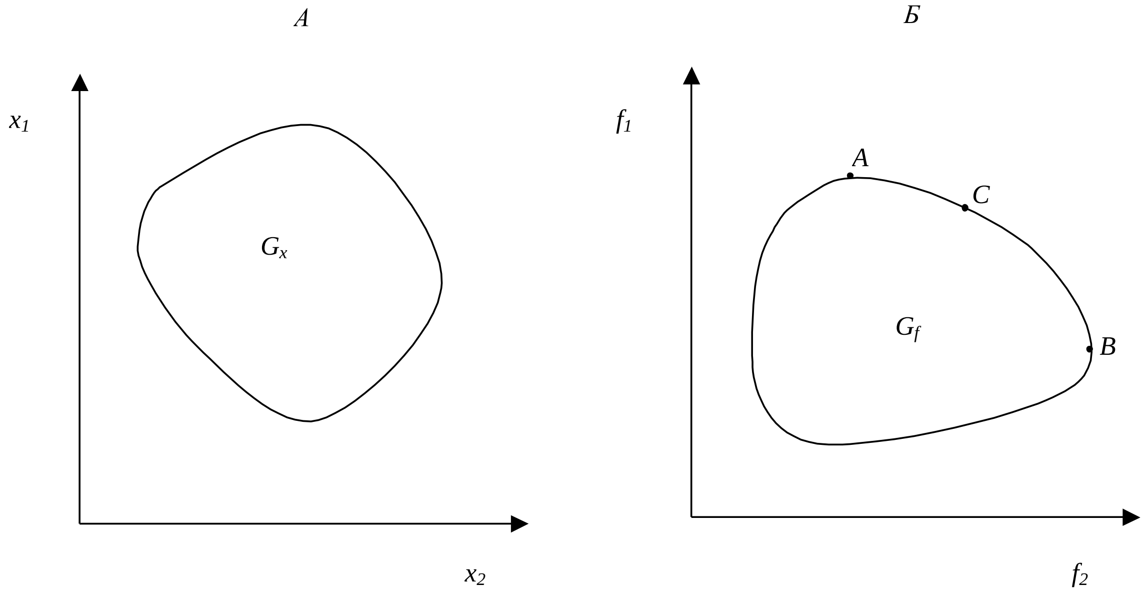



**Рис. 5 – Множества доступных векторов и достижимых критериев**

Однако, множество Парето составляется только часть множества достижимости, так, на рис. 5 множеству Парето соответствует только дуга *ACB*.

### 1.3.2 Природные неопределенности

Неопределенность цели не единственный тип неопределенности, с которыми сталкивается исследователь операций. Рассматриваемый в данном разделе тип неопределенностей мы будем условно называть неопределенностью природы.

Под неопределенностями такого рода мы будем понимать совокупность условий, влияющих на исход операции, которые мы в момент планирования операции не можем точным образом определить, а в ходе операции – изменить. Примером неопределенности такого рода является влияние погодных условий на урожай или осуществление транспортной операции, возможность возникновения технической неисправности используемого устройства, ошибки оператора и т.п.

Формализация задачи представлена выражением (1.3.14), то есть ставится задача отыскать способ проведения операции, обеспечивающий максимальное значение критерия качества. При анализе операций, содержащих неопределенности этого рода, мы будем считать, что фактор неопределенности принадлежит некоторому множеству (1.3.15). Выбор способа проведения операции (стратегия) обычно ограничен определенными условиями и в этом смысле тоже может рассматриваться как некоторое множество (1.3.16).

$$f(x,\alpha) \to \max_{x} \tag{1.3.14}$$

$$\alpha \in G_{\alpha} \tag{1.3.15}$$

$$x \in G_{x} \tag{1.3.16}$$

где

| | |
|---|---|
| $x$ | – вектор, характеризующий условия проведения операции (стратегия); |
| $\alpha$ | – фактор неопределенности; |
| $G_\alpha$ | – множество, к которому принадлежит фактор неопределенности; |
| $G_x$ | множество допустимых стратегий; |
| $f(x,\alpha)$ | – критерий оптимизации. |

Из такой постановки задачи следует, что каждому возможному значению случайного фактора соответствует своя оптимальная стратегия, однако, при выборе стратегии мы не знаем, какое именно значение случайный фактор примет во время осуществления операции.

В этих условиях одним из возможных решений является следующая процедура выбора стратегии. Для каждого из возможных значений случайного фактора, принадлежащего множеству (1.3.15), оцениваются результаты использования каждой стратегии, принадлежащей множеству (1.3.16), и из них выбирается минимальное значение. Эти значения показывают, к каким результатам данная стратегия приведет, если случайный фактор окажется наименее благоприятным для ее осуществления. Выбирая стратегию, соответствующую максимальной из полученных оценок (1.3.17), мы находим стратегию, которая обеспечит нам результат, больший или равный этой оценке при любых значениях случайного фактора.

$$f^* = \max_x \min_{\alpha \in G_\alpha} f(x,\alpha) \qquad (1.3.17)$$

Оценку (1.3.17) называют гарантированной оценкой, а стратегию, соответствующую этой оценке – гарантирующей стратегией в том смысле, что применение этой стратегии обеспечит результат не меньший гарантированной оценки.

Гарантированную оценку можно улучшить в том случае, если заранее известно, что на момент проведения операции значение случайного фактора будет соответствовать не всему множеству (1.3.15), а только части этого множества (1.3.18).

$$f^* = \max_x \min_{\alpha \in G'_\alpha} f(x,\alpha) \geq \max_x \min_{\alpha \in G_\alpha} f(x,\alpha) \qquad (1.3.18)$$

где $G'_x$ – множество случайных значений, реализующихся в момент проведения операции.

Фактически выражение (1.3.18) отражает тот хорошо понятный факт, что большие знания об обстановке, в которой надо действовать, обеспечивают выбор лучших решений.

Оптимизация стратегии на искусственно ограниченном множестве случайных значений допускает и другую интерпретацию, а именно оптимизацию в условиях риска. Иными словами, мы исключаем из множества случайных факторов те значения, которые считаем маловероятными и в результате получаем более эффективную стратегию. Однако, при этом возникает риск того, что в случае наступления этих «маловероятных» событий результат операции может оказаться хуже гарантированной оценки, полученной как для искусственно ограниченного, так и для полного множества случайных величин.

Наиболее адекватной количественной характеристикой риска является величина потерь, например, математическое ожидание разности между результатами операции в условиях, непредусмотренных схемой оптимизации операции, и гарантированным результатом для полного множества случайных величин.

В условиях природных неопределенностей результат операции определяется, помимо выбранной стратегии, еще и случайными факторами, и поэтому он сам будет носить случайный характер. В том случае, если операция осуществляется многократно, в качестве оптимальной стратегии рассматривать стратегию, обеспечивающую максимальную величину математического ожидания (среднего значения) критерия оптимизации (1.3.19).

$$f_1 = \max_x \overline{f(x,\alpha)} \tag{1.3.19}$$

$$f_2 = \max_x f(x,\overline{\alpha}) \tag{1.3.20}$$

Критерий (1.3.19) не является единственно возможным. Например, можно оптимизировать стратегию для усредненных значений случайных факторов (1.3.20).

Отметим, что стратегия, определяемая выражением (1.3.19) практически во всех случаях будет отличаться от гарантирующей стратегии, а ее результаты в среднем будут лучше. Однако, в отдельных случаях применение стратегии, определяемой выражением (1.3.19) может привести к худшим результатам, чем применение гарантирующей стратегии.

Это положение проиллюстрировано на рис. 6.

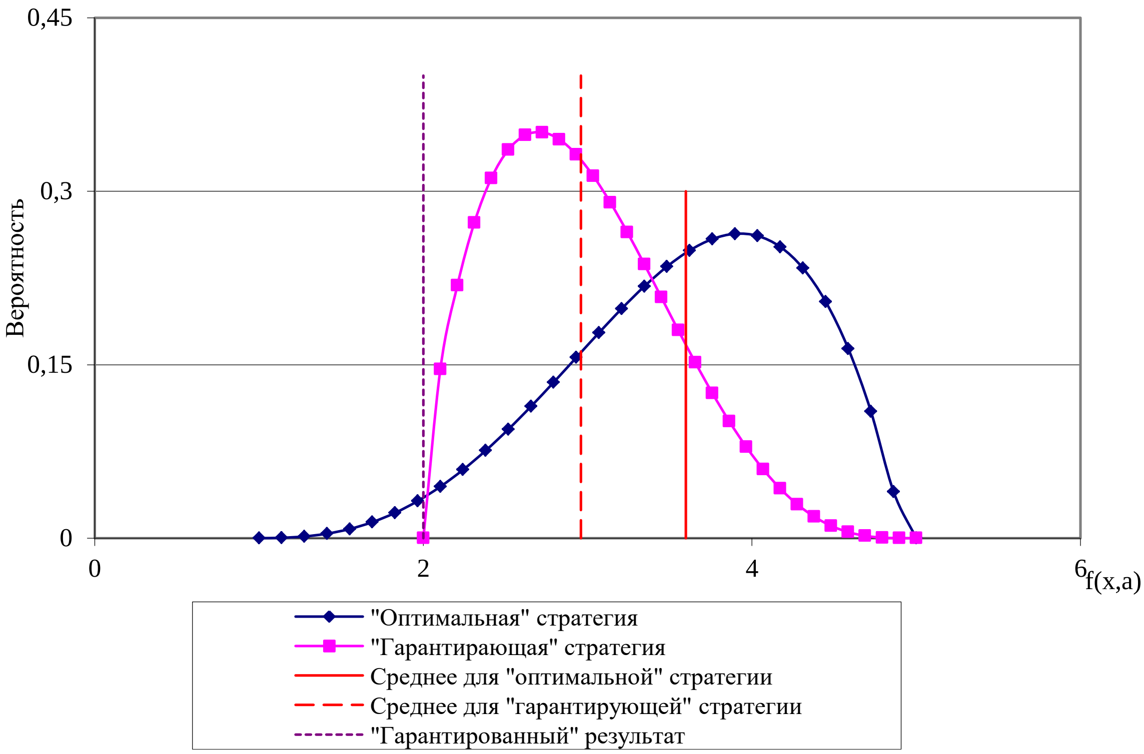



**Рис. 6– Сравнение оптимальной и гарантирующей стратегий**

На этом рисунке под термином «оптимальная» стратегия подразумевается стратегия, соответствующая выражению (1.3.19), под термином «гарантирующая стратегия – стратегия, соответствующая выражению (1.3.18).

Если исследуется операция, которую предполагается осуществить только один раз, то задача ее оптимизации может быть сведена к уже рассмотренному случаю многокритериальной задачи.

Действительно, интересы оперирующей стороны можно представить, как желание получить максимальный результат при любом значении случайного вектора (1.3.21)

$$\begin{gathered} f(x,\alpha_1) \to \max \\ \Lambda \\ f(x,\alpha_i) \to \max \\ \Lambda \\ f(x,\alpha_n) \to \max \end{gathered} \qquad (1.3.21)$$

Одним из этапов оптимизации для многокритериальной задачи, как было показано в предыдущем разделе, является сведение множества критериев к единому обобщенному показателю (сворачивание). Вполне подходящими могут оказаться, например, критерии (1.3.19) и (1.3.20). Таким образом, различия между исследованием однократных операций и повторяющихся не столь велики.

### 1.3.3 Активный партнер

Весьма распространенными являются операции, в которых принимают участие несколько оперирующих сторон, каждая из которых преследует свои цели, и имеют для этого определенные возможности (некоторые совокупности возможных стратегий). Формализованное описание этой ситуации дается выражениями (1.3.22) и (1.3.23), первое из которых определяет цель каждого из участников операции, а второе – множество стратегий, доступных данному участнику операции.

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max_{x_i} \qquad (1.3.22)$$

$$x_i \in G_i \qquad (1.3.23)$$

Такая постановка задачи допускает возможность определения гарантирующей стратегии и гарантированного результата по алгоритму, рассмотренному в предыдущем разделе. Эти характеристики операции по существу являются единственной «объективной» информацией, поскольку любые другие оценки связаны с теми или иными предположениями о стратегиях, выбранных другими участниками операции.

Например, если мы исключаем из рассмотрения ряд стратегий, которыми, по нашему мнению, партнеры не воспользуются (хотя имеют такую возможность), то мы можем выбрать стратегию более эффективную, чем гарантирующая стратегия. Но эти, улучшенные, результаты мы получим только в том случае, если наши предположения о выборе партнеров оправдаются. В противном случае результаты могут оказаться хуже, чем при выборе гарантирующей стратегии.

Рассмотрим более подробно вопросы, касающиеся формирования гипотез о поведении нескольких участников одной операции на примере операций с двумя оперирующими сторонами (субъектами).

Цели оперирующих сторон определяются выражением (1.3.24), множества доступных стратегий – выражением (1.3.25)

$$\begin{aligned} &f(x, y) \to \max \quad \text{Цель субъекта А} \\ &\varphi(x, y) \to \max \quad \text{Цель субъекта Б} \end{aligned} \qquad (1.3.24)$$

$$\begin{aligned} x \in X \\ y \in Y \end{aligned} \qquad (1.3.25)$$

Ситуацию, в которой цели субъектов не тождественны, мы будем называть конфликтной ситуацией. Для определенности мы будем анализировать ситуацию с точки зрения субъекта А.

Ход этого анализа зависит от наличия у оперирующих сторон информации о действиях друг друга. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

В качестве одной из возможных ситуаций является та, в которой субъект А не знает о выборе субъекта Б и субъект Б не знает о выборе субъекта А. В этом случае для субъектов А и Б можно определить гарантированные оценки (1.3.26) и (1.3.27) и соответствующие им гарантирующие стратегии $x^*$ и $y^*$.

$$f^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \qquad (1.3.26)$$

$$\varphi^* = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \varphi(x, y) \qquad (1.3.27)$$

Субъект А может выбрать гарантирующую стратегию или рассмотреть различные варианты риска.

Например, в качестве можно предположить, что субъект Б выберет свою гарантирующую стратегию $y^*$. Тогда выбор стратегии субъектом А сведется к поиску максимума выражения, то есть поиску наиболее эффективного ответа на применение субъектом Б одной определенной стратегии.

$$f(x, y^*) \to \max_{x \in X} \qquad (1.3.28)$$

Если наши предположения оправдаются, то мы получим лучший результат, чем результат, обеспечиваемый гарантирующей стратегией, если нет – результат может оказаться хуже.

Другой возможной ситуацией является случай, когда субъект А знает о выборе субъекта Б. В этом случае задача субъекта А заключается в поиске наиболее эффективного ответа на определенную стратегию субъекта Б, причем полученный результат окажется не хуже гарантированной оценки. Отметим, что в этом случае субъект А не имеет возможности влиять на выбор субъекта Б, в то время как выбор субъекта Б оказывает влияние на поведение субъекта А.

Третьей ситуацией является случай, когда субъект Б знает о выборе субъекта А. В этом случае наиболее вероятной реакцией субъекта Б является поиск наиболее эффективного ответа на известную ему стратегию субъекта А. Иными словами, у субъекта А появляется возможность влиять на выбор субъекта Б и это обстоятельство может быть использовано следующими образом.

Поскольку множество стратегий субъектов А и Б оказывается связанным соотношением (1.3.29), то результат операции определяется только выбором субъекта А.

$$y = \hat{y}(x) \tag{1.3.29}$$

Соответствующая оптимизационная задача может быть представлена выражением

$$f\left(x, \hat{y}(x)\right) = F(x) \to \max \tag{1.3.30}$$

Таким образом, предоставление второму участнику операции информации о наших намерениях может способствовать тому, чтобы он выбрал свою оптимальную стратегию так, чтобы она в наибольшей мере соответствовала нашим интересам.

Рассмотрим еще один случай, касающийся анализа операции с несколькими участниками. Предположим, что мы имеем дело с антагонистической ситуацией, то есть функции (1.3.26) и (1.3.27) связаны соотношением. Иными словами, выигрыш одного партнера точно равен проигрышу другого.

$$F(x,y)=f(x,y)=-\varphi(x,y) \tag{1.3.31}$$

В этом случае выбор субъекта А определяется выражением (1.3.32), то есть сводится к поиску стратегии, обеспечивающей максимальный выигрыш, а выбор субъекта Б – выражением (1.3.33), то есть сводится к поиску стратегии, обеспечивающей субъекту Б минимальный проигрыш.

$$f(x,y)\to\max_{x\in X} \tag{1.3.32}$$

$$f(x,y)\to\min_{y\in Y} \tag{1.3.33}$$

Если на прямом произведении множеств стратегий субъектов А и Б имеется точка, в которой выполняется условие (1.3.34), то в этой точке одновременно выполняются оба условия (1.3.32) и (1.3.33).

$$f^*=\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) \tag{1.3.34}$$

Такая точка называется седловой и стратегии, соответствующие этой точке обладают весьма важным свойством. Так, если один из субъектов придерживается своей стратегии, соответствующей седловой точке, а второй делает попытку отойти своей стратегии, соответствующей седловой точке, то он получает результаты хуже, чем те, которые обеспечила бы ему стратегия, соответствующая седловой точке.

Эта ситуация иллюстрируется на рис. 7. Стратегии, соответствующие седловым точкам, являются устойчивыми в том смысле, что отход одного субъекта от этой стратегии при условии, что другой субъект (или субъекты) придерживаются стратегии, соответствующей седловой точке, этому субъекту невыгоден.

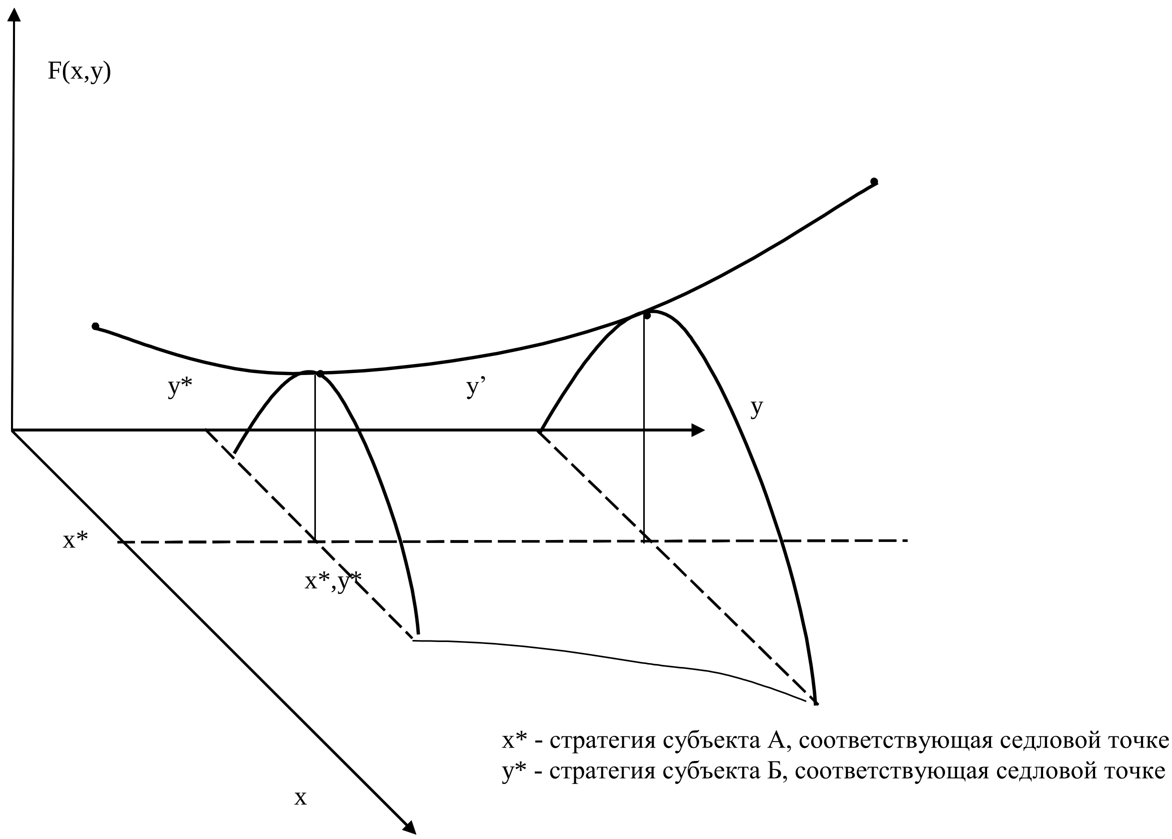



**Рис. 7– Антагонистическая ситуация с седловой точкой**

Отметим, что рассмотренные подходы ориентированы на анализ операции с точки зрения одной из оперирующих сторон. При этом предполагалось, что цели операции каждой из оперирующих сторон известны. В реальной жизни это скорее исключение, чем правило, поскольку даже в представлениях оперирующей стороны о собственной цели содержится неопределенность, поскольку результат операции многомерен, а критерий оптимизации представлен скалярной величиной.

Разумеется, обобщенный критерий оптимизации можно получить, сворачивая отдельные критерии, как это было показано в разделе 1.3.1, однако, кто может поручиться, что все оперирующие стороны будут придерживаться единообразного подхода к этой процедуре? Иными словами, правильно ли мы понимаем цели других оперирующих сторон? Эти вопросы, безусловно, осложняют решение задач, стоящих перед исследователем операции.

Рассмотрим еще одну ситуацию, которая представляет большой практический интерес. Эту ситуацию можно назвать поиском коллективного решения, то есть поиска такой совокупности стратегий оперирующих сторон, которая бы устраивала все оперирующие стороны.

Каждой совокупности стратегий в этом случае соответствует определенная совокупность результатов, определяемая выражением (1.3.35), которое по существу является оператором, преобразующим вектор стратегий в вектор оценок результатов операции с точки зрения каждого из ее участников.

$$\begin{array}{c} f_1 = f_1(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n) \\ \vdots \\ f_i = f_i(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n) \\ \vdots \\ f_n = f_n(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n) \end{array} \tag{1.3.35}$$

где $f_i$ – результат, который получит $i$ участник операции;

$x_i$ – стратегия, которой будет придерживаться $i$ участник операции.

Найденную (или сложившуюся) совокупность стратегий можно охарактеризовать с двух точек зрения, а именно, с точки зрения устойчивости и с точки зрения эффективности.

Признаком устойчивости совокупности стратегий является выражение (1.3.36).

$$f_i(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_i,\ldots,\dot{x}_n)\geq f_i(\dot{x}_1,\ldots,x_i,\ldots,\dot{x}_n) \qquad (1.3.36)$$

где $\dot{x}_i$ – стратегия, принадлежащая к устойчивой совокупности;

$x_i$ – стратегия, не принадлежащая к устойчивой совокупности.

Выражение (1.3.36) по сути, означает, что ни одна оперирующая сторона не может извлечь выгод из отхода от своей стратегии, принадлежащей устойчивой совокупности стратегий при тех условиях, что остальные оперирующие стороны не отступают от своих устойчивых стратегий.

Признаком эффективности совокупности стратегий является принадлежность вектора оценок к множеству Парето. При этом следует ясно отдавать себе отчет в том, что улучшение результата одних оперирующих сторон по сравнению с данной эффективной совокупностью стратегий, возможно только за счет ухудшения результатов для каких-то других оперирующих сторон.

Следует отметить, что одновременное обеспечение устойчивости и эффективности совокупности стратегий явление довольно редкое. Обычно, устойчивые стратегии оказываются неэффективными, а эффективные стратегии – неустойчивыми.

Условие устойчивости считается чрезвычайно важным свойством компромиссного решения, поскольку создает дополнительные гарантии соблюдения достигнутых договоренностей. Тем не менее, всегда остается возможность, что определенная группа оперирующих сторон по взаимному соглашению перейдет от использования устойчивой стратегии к использованию эффективной.

## Контрольные вопросы

1. Что является результатом цикла работ, связанных с принятием решения?
2. Что такое модель процесса?
3. В чем заключается существо оптимизационной задачи?
4. Что такое критерий оптимизации?
5. Какие задачи называются задачами динамического программирования?
6. Какие ограничения можно выделить при решении задач составления расписания? Что такое ориентированные графы?
7. Что такое неопределенность целей при решении задач?
8. Почему оптимальная стратегия всегда содержится в множестве Парето?
9. Зачем при решении многокритериальной задачи проводится обобщение критерия и сведение этой задачи к однокритериальной.
10. Чем оптимальная стратегия отличается от гарантирующей стратегии? Объясните особенности построения моделей при той или иной стратегии при условии неопределенности влияния погодных условий на урожай.

# 2. Теория управления

## 2.1 Управление

Как уже отмечалось ранее, системный анализ является синтетической дисциплиной, вобравшей в себя достижения, полученные в различных областях знаний. Одной из таких областей является теория управления. Предметом теории управления является развитие методов принятия решения, и в этом отношении она очень близка к теории операций. Отличие заключается в том, что объекты, рассматриваемые в теории операций, носят статический характер. Действительно исследование операции заканчивается выбором оптимальной стратегии, а реализация этой стратегии остается за рамками исследования.

В теории управления рассматриваются динамические объекты, состояние которых непрерывно меняется. Из этого следует, что теория управления оперирует не только с представлениями об исходном и конечном состоянии исследуемого объекта, но и всеми его промежуточными состояниями. Иными словами, в теории управления рассматривается не только вопросы о способах достижения цели, но и характеристиках путей ее достижения. Типичная постановка задачей управления может быть сформулирована так: обеспечить заданное состояние объекта в заданное время.

Состояние управляемого объекта характеризуется так называемым фазовым вектором. Фазовый вектор – это по существу перечень параметров, представляющих интерес с точки зрения оценки состояния управляемого объекта.

Задачи, рассматриваемые в теории управления, всегда подразумевают наличие субъекта, осуществляющего это управление. В распоряжении этого субъекта имеется определенный набор средств, позволяющих ему воздействовать на состояние фазового вектора. Этот набор средств в дальнейшем мы будем называть вектором управления или просто управлениями.

Кроме того, на состояние управляемого объекта влияет определенная совокупность внешних условий, то есть условий, которые не могут быть определены исходя из состояния фазового вектора и вектора управления. Этот вектор в общем случае может носить случайный характер и тогда он должен быть задан в виде статистического описания.

Характер изменения фазового вектора под действием совокупности вышеперечисленных групп воздействий определяется конструктивными особенностями этого объекта.

Одним из возможных математического описания системы управления, является система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1.1).

$$\dot{x} = f(x,u,t,\xi) \tag{2.1.1}$$

где $x$ – фазовый вектор (размерность $n$);

$u$ – управляющий вектор (размерность $m \le n$);

$\xi$ – вектор внешних воздействий (размерность $k \le n$);

$t$ – время.

Отметим, что выражение (2.1.1) является формализацией одной из классических философских проблем, а именно, соотношения между предопределенностью и «свободой воли». Действительно, изменение фазового вектора оказывается зависимым помимо объективных (предопределенных) обстоятельств – свойств управляемой системы и внешних воздействий еще и от действий управляющего субъекта, выбираемых этим субъектом по собственному разумению.

Рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся постановки задачи (2.1.1).

Считается, что на протяжении всего периода управления вектор внешних воздействий, независимо от того являются эти воздействия детерминированными или случайными, принадлежит некоторому множеству (2.1.2), то есть диапазон изменения этих условий, вообще говоря, ограничен.

$$\xi(t) \in G_{\xi}(t) \quad \forall t \tag{2.1.2}$$

Вектор управления является единственным средством, с помощью которого управляющий субъект может воздействовать на состояние управляемого объекта. При этом вектор управления должен быть связан с теми или иными характеристиками управляемого объекта. Изменение вектора управления может быть функцией времени, состояния объекта или внешних воздействий. В первом случае говорят об управлении по времени, во втором – об управлении по состоянию объекта, в третьем – об управлении по возмущению.

Наиболее общим случаем является управление вида (2.1.3), в котором учитываются все вышеперечисленные характеристики.

$$u = u(t, x, \xi) \tag{2.1.3}$$

Выбор управления обычно стеснен рядом ограничений. Этот факт отображается выражением (2.1.4).

$$u \in G_u \quad \forall t, x, \xi \tag{2.1.4}$$

Отметим, что некоторые компоненты вектора управления могут иметь смысл расходуемого ресурса. На такие компоненты вектора управления могут накладываться ограничения вида (2.1.5), смысл которого сводится к тому, что суммарный расход ресурса за период управления не должен превышать то количество, которым располагает управляющий субъект.

$$\int_0^T u_i dt \le U_i \qquad (2.1.5)$$

На изменение фазового вектора тоже могут быть наложены некоторые ограничения, например, (2.1.6). Ограничения вида (2.1.6) называют фазовыми ограничениями.

$$x \in G_x \quad \forall t \qquad (2.1.6)$$

В ряде случаев условия вида (2.1.2), (2.1.4) и (2.1.6) приходится объединять и тогда ограничения вида (2.1.7) или (2.1.8) называют смешанными ограничениями.

$$(t, x, u) \in G_{xu} \quad \forall t \qquad (2.1.7)$$

$$(t, x, u, \xi) \in G \quad \forall t \qquad (2.1.8)$$

Системы уравнений вида (2.1.1) к которым добавлены ограничения, например, в виде множеств (2.1.2), (2.1.4) и (2.1.6) называют управляющими системами.

Следует отметить, что кроме систем дифференциальных уравнений в задачах управления широко используются и их разностные аналоги. Это связано не только с тем, что численное решение систем дифференциальных уравнений часто сводится к использованию той или иной разностной схемы. Иногда необходимость использования разностных схем вытекает из существа задачи. В качестве примера такой задачи можно назвать описание динамики популяции с неперекрывающимися поколениями.

## 2.2 Цель управления и критерий качества

Системы управления создаются для реализации вполне определенной цели. Эту цель можно сформулировать следующим образом: фазовый вектор управляемого объекта должен принять заданные значения в заданный момент времени. Цель управления можно сформулировать в терминах максимизации некоторого функционала, например, (2.2.1)

$$J_1(u)=\begin{cases}1 & если \quad x(T)=x_T\\ 0 & если \quad x(T)\neq x_T\end{cases} \qquad (2.2.1)$$

где T – заданное значение времени;

$x_T$ – заданное состояние фазового вектора.

Заметим, что и ограничения виде (2.1.2), (2.1.4) - (2.1.8) могут быть формализованы в виде функционалов, например,

$$J_2(u)=\begin{cases}1 & если \quad (t,x,u,\xi)\in G\\ 0 & если \quad (t,x,u,\xi)\notin G\end{cases} \qquad (2.2.2\ )$$

Таким образом, процесс управление при фиксированной цели сводится к поиску такого управления, которое одновременно доставляло бы максимум некоторой совокупности функционалов (2.2.3).

$$J_i(u)\to \max \quad i=0,1,2,\ldots k \qquad (2.2.3)$$

Отметим, что решение каждой оптимизационной задачи (2.2.3) приводит к получению множества решений для вектора управления. Пересечение этих множеств образует множество доступных векторов управления (2.2.4).

$$\omega=\bigcap_{i=1}^{k}\Omega_i \qquad (2.2.4)$$

Понятно, что задача поиска управления имеет смысл только в том случае, когда множество доступных векторов управления содержит хотя бы один элемент, то есть не оказывается пустым.

Следует отметить, что отсутствие элементов в пересечении множеств векторов управления свидетельствует о том, что цель управления при наличии имеющихся ограничений недостижима. В этом случае необходимо пересмотреть либо цель управления, либо имеющиеся ограничения.

Отметим, что все допустимые управления, определенные путем максимизации функционалов вида (2.2.1) и (2.2.2 ) являются эквивалентными в том смысле, что для любого допустимого управления значения каждого из этих функционалов равно единице. Однако, возможность достижения цели управления не является единственной характеристикой системы управления. Другой характеристикой могут служить эффективность использования того или иного ресурса в процессе достижения цели управления. Например, субъекта, управляющего организацией перевозкой грузов, может интересовать не только факт доставки нужного груза в нужное место в обусловленное время, но и расход горючего.

Характеристики этого типа в отличие от цели управления относятся ко всему периоду управления, а не только к моменту его окончания, они являются по существу оценкой качества управления и формализуют в виде функционалов (2.2.5).

$$I_0(u) = \int_0^T F(x, u, \xi) dt \qquad (2.2.5)$$

где Т – заданное значение времени;

$F(x,u,\xi)$ – характеристика использования ресурса в зависимости от состояния объекта управления.

Выделив множество допустимых управлений (2.2.4), мы можем найти среди них то, которое придает максимальное значение функционалу (2.2.5). Это управление принято считать оптимальным, поскольку оно обеспечивает наилучшее качество управления при условии достижения цели и соблюдении имеющихся ограничений.

## 2.3 Оптимизация управления в случае стохастической задачи

Наиболее распространенным типом задач управления являются задачи, в которых вектор внешних воздействий (возмущений) являются случайным. В этом случае и процесс изменения фазового вектора оказывается случайным (стохастическим). В целом задачи подобного рода являются весьма сложными. Самым общим подходом к их решению является сведение стохастической задачи к серии детерминированных задач. Один из таких подходов мы рассмотрим в настоящем разделе.

Тот факт, что процесс изменения фазового вектора для стохастических задач приобретает случайный характер, приводит к тому, что и цель управления приходится формулировать в терминах, применяемых для описания случайных величин.

Например, в качестве цели управления могут рассматриваться выражения (2.3.1) или (2.3.2).

$$J_1 = \overline{\left(x(T) - x_T\right)^2} \to \min \tag{2.3.1}$$

$$J_2 = P\left(\left|x(T) - x_T\right| \le \varepsilon\right) \to \max \tag{2.3.2}$$

Первое из этих выражений формулирует цель управления как необходимость обеспечить минимум различий между компонентами фазового вектора в момент окончания управления и заданными значениями этого вектора. Второе – обеспечить максимальную вероятность того, что различия между значениями фазового вектора на момент окончания управления и заданными значениями этого вектора окажутся внутри достаточно узкого интервала с центром, соответствующим заданным значениям.

Оба эти выражения тем или иным способом оценивают точность достижения цели. Разумеется, эти выражения не являются единственно возможными. Например, оценка точности достижения цели может быть осуществлена в рамках метода линейных метрик.

В стохастических задачах могут присутствовать и детерминированные ограничения на фазовый вектор и управления, рассмотренные в предыдущем разделе.

В представлении функционала качества управления тоже следует учесть случайный характер изменения фазового вектора, поэтому вместо детерминированного выражения (2.2.5) следует использовать какую-нибудь среднюю величину, например, (2.3.3)

$$I_0(u)=\int_0^T \overline{F(x,u,\xi)}dt \qquad (2.3.3)$$

Приведенные рассуждения показывают, что при решении стохастической задачи приходится вводить те или иные гипотезы, касающиеся, например, описания цели управления или его качества.

Для многих задач управления вполне обоснованной является гипотеза о том, что случайные воздействия на управляемую систему малы и поэтому, в качестве нулевого приближения можно рассматривать задачу, в которой эти воздействия равны нулю.

Тогда мы можем рассматривать упрощенную задачу (2.3.4), которая, в отличие от исходной задачи (2.1.1) является полностью детерминированной.

$$\dot{x} = f\left(x, u, t, \xi_0\right) \tag{2.3.4}$$

где $(\xi_0)$ - детерминированные величины возмущений.

В качестве детерминированных значений возмущений могут быть использованы средние или наиболее вероятные значения случайных величин характеризующих возмущение.

Решение задачи (2.3.4) может быть получено с использованием методов, изложенных в предыдущем разделе. В результате этого решения, выполненного с учетом наложенных ограничений на фазовый вектор, управления и при условии максимизации функционала качества управления, мы получим некоторую траекторию управляемого объекта (2.3.5) и управление, удерживающее объект на этой траектории (2.3.6).

$$x = \tilde{x}(t) \tag{2.3.5}$$

$$u = \tilde{u}(t) \tag{2.3.6}$$

Траекторию (2.3.5) мы будем называть программной траекторией, а управление (2.3.6) – программным управлением. Напомним, что программное управление определено для некоторых фиксированных значений возмущений, которые, в силу своей стохастической природы, при реализации управления могут оказаться иными.

Поэтому для достижения цели управления нам, кроме управления (2.3.6) потребуется механизм, обеспечивающий коррекцию этого управления в зависимости от фактических значений возмущений.

Поскольку мы полагали, что случайные возмущения малы, будем считать, что траекторию и управления можно представить выражениями (2.3.7) и (2.3.8) соответственно.

$$x = \tilde{x}(t) + y(t) \tag{2.3.7}$$

$$u = \tilde{u}(t) + v(t) \tag{2.3.8}$$

где *y(t)* – поправки к программной траектории;

*v(t)* – поправки в программное управление.

Будем считать эти поправки величинами того же порядка малости, что разности между реальными значениями возмущений и их фиксированными значениями, принятыми при расчете программной траектории. Тогда исходная система, описывающая управление (2.1.1) может быть заменена приближенным выражением (2.3.9).

$$\dot{y} = A \cdot y + B \cdot v + C \cdot (\xi - \xi_0) \tag{2.3.9}$$

где

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, B = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0, C = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\xi - \xi_0}$$

матрицы, элементы которых представляют производные выражения (2.1.1), вычисленные вдоль программной траектории, то есть при нулевых значениях величин *y, v* и *(*□□□□.

Чрезвычайно важным в такой постановке задачи отыскания корректирующего управления является то, что исходные данные для этой задачи – матрицы в правой части системы уравнений (2.3.9), полностью определяются ранее определенным программным управлением.

Не останавливаясь на вопросах, касающихся исследования и решения системы уравнений (2.3.9), отметим, что оно обеспечивает возможность определить поправки в управление по величинам отклонений случайных факторов от их фиксированных значений, то есть определить управление по возмущению (2.3.10).

$$v = v(\xi - \xi_0) \qquad (2.3.10)$$

Организация управления по возмущению в ряде случаев это связано с определенными трудностями, поскольку для организации такого управления необходимо иметь возможность измерения этих возмущений.

Однако, эти возмущения можно учесть и косвенно, измеряя фазовые переменные или их отклонения от программных значений. В этом случае корректирующее управление следует искать в форме (2.3.11)

$$v = v(t, x) \quad \text{или} \quad v = v(t, y) \qquad (2.3.11)$$

Отметим интересное различие в организации корректирующего управлению по возмущению и по отклонению фазового вектора. В первом случае управление, представляющее собой корректирующее воздействие зависит только от величины возмущения. Во втором – управление зависит не только от величины отклонения фазового вектора от расчетной траектории, но и времени. Это становится понятным, если учесть тот факт, что одной и той же величине отклонения могут соответствовать две существенно различные ситуации, а именно, отход от программной траектории или возврат к ней. Понятно, что этим ситуациям должно соответствовать разное управление, для формирования которого потребуется, по крайней мере, анализ величины отклонения в предшествующие моменты времени.

Отметим, что отыскание корректирующего управления в форме (2.3.11) по своему существу сводится к определению оператора обратной связи, то есть способа преобразования информации о состоянии объекта (или внешних воздействиях на этот объект) в управляющие воздействия.

Все выше изложенные подходы к описанию и оптимизации управления были разработаны применительно к управлению сложными техническими системами. Тем не менее, оказалось, что эти подходы достаточно эффективны и для описания биологических объектов.

## Контрольные вопросы

1. В чем отличие теории управления от теории операций?
2. Что такое фазовый вектор?
3. Приведите примеры параметров, которые можно рассматривать как фазовый вектор.
4. Что такое вектор управления?
5. Приведите примеры характеристик управляемого объекта, с которые следует рассматривать как вектор управления.
6. Что является критерием оптимизации в динамических моделях управления объектом?
7. Приведите примеры задач о биологических объектах, в которых вектор внешних воздействий является случайным.

## 3. Математические модели систем

Системный анализ можно рассматривать как совокупность математических приемов, используемых при поиске наилучших решений в отношении тех или иных объектов окружающего мира. При этом математическое описание изучаемого объекта или явления играет чрезвычайно важную роль в системном анализе. Действительно, рассматривая задачи исследования операций, мы убеждаемся в том, что математическая модель суммирует представления исследователя операции об объекте или явлении, с которым он имеет дело, на основе модели происходит формирования критерия оптимизации и проводится решение оптимизационной задачи. Аналогичен порядок действий при оптимизации управляющих систем.

Конкретный вид математической модели изучаемого объекта или явления может быть самым различным, более того, одному и тому же объекту могут соответствовать различные математические описания, точно также как одно и то же математическое описание может использоваться для моделирования различных реальных объектов.

Математическая модель может быть охарактеризована с разных точек зрения. Поэтому вопрос о классификации математических моделей является типичной многокритериальной задачей, и использование различных критериев естественным образом приведет к различным классификациям.

Мы рассмотрим вопрос о классификации моделей с точки зрения области их применения, исходя из того, что наиболее общим назначением математической модели является описание эволюции того или иного объекта. В рамках этого подхода можно выделить три группы объектов: объекты без управления, объекты, находящиеся под управлением одного субъекта и объекты, находящиеся под управлением нескольких субъектов.

## 3.1 Динамические модели

Объекты без управления

Математическая модель неуправляемого объекта может быть представлена системой дифференциальных уравнений (3.1.1).

$$\dot{x} = f(t, x, \xi) \tag{3.1.1}$$

где $x$ – фазовый вектор;

$\dot{x}$ – производная фазового вектора по времени;

$(\xi_0)$ – вектор внешних воздействий;

$t$ – время.

Отметим, что в любом случае любая модель объекта, в том числе математическая модель, отражает наши знания о поведении этого объекта. Действительно, если мы ничего не знаем об объекте, то мы можем приписать ему любые свойства и предположить любые изменения этих свойств. Чем больше мы знаем об изучаемом объекте, тем более определенны наши представления о его текущем состоянии и путях его эволюции и тем более подробной и точной может стать математическая модель этого объекта.

Выражения вида (3.1.1) применяются для описания объектов, эволюция которых однозначно определяется текущим состоянием объекта и внешними воздействиями. Типичными процессами этого типа является эволюция неживых объектов в естественных условиях.

Управляемые объекты

В тех случаях, тогда поведение моделируемого объекта в одних и тех же условиях в принципе может оказаться различным, выражение (3.1.1) расширяют до (3.1.2).

$$\dot{x} = f(t, x, \xi, u) \qquad (3.1.2)$$

где $x$ – фазовый вектор;

$(\xi_0)$ – вектор внешних воздействий;

$t$ – время;

$u$ – вектор управляющих воздействий.

Вектор управляющих воздействий в выражении (3.1.2) позволяет описать возможности целенаправленного управления объектом, то есть воздействий, направляющих эволюцию объекта к некоторому заданному состоянию. Существенным является то, что с объектами, описываемыми моделями (3.1.2) всегда ассоциируется некий управляющий субъект, имеющий определенные цели и средства для достижения этих целей. Таким образом, эта группа моделей удобна для описания систем, включающих биологические объекты, в том числе человека. Следует отметить, что модели вида (3.1.2) используются и для описания сложных технических систем, функционирующих без непосредственного участия человека, например, систем автоматического управления. Однако, следует помнить, что такие системы создаются людьми и цель создания таких систем управления заключается в том, чтобы обеспечить целесообразное функционирование объектов, управляемых этими системами. Таким образом, и в этом случае модель (3.1.2) – это модель целенаправленных действий определенного субъекта.

Напомним, что задача оптимизации управления при фиксированной цели подразумевает поиск управления, обеспечивающего максимизацию критерия качества управления (2.2.5).

Модели конфликтных ситуации

Выражение (3.1.2) описывает объект, эволюция которого определяется помимо свойств этого объекта и внешних воздействий еще и действиями некоторого субъекта. Эти действия преследуют определенные цели, которые находят свое отражение в текущем состоянии моделируемого объекта и направлении его эволюции. В том если на эволюцию объекта оказывают воздействие одновременно несколько субъектов, каждый из которых преследует собственные цели, то модель (3.1.2) расширяется до выражения (3.1.3).

$$\dot{x} = f\left(t, x, \xi, u_1, u_2, \ldots u_n\right) \qquad (3.1.3)$$

где $x$ – фазовый вектор;

$(\xi_0)$ – вектор внешних воздействий;

$t$ – время;

$u_i$ – вектор управляющих воздействий $i$ субъекта.

Эта модель описывает конфликтную ситуацию, то есть ситуацию, когда цели управляющих субъектов (оперирующих сторон) не тождественны, а могут оказаться и взаимоисключающими. Модели такого рода могут использоваться для поиска оптимальной стратегии любого из субъектов, включенных в модель, однако, следует помнить, что в любом случае эта оптимизация выполняется в интересах только одной из оперирующих сторон. Существенные проблемы при решении оптимизационных задач этого типа возникают по той причине, что при построении модели (3.1.3) помимо определения собственных целей оперирующей стороны необходимо определить и цели других оперирующих сторон. Отметим, что эти определения носят характер гипотез, поскольку даже при определении собственных целей возникают неопределенности (смотри раздел 1.3.1). По этой причине и результат оптимизации приобретает характер гипотезы, обоснованность которой не превышает обоснованность гипотез о целях оперирующих сторон.

## 3.2 Статистические модели

Модели, описанные в предыдущем разделе, по своей сути являются моделями эволюции, то есть изменения объекта во времени. Следует отметить, что причиной эволюции всегда является некоторый потенциал, существующий в системе. Например, интродукция нового вида живых организмов в определенный ареал обитания приводит к тому, что их численность начинает расти, однако, этот рост носит ограниченный характер. С течением времени численность нового вида и остальные параметры, характеризующие экологическое состояние этого ареала, стабилизируются.

Состояние динамической системы, в котором ее параметры перестают зависеть от времени, называют стационарным. Иногда в качестве эквивалента термина «стационарное состояние» используют термин «равновесное состояние». Однако, на мой взгляд, термин «равновесие» больше подходит для описания закрытых систем, то есть систем, в которых обмен веществом и энергией с окружающей средой отсутствует. Экологические системы обычно являются системами открытыми. Поэтому применительно к этим системам для обозначения неменяющегося во времени состояния термин «стационарное» является предпочтительным по сравнению с термином «равновесное».

Отметим, что каждому типу вышеперечисленных динамических моделей соответствует статический аналог. Формально эти аналоги могут рассматриваться как стационарные решения соответствующих динамических задач. Напомним что, условием стационарности является отсутствие изменений фазового вектора во времени. При этом условии выражение (3.1.1) упрощается до (3.2.1).

$$0 = f(x, t, \xi) \tag{3.2.1}$$

При этом ноль в левой части (3.2.1) отражает отсутствие изменения фазового вектора во времени. В свою очередь выражение (3.2.1) представляет собой функциональную зависимость, которая может быть приведена к виду (3.2.2)

$$x = g(\xi) \tag{3.2.2}$$

Переменная $t$ опущена, поскольку в условиях стационарного решения фазовый вектор не зависит от времени.

Функциональные зависимости вида (3.2.2) допускают и иные интерпретации. Например, параметры правой части этого выражения могут рассматриваться как совокупность воздействий на тот или иной объект, а выражение в левой части – как реакция объекта на эти воздействия.

Выражения вида (3.2.2) широко используются в процедурах интерпретации экспериментальных данных так называемыми статистическими моделями. При этом типична следующая постановка задачи.

Исходные данные представляют собой набор измерений нескольких характеристик объекта. Задачей является установление функциональной зависимости одной из наблюдаемых величин от остальных. Отметим, что для решения этой задачи необходимо предложить ту или иную гипотезу о виде функциональной зависимости (3.2.2).

Простейшей гипотезой является гипотеза о том, что интересующая нас характеристика не зависит от остальных, а наблюдаемые вариации этой характеристики носят случайный характер. При этом мы можем найти оценки некоторых характеристик функции распределения этой случайной величины. Например, оценка математического ожидания (среднего значения распределения) дается выражением (3.2.3), а дисперсии – выражением (3.2.4).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{3.2.3}$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)}{n-1} \tag{3.2.4}$$

где $x_i$ – $i$ значение измерения;

$n$ – количество измерений;

$\bar{x}$ – математическое ожидание (среднее значение);

$\sigma$ – дисперсия распределения.

Кроме того, мы можем предложить и статистически проверить гипотезу о том или ином характере функции распределения изучаемой случайной величины. Используя функцию распределения и ее параметры, мы можем определить интервал значений, в котором изучаемая величина будет находиться с заданной степень вероятности.

Более сложные гипотезы сводятся к тому, что интересующая нас характеристика зависит от остальных измерений и эта зависимость определяется тем или иным конкретным математическим выражением (моделью). Например, в качестве такого выражения может использоваться так называемое уравнение линейной регрессии (3.2.5)

$$y_i = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x_{ij} \tag{3.2.5}$$

где $y_i$ – интерпретируемый показатель из $i$ набора измерений;

$x_{ij}$ – $j$ характеристика из $i$ набора измерений;

$a_j$ – $j$ параметр модели.

При этом задача заключается в подборе параметров модели таким образом, чтобы обеспечить минимальное различие между значениями, измеренными в эксперименте и вычислениями по модели. Измеряемая величина по-прежнему считается случайной, а ее отклонения от модели объясняются неточностями измерений и несовершенством модели. Такой подход к определению измеряемой величины влечет необходимость представлений о том, что параметры модели также являются случайными величинами, для которых можно определить наиболее вероятные значения и доверительные интервалы.

Отметим, что обычно по мере увеличения количества параметров модели уменьшается неувязка и, одновременно, увеличиваются доверительные интервалы определения параметров.

Для оценки каждого параметра статистической модели могут быть проверены обычные статистические гипотезы. Например, для каждого параметра линейной регрессии (3.2.5) может быть проверена гипотеза о равенстве этого параметра нулю. В том случае, если эта гипотеза не опровергается, параметр признается статистически незначимым и обычно исключается из модели.

Этот прием позволяет с одной стороны упростить модель, а с другой – повысить точность определения остальных параметров.

**Контрольные вопросы**

1. Что такое динамические модели?
2. Что такое статистические модели?
3. Статистическую модель можно охарактиризовать как с точки зрения точности соответствия исходных данных и расчетных значений, которая оценивается по сумме квадратов разностей между этими значениями, так и с точки зрения точности (доверительных интервалов) расчетных значений. Какой из этих параметров следует рассматривать как критерий качества статистической модели?

# 4. Динамика численности изолированных популяций

## 4.1 Экспоненциальная модель роста

Первой моделью роста популяции является экспоненциальная модель роста, предложенная Т. Мальтусом в 1798 году. Эта модель применима к росту популяции в отсутствии каких-либо факторов, сдерживающих этот рост.

Дифференциальное уравнение, соответствующее этой модели, представлено выражением (4.1.1).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x \qquad (4.1.1)$$

где

$x$ - численность популяции в момент времени t;

$\alpha$ - удельная скорость роста популяции.

Уравнение (4.1.1) имеет точное решение, определяемое выражением (4.1.2).

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} \qquad (4.1.2)$$

где

$x_0$ - численность популяции в начальный момент времени (при t=0).

Графическое изображение зависимостей, определяемых выражением (4.1.2) представлено на Рис. .

Как видно из рисунка 8, в том случае, если удельная скорость роста популяции положительна (рождаемость превышает смертность), то численность популяции неограниченно возрастает, причем скорость роста увеличивается по мере увеличения численности популяции. В противном случае численность популяции сокращается до 0.

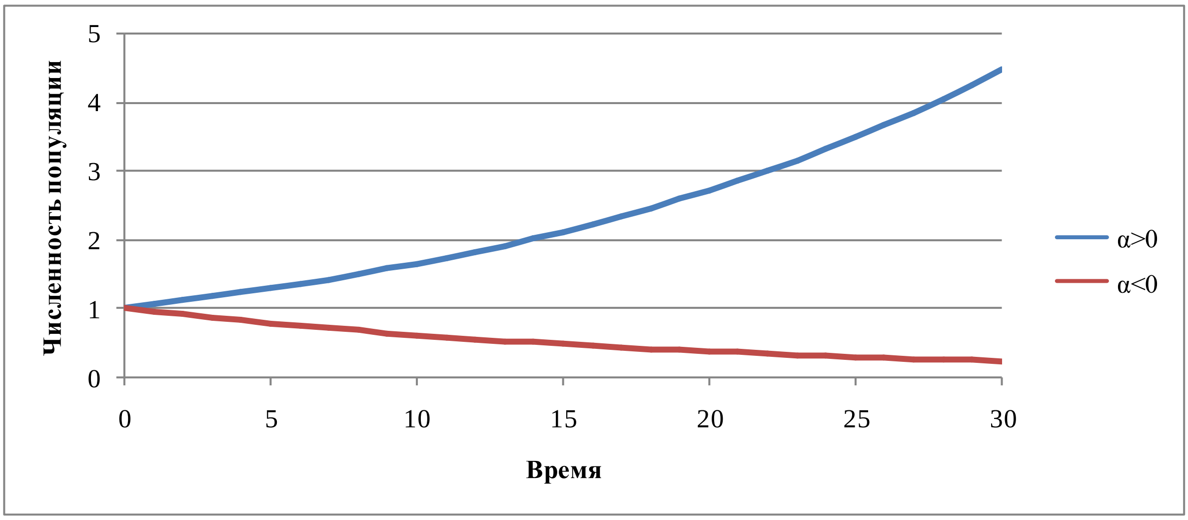



**Рис. 8 – Зависимость численности популяции от времени для экспоненциальной модели роста**

Экспоненциальная модель роста применима к довольно ограниченному числу задач, например, к описанию начального периода роста микроорганизмов, внесенных в питательную среду. В более сложных случаях для описания роста популяций необходимо использовать более сложные модели, предусматривающие те или иные ограничения роста. Примером такой модели является модель логистического роста, рассмотренная в следующем разделе.

## 4.2Модель логистического роста

Данная модель была предложена П. Ферхюльстом в 1838 году. Модель содержит предположение о том, что рост численности популяции имеет некоторый предел. Дифференциальное уравнение, соответствующее логистической модели роста, представлено выражением (4.2.1).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{x_{\max}}\right) \tag{4.2.1}$$

где

$x$ - численность популяции в момент времени t;

$\alpha$ - удельная скорость роста популяции;

$x_{max}$ - максимальная численность, до которой может расти популяция.

Как видно из выражения (4.2.1), при условии $N << N_{\max}$ выражение $1-N/N_{\max}$ стремится к 1, и в этих условиях логистическая модель становится близкой к экспоненциальной модели. При условии $N \approx N_{\max}$ выражение $1-N/N_{\max}$ и скорость изменения численности популяции стремятся к 0 и численность популяции стабилизируется.

Уравнение (4.2.1) имеет точное решение, представленное выражением (4.2.2)

$$N(t) = \frac{x_{\max} \cdot x_0 \cdot e^{\alpha \cdot t}}{x_{\max} + x_0 \cdot \left(e^{\alpha \cdot t} - 1\right)} \qquad (4.2.2)$$

где

$x_0$ - численность популяции в начальный момент времен (при t=0).

Графические зависимости, представляющие выражение (4.2.2), изображены на рис.9.

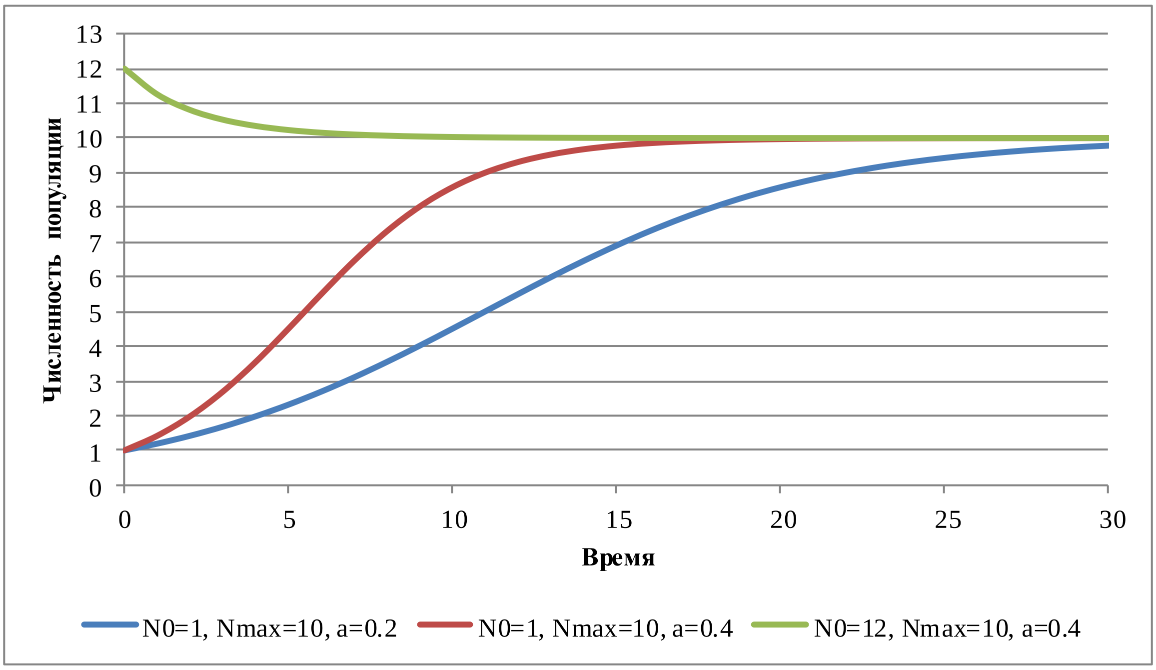



**Рис. 9 – Зависимость численности популяции от времени для логистической модели роста**

Как видно из рисунка 9, если начальное значение численности популяции меньше максимального значения, то происходит рост популяции до численности равной $N_{max}$. При этом максимальная численность достигается тем быстрее, чем больше величина α.

В том случае, если начальная численность популяции превосходит максимальную численность, популяция сокращается до численности равной $N_{max}$.

Важным свойством модели логистического роста является то, что по мере течения времени скорость изменения численности популяции уменьшается, а сама численность стабилизируется. Состояние динамической системы, в котором ее характеристики не зависят от времени, называется стационарным состоянием.

### 4.3 Модель с нижней границей численность популяции

В ранее рассмотренных моделях присутствовало предположение о том, что как рождаемость, так и смертность не зависят от численности популяции. Такое предположение хорошо согласуется с действительностью, если речь идет о размножении бесполой популяции, например, посредством деления, когда акт размножения особи не зависит от присутствия иных особей. Для двуполой популяции естественно ожидать, что абсолютная скорость размножения должна быть пропорциональна частоте контактов между особями.

Если принять это предположение и сохранить предположение о том, что смертность не зависит от численности популяции, и учесть, что оплодотворенная самка на некоторое время выбывает из процесса размножения, то скорость изменения численности популяции можно представить выражением (4.3.1)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha \cdot x \cdot (x - L)}{x + N} \qquad (4.3.1)$$

где

L - критическая численность (плотность) популяции;

N - плотность популяции, при которой к размножению способна половина самок.

Комбинируя выражение (4.3.1) с условиями ограниченности ресурсов, рассмотренными в предыдущем разделе, получаем выражение (4.3.2).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha \cdot x \cdot (x - L) \cdot (K - x)}{(N + x) \cdot K} \qquad (4.3.2)$$

где

x - численность популяции;

α - удельная скорость роста;

L - нижняя граница численности;

K - максимальная численность популяции;

N - плотность популяции, при которой к размножению способна половина самок.

Графические зависимости, представляющие решения уравнения изображены на рис.10.

Из рисунка 10 видно, что в том случае, если начальная численность популяции превышает критическую, то численность популяции возрастает до максимально возможной численности. Если начальная численность ниже критической – популяция вымирает.

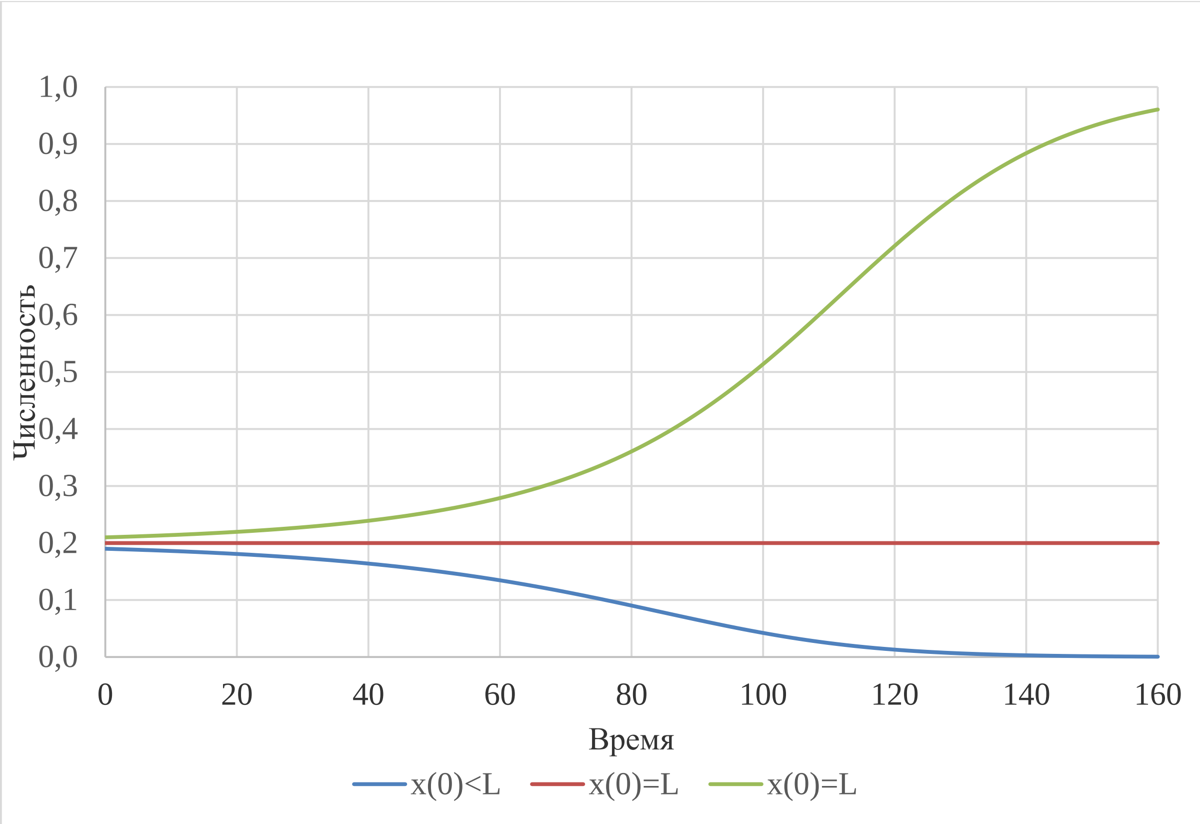



**Рис. 10 – Динамика численности популяции по модели с нижним пределом численности**

Таким образом, популяция, поведение которой соответствует уравнению (4.3.2), имеет три состояния, в которых численность популяции перестает зависеть от времени. Такие состояния называются стационарными и для уравнения (4.3.2) перечислены в таблице 2.

Таблица 2 – Стационарные состояния для уравнения (4.3.2).

| № п/п | Стационарное состояние | Начальное условие, при котором реализуется стационарное состояние |
|---|---|---|
| 1 | x=K | x(0)>L |
| 2 | x=L | x(0)=L |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | x=0 | x(0)<L |

Решения дифференциальных уравнений и стационарные состояния (если они существуют) принято характеризовать с точки зрения их устойчивости. При этом устойчивыми решениями являются те решения, для которых малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям в решении.

В этом смысле стационарные состояния 1 и 3, перечисленные в таблице 2, являются устойчивыми, поскольку к ним приводят любые значения начальных условий, соответствующих интервалам, указанным в той же таблице. Стационарное состояние 2 является неустойчивым, поскольку любое изменение начального условия, каким бы малым оно ни было уводит решение к стационарному состоянию 1 или 3.

## Контрольные вопросы

1. Какие условия должны выполняться для оценки роста популяции с помощью экспоненциальной модели?
2. Приведите примеры задач, для решения которых можно использовать экспоненциальную модель роста популяции.
3. Какое предположение об изменении численности популяции лежит в основе модели логистического роста?
4. Что такое стационарное состояние в динамической модели роста популяции?
5. Какие варианты динамики численности популяции возможны при использовании модели с нижним пределом численности?

# 5. Динамика численности взаимодействующих популяций

## 5.1 Модель хищник – жертва

Первая модель, описывающая динамику численности (плотности) двух популяций, взаимодействующих по принципу хищник—жертва, была предложена независимо А. Лотка и Вито Вольтерра.

В основу модели положены следующие идеализированные представления о характере внутривидовых и межвидовых отношений в системе хищник-жертва:

1. в отсутствие хищника популяция жертвы размножается в соответствии с принципом Мальтуса — экспоненциально;
2. популяция хищника в отсутствие жертвы экспоненциально вымирает;
3. суммарное количество жертвы, потребляемое популяцией хищника в единицу времени, линейно зависит и от плотности популяции жертвы, и от плотности популяции хищника;
4. потребленная хищником биомасса жертвы с постоянным коэффициентом перерабатывается в биомассу хищника;
5. какие бы то ни было дополнительные факторы, оказывающие влияние на динамику популяций, отсутствуют.

Система уравнений, соответствующая этой модели, представлена выражением (5.1.1).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y \\ \dfrac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y \end{cases} \qquad (5.1.1)$$

где

x, y - плотности популяции жертвы и хищника, соответственно;

| | |
|---|---|
| a | - скорость размножения популяции жертвы в отсутствие хищника; |
| b | - удельная скорость потребления популяцией хищника популяции жертвы при единичной плотности обеих популяции; |
| c | - естественная смертность хищника; |
| d/b | - коэффициент переработки потребленной хищником биомассы жертвы в собственную биомассу. |

В исходной записи система (5.1.1) зависит от четырех параметров. После замены переменных $x=\frac{a}{d}\cdot u,\quad y=\frac{a}{b}\cdot v,\quad t=\frac{\tau}{a}$ получаем систему (5.1.2), которая зависит только от одного параметра.

$$\begin{cases}\frac{du}{d\tau}=u-u\cdot v\\ \frac{dv}{d\tau}=-\gamma\cdot v+u\cdot v\end{cases} \tag{5.1.2}$$

где $\gamma=c/a$

Подобный прием с заменой переменных часто используется при анализе систем дифференциальных уравнений. Он позволяет существенно уменьшить число параметров, влияющих на решение.

Система (5.1.2) имеет стационарное решение при начальных условиях $u(0)=1$ и $v=\gamma$. Это стационарное решение является неустойчивым. При малых отклонениях от условий существования стационарного решения в системе возникает колебательный процесс изменения численности популяций, как это показано на Рис. 11.

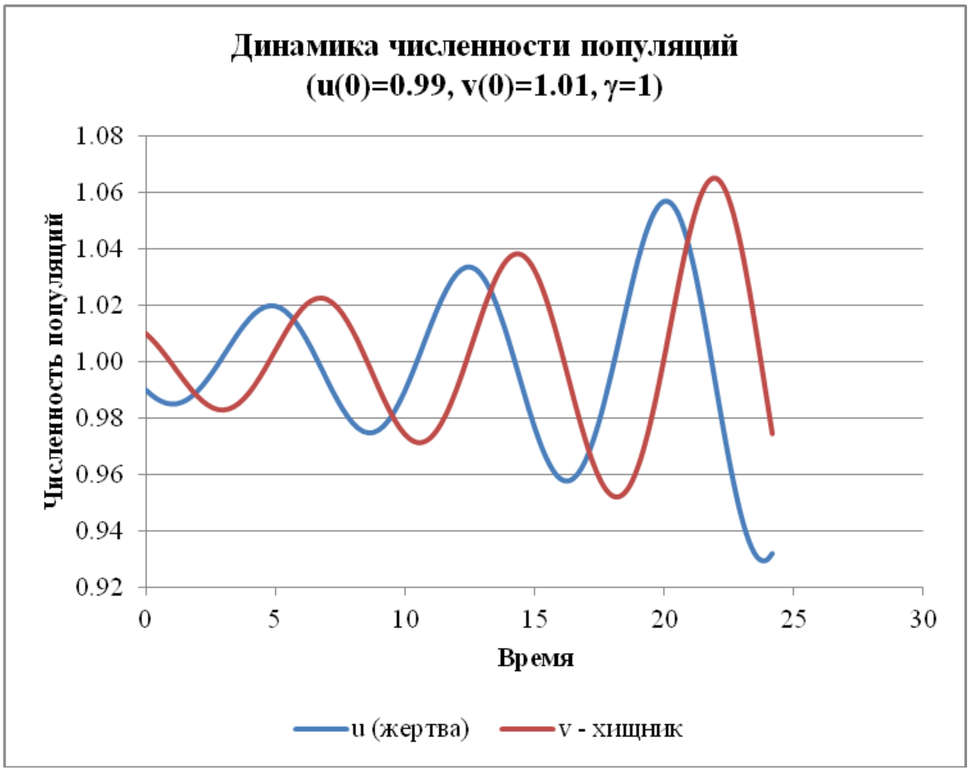



**Рис. 11 – Динамика численности популяций**

**(u(0)=0.99, v(0)=1.01, γ=1)**

Характерными особенностями колебательного процесса, представляющего решение системы уравнений (5.1.2) является то, что колебания численности хищников отстает по фазе от колебаний численности жертв. Кроме того, амплитуды колебаний численности хищников и жертв со временем возрастают.

Кроме представления решений систем дифференциальных уравнений в форме динамических кривых, изображенных на рисунке 11, такие решения изображают и форме «фазовых портретов». Фазовый портрет представляет зависимость одной характеристики системы от другой ее характеристики, например, зависимость численности хищников от численности жертв, как это изображено на Рис. 12.

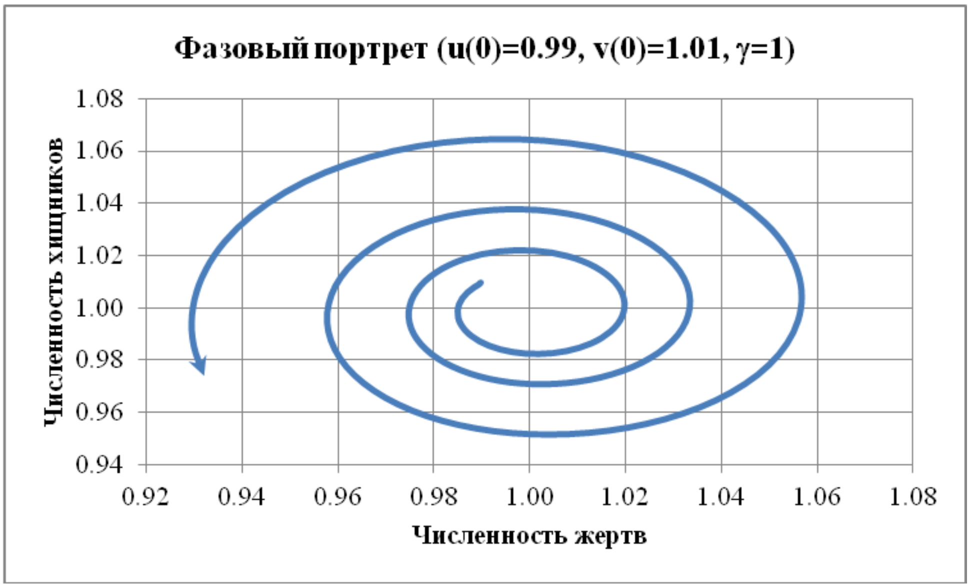



**Рис. 12 – Фазовый портрет (u(0)=0.99, v(0)=1.01, γ=1)**

Как видно из Рис. 12, фазовый портрет в данном случае представляет собой расширяющуюся спираль, начало которой соответствует начальным условиям, принятым при решении системы уравнений (5.1.2).

Простейшая модель хищник – жертва, определяемая системой уравнений (5.1.1), может быть усложнена при учете некоторых дополнительных факторов. Эти усложнения приводят к изменениям в уравнениях системы и в характере решения. Изменения в решения могут носить характер дестабилизации (усиления колебаний численности популяций) или стабилизации (ослабления этих колебаний). Перечень факторов, которые могут учитываться в различных модификациях модели хищник – жертва и их влияние на характер решения перечислены в таблице 3.

Таблица 3 – Факторы, которые могут учитываться в модели хищник – жертва, и влияние этих факторов на решение

| № п/п | Фактор | Влияние фактора на решение |
|---|---|---|
| 1 | Нелинейности размножения популяций жертвы и хищника при малой плотности | Дестабилизация |
| 2 | Насыщение хищника | Дестабилизация |
| 3 | Конкуренция в популяции жертв | Стабилизация |
| 4 | Конкуренция хищников за жертву и за отличные от жертвы ресурсы | Стабилизация |
| 5 | Нелинейность функции выедания хищником жертвы при малой плотности популяции жертв | Стабилизация |

## 5.2 Модель конкуренции популяций

Для описания динамики численности двух конкурирующих популяций была предложена система уравнений, представляющая собой естественное обобщение логистического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = a_1 \cdot x_1 \cdot \left(K_1 - x_1 - \alpha_1 \cdot x_2\right)/K_1 \\ \dfrac{dx_1}{d\tau} = a_1 \cdot x_1 \cdot \left(K_1 - x_1 - \alpha_1 \cdot x_2\right)/K_1 \end{cases} 1 \qquad (5.2.1)$$

где

$a_1$ *и* $a_2$ – коэффициенты экспоненциального роста обеих популяций при малых плотностях (т.е. в отсутствие внутри- и межвидовой конкуренции;

$K_1$ *и* $K_2$ – емкости экологических ниш для обеих

$\alpha_1$ *и* $\alpha_2$ – популяций;
коэффициенты межвидовой конкуренции.

Система может быть представлена в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = a_1 \cdot x_1 - e_{11} \cdot x_1^2 - e_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \dfrac{dx_1}{d\tau} = a_2 \cdot x_2 - e_{22} \cdot x_2^2 - e_{21} \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases} \tag{5.2.2}$$

где

eij – коэффициенты внутри- и межвидовой конкуренции

Заменой переменных $t = \tau / a_1, \quad x_1 = a_1 \cdot u_1 / e_{11}, \quad x_2 = a_2 \cdot u_2 / e_{22}$ система приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{d\tau} = u_1 \cdot (1 - u_1 - \varepsilon_1 \cdot u_2) \\ \dfrac{du_2}{d\tau} = \gamma \cdot u_2 \cdot (1 - u_2 - \varepsilon_2 \cdot u_1) \end{cases} \tag{5.2.3}$$

где

$u_1$ *и* $u_2$ – плотности популяций, нормированные к емкости экологических ниш обоих видов;

$\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon_2$ – коэффициенты межвидовой конкуренции в нормированных переменных ($\varepsilon_1 = a_2 / a_1 \cdot e_{12} / e_{22} \quad \varepsilon_2 = a_1 / a_2 \cdot e_{22} / e_{11}$);

$\gamma = a_1 / a_2$

Поведение системы не зависит от значения параметра $\gamma$. Условие $\varepsilon_1 > 1$ и $\varepsilon_2 < 1$ означает, что второй вид во всех отношениях уступает первому и потому всегда вытесняется им. Условие $\varepsilon_1 < 1$ и $\varepsilon_2 > 1$ эквивалентно предыдущему с точностью до изменения нумерации видов. При этих условиях второй вид вытесняется первым. Условие $\varepsilon_1 < 1$ и $\varepsilon_2 < 1$ означает, что интенсивность межвидовой конкуренции для каждого из видов меньше интенсивности внутривидовой конкуренции. В этих условиях обеспечивается возможность сосуществования конкурирующих видов. Предельной в этом случае является ситуация $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 0$, то есть отсутствие межвидовой конкуренции (виды "не обращают внимания друг на друга"). Условие $\varepsilon_1 > 1$ и $\varepsilon_2 > 1$ означает, что межвидовая конкуренция для каждого из видов сильнее внутривидовой. В этом случае устойчивое сосуществование видов невозможно и в зависимости от начальных условий одна из популяций всегда вытесняет конкурента.

## Контрольные вопросы

1. Какие идеализированные представления о характере внутривидовых и межвидовых отношений в системе хищник-жертва положены в основу модели хищник-жертв»?
2. Каковы характерные особенности колебательного процесса, описывающего взаимоотношения хищник-жертва в соответствующей модели.
3. Какие факторы могут учитываться в различных модификациях модели хищник – жертва? Какие из них могут приводить к дестабилизации или стабилизации обеих популяций?
4. При каких условиях обеспечивается возможность сосуществования конкурирующих видов?
5. При каких условиях один из конкурирующих видов вытесняет другой?

## Заключение

Методы системного анализа и построения математических моделей широко используются в настоящее время как для проведения чисто научных исследований и прогнозирования состояния популяций различных организмов, так и для решения практических задач природоохранного характера.

Разработка любой модели стимулирует упорядочивание всей уже имеющейся информации об объекте, приводит к необходимости планировать систематический сбор данных, позволяет давать содержательную их интерпретацию, а также проводить прогноз развития ситуации и при необходимости разрабатывать мероприятия ее стабилизации или улучшения.

Математическая модель помогает оптимизировать стратегию управления экосистемами на основании уже имеющихся количественных показателей (концентрация компонентов природных сред, численность и возрастная структура популяций, интенсивность экзогенных воздействий и т.д.), т. к. она позволяет определить те или иные цели по улучшению состояния систем в терминах состояния экологической системы, то есть цель становится функционалом математической модели экологической системы.

Методы системного анализа и построения математических моделей уже позволили человечеству понять много интересных закономерностей развития отдельных популяций, экосистем и биосферы в целом и будут широко использоваться в дальнейшем и как методы познания мира, и как методы решения практических задач по сохранению равновесия на нашей планете.

## Словарь терминов и определений

АЛЬТЕРНАТИВА (АЛЬТЕРНАТИВНАЯ СТРАТЕГИЯ) – понятие исследования операций, теории игр, теории решений – возможный вариант решения задачи.

В ряде случаев, например, в играх (см. Теория игр), возникает необходимость выяснения альтернативных контрстратегий, т. е. возможных действий других участников игры или действий “природы”, способных отрицательно повлиять на результаты решения задачи, несмотря на удачный выбор стратегии.

Постановка задачи исследования операций может считаться законченной лишь тогда, когда определен список альтернатив и способ (критерий) выбора наилучшей из них для достижения заданной цели.

АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ — независимая переменная — переменная, от значений которой зависят значения функции.

ДИСПЕРСИЯ — характеристика рассеивания значений случайной величины, измеряемая квадратом их отклонений от среднего значения (обозначается $\delta^2$). Для дискретного распределения дисперсия определяется по формуле:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}$$

где $x_i$ — наблюдаемая случайная величина; $\bar{x}$ — средняя исследуемого ряда; $N$ — число элементов этого ряда. Имеются и другие формулы для расчета дисперсии, например

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратичным (квадратическим) отклонением или стандартным отклонением; отношение среднего квадратичного отклонения к средней величине называется коэффициентом вариации.

КРИТЕРИЙ — признак, на основании которого производится оценка (например, оценка качества системы, ее функционирования), сравнение альтернатив (т. е. эффективности различных решений), классификация объектов и явлений. Частным случаем Критерия является Критерий оптимальности.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ — одна из числовых характеристик случайной величины, часто называемая ее теоретической средней. Для дискретной случайной величины X (заданной значениями $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ и соответствующими этим значениям вероятностями $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$) математическое ожидание определяется формулой $Mx = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$, а для непрерывной случайной величины М. о. равно интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx,$$

где $P(x)$ — функция плотности распределения вероятностей.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ — метод решения задач, которые состоят в поиске лучшего (оптимального) решения, удовлетворяющего нескольким не сводимым друг к другу критериям.

МНОЖЕСТВО — произвольная совокупность определенных и различимых объектов, объединенных мысленно в единое целое.

МОДЕЛЬ — логическое или математическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса (обычно рассматриваемых как системы или элементы системы). М. используется как условный образ, сконструированный для упрощения их исследования. Природа моделей может быть различной (общепризнанной единой классификации моделей в настоящее время не существует): материальные или вещественные модели (напр., М. самолета в аэродинамической трубе); знаковые модели двух типов — графические (чертеж, географическая карта) и математические (формула, описывающая гравитационное взаимодействие двух тел); материально-идеальные (“деловая игра”); словесное описание объекта (явления, процесса) можно также рассматривать как его М.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ в системе — ситуация, когда полностью или частично отсутствует информация о возможных состояниях системы и внешней среды. Иначе говоря, когда в системе возможны те или иные непредсказуемые события (вероятностные характеристики которых не существуют или неизвестны). Это неизбежный спутник больших (сложных) систем; чем сложнее система, тем большее значение приобретает фактор неопределенности в ее поведении (развитии).

ОБЪЕКТ — предмет, вещь, явление, на которые направлена деятельность; то, что подвергается какому-либо воздействию.

ОГРАНИЧЕНИЯ МОДЕЛИ — элемент экономико-математической модели, математические соотношения, отражающие свойства моделируемых объектов во взаимосвязи с внешними (ограничивающими) факторами. Обычно представляя собой систему уравнений и неравенств, они в совокупности определяют область допустимых решений (допустимое множество).

Совместность системы ограничений — обязательное условие разрешимости модели: в случае несовместности этой системы допустимое множество является пустым.

На практике в качестве О. м. часто выступают ресурсы сырья и материалов, капиталовложения, возможные варианты расширения предприятий, потребности в готовой продукции и т. п.

ОПЕРАЦИЯ — Совокупность действий, направленных на достижение некоторой цели, основное понятие научной дисциплины “исследование операций” (примеры см. в ст. “Исследование операций”). Степень соответствия результата операции поставленной цели характеризуется критерием эффективности операции. Результат операции зависит от действий оперирующей стороны, а также от неконтролируемых факторов, создающих обстановку (условия) проведения этой операции.

Неконтролируемые факторы могут быть:

а) фиксированными (значение их известно);

б) случайными фиксированными (известен закон их распределения);

в) неопределенными, для которых может быть известна только возможная область изменения (либо в силу ограниченности знаний, либо если эти факторы отражают действие каких-то объектов, независимых от оперирующей стороны и преследующих собственные цели).

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — экономико-математическая задача, цель которой состоит в нахождении наилучшего (с точки зрения какого-то критерия) распределения наличных ресурсов. Решается с помощью оптимальной модели методами математического программирования, т. е. путем поиска максимума или минимума некоторых функций или функционалов при заданных ограничениях (условная оптимизация) и без ограничений (безусловная оптимизация).

ПАРАМЕТР МОДЕЛИ [parameter] — относительно постоянный показатель, характеризующий моделируемую систему (элемент системы) или процесс. Параметры указывают, чем данная система (процесс) отлична от других. Поэтому, строго говоря, они могут быть не только количественными (т. е. показателями), но и качественными (напр., некоторыми свойствами объекта, его названием и т. п.).

В научной литературе распространено следующее определение: основные параметры системы — это такие ее характеристики, которые изменяются лишь тогда, когда меняется сама система, т. е. для данной системы — это константы. Однако оно не вполне точно. На самом деле параметры модели все же могут быть переменными величинами, изменяющимися относительно медленно; для упрощения расчетов они принимаются на какой-то не очень длительный период за постоянные. Иногда приходится включать в модель коэффициенты изменения параметров за изучаемый срок. Это усложняет расчеты по модели, зато дает более точные результаты.

ПРОЦЕСС — последовательная смена состояний, стадий изменения (развития) системы или иного объекта.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (в математической статистике) — ряд чисел, показывающих, как часто встречается то или иное значение случайной величины, или соответствующая таблица, диаграмма или математическая формула, их заменяющая. Различают эмпирические Р. в., получаемые в результате экспериментов и измерений, и теоретические Р. в. (к которым бывает удобно с той или иной точностью приводить эмпирические Р. в.) Если, например, при обработке результатов наблюдения получены некоторые числовые данные, то можно сгруппировать их, собрав в каждую группу или одинаковые значения, или значения, попадающие в тот или иной интервал. Обозначая через $x_1$, $x_2$, ..., $x_m$ последовательность данных наблюдений и через $n_1$, $n_2$, ..., $n_m$ частоты (числа соответствующих им наблюдений), получим эмпирическое статистическое распределение вероятностей.

Случайная величина считается заданной, если известен закон ее распределения, т. е. известно или может быть определено, какова частота тех или иных ее значений в общей совокупности. Одной из форм его выражения является функция распределение вероятностей, равная вероятности того, что случайная величина будет меньше произвольно выбранного значения (или равна ему).

РЕГРЕССИЯ — зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от некоторой другой величины или нескольких величин (в последнем случае — имеем множественную Р.). Следовательно, при регрессионной связи одному и тому же значению x величины X (в отличие от функциональной связи) могут соответствовать разные случайные значения величины Y. Распределение этих значений называется условным распределением Y при данном X = x.

Уравнение, связывающее эти величины, называется уравнением Р., а соответствующий график — линией Р. величины Y по X.

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, СЛУЧАЙНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ — всякая наблюдаемая величина, изменяющаяся при повторении общего комплекса условий, в которых она возникает. Она принимает в зависимости от случая те или иные значения с определенными вероятностями. Таким образом, ее значения образуют множество элементарных случайных событий**.** Распределение вероятностей случайной величины, служит ее важнейшей характеристикой.

Случайные величины бывают дискретные и непрерывные, в зависимости от того, какое множество событий (дискретное или непрерывное) пробегают их значения.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ — описание теорий, осмысленных предложений и т. п. формальными средствами, прежде всего символами математики и математической логики.

Систему таких символов и правил обращения с ними позволяет производить логические заключения, подсчеты и другие операции непосредственно с символами, формулами, выступающими в качестве заместителей тех понятий, которыми мы оперируем. Нередко одна и та же формулизация применяется для описания разных явлений.

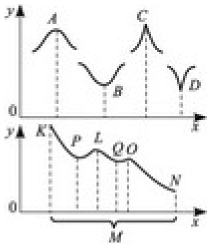
ФУНКЦИОНАЛ — переменная величина, заданная на множестве функций, т. е. зависящая от одной или нескольких функций.

В контексте данного пособия – использование функционала позволяет сформулировать критерий оптимальности для оценки результатов операции в зависимости от конечного множества учитываемых параметров (смотри многокритериальные задачи) или в зависимости от поведения некой функции в определенной области (смотри выбор оптимального управление).

ФУНКЦИЯ — соответствие y=f(x) между переменными величинами, в силу которого каждому рассматриваемому значению некоторой величины x (аргумента или независимой переменной) соответствует определенное значение другой величины, y (зависимой переменной). Функция задана, если известен закон, определяющий такое соответствие. На практике она задается формулой, таблицей или графиком (есть и другие способы, напр. алгоритмический — см. Алгоритм).

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ [extremum] — термин, объединяющий понятия максимума и минимума функции. В точках максимума (минимума) значение функции больше (соответственно меньше) всех соседних ее значений.

Для непрерывной функции экстремум может иметь место только в тех точках, где производная или равна нулю (точки *A*, *B*), или не существует (в частности, обращается в бесконечность — точки *C* и *D*).




Изображенная на рисунке функция имеет на отрезке [M] единственный **глобальный максимум** — в точке *K* и единственный глобальный минимум — в точке *N*, два локальных максимума (точки *L* и *O*) и два локальных минимума (*P* и *Q*).

## Список рекомендуемых источников


1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981. 488 с.
2. Ризниченко Г.Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии. М, Изд-во Юрайт, 2017.– 183 с. www.biblio-online.ru
3. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические методы в биологии и экологии. Биофизическая динамика продукционных процессов. В 2 частях. Часть 1. М, Изд-во Юрайт, 2017.– 253 с. Серия « Университеты России» www.biblio-online.ru
4. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические методы в биологии и экологии. Биофизическая динамика продукционных процессов. В 2 частях. Часть 2. М, Изд-во Юрайт, 2017.– 211 с. Серия « Университеты России» www.biblio-online.ru