МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д.Н. Прянишникова»

С.В.Каштаева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Учебное пособие

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2020

УДК 330.322.013
ББК 65.263
С329

Рецензенты:

Д.В. Климов, кандидат экономических наук, доцент кафедры предпринимательства и экономической безопасности, ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет».

И.Ю. Загоруйко, доктор экономических наук, профессор кафедры менеджмента, ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ.

С 329 Каштаева, С.В.

Математическая экономика : учебное пособие / С.В.Каштаева; Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский аграрно-технологический университет имени академика Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2020.– 96 с ; 21 см – Библиогр.: с.95-96. – 50 экз. – ISBN 978-5-94279-474-3 – Текст : непосредственный

В учебном пособии изложены методологические аспекты применения математических методов и моделей в экономической теории и практике, рассмотрены общие модели экономики, модели межотраслевого баланса и потребительского выбора, модели математического и линейного программирования, производственные функции и модели финансовых потоков. Имеются вопросы для самоконтроля по разделам и для подготовки к промежуточной аттестации.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика, направленность (профиль) «Прикладная информатика в экономике», а также может быть использовано специалистами предприятий агропромышленного комплекса, преподавателями и аспирантами сельскохозяйственных вузов.

УДК 330.322.013
ББК 65.263

Утверждено в качестве учебного пособия Методическим советом ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ (протокол № 3 от 07.11. 2019 г.)

Учебное издание

Каштаева Светлана Васильевна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА
Учебное пособие

Подписано в печать 25.03.20. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л.6,0. Тираж 50 экз. Заказ № 12

ИПЦ «Прокростъ»

Пермского государственного аграрно-технологического университета
имени академика Д.Н. Прянишникова,
614990, Россия, Пермь, ул. Петропавловская, 23

ISBN 978-5-94279-474-3

Содержание

Список сокращений

ЛП – линейное программирование

МОБ – межотраслевой баланс

ПФ – производственная функция

ПФКД – производственная функцияКобба-Дугласа

ТЗ – транспортная задача

IT-проект– проект с использованием информационных технологий

IT-технология– технология с использованием информационных средств, вычислительной техники и т.п.

MRTS – предельная норма технологического замещения факторов производства

ВВЕДЕНИЕ

В подготовке обучающихся по экономическим направлениям значительное место занимает изучение типичных для соответствующей предметной области математических моделей и методов, позволяющих, оперируя этими моделями, объяснять поведение рассматриваемых систем, оценивать их характеристики, обоснованно принимать конструктивные, технологические, экономические, организационные и другие решения. Математический аппарат, позволяющий решать типовые и наиболее важные для соответствующей сферы приложений задачи, изучается в специальных дисциплинах. В рамках действующих учебных планов по подготовке бакалавров по направлению 09.03.03 Прикладная информатика одной из таких дисциплин является «Математическая экономика».

Цель издания учебного пособия – помочь обучающимся освоить современные математические модели и методы анализа и научного прогнозирования поведения экономических объектов в соответствии с учебной программой дисциплины «Математическая экономика».

Изучение материала, представленного в данном учебном пособии, направлено на формирование следующих компетенций, предусмотренных ФГОС ВО по направлению 09.03.03 Прикладная информатика:

− способности анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования (ОПК–2);

− способности применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач (ПК–23).

В результате изучения дисциплины студент должен овладеть навыками математического моделирования для анализа социально-экономических задач и процессов, освоить математические методы для формализации решения прикладных задач.

В учебном пособии представлены и систематизированы сведения научно-практического и прикладного характера, изложенные в доступной и удобной форме, с точки зрения самостоятельного изучения и освоения учебной дисциплины «Математическая экономика».

Учебное пособие обобщает существующие учебники и учебные пособия по дисциплине «Математическая экономика» и отражает авторскую трактовку содержания дисциплины.

В последние годы использование математических методов в экономике стало особенно *актуальным* по нескольким причинам:

− в экономике все чаще стали реализовываться крупные проекты, в которых задействованы значительные ресурсы, а это требует взвешенного, по возможности, оптимального их использования;

− деятельность предприятий любого профиля (производственных, финансовых, транспортных, страховых и т.д.) осуществляется в условиях конкуренции, в которой успеха добиваются те, кто наиболее эффективно использует ресурсы;

− стала доступной практически для всех вычислительная техника, которая дает возможность реализовывать алгоритмы вычислений любой сложности.

Для внедрения математических методов и информационных технологий в практическую деятельность нужны специалисты, которые, с одной стороны, достаточно глубоко разбираются в сущности экономических проблем и способны формализовать возникающие задачи, а с другой – профессионально владеют математическими методами и соответствующим программным обеспечением.

Степень новизны издания данного учебного пособия заключается в следующем:

– систематизированное содержание дисциплины, которая имеет разноречивые трактовки в разных источниках;

– представлена теория устойчивости оптимальных планов при изменении параметров моделей в линейном программировании, что практически не отражено в учебных изданиях по «Математической экономике»;

– приведена авторская методика расчета экономического эффекта от внедрения IT-проектов.

Особенности авторской концепции отражены в содержании данного учебного пособия.

Учебное пособие включает четыре основных раздела.

В разделе 1 «Макроэкономические модели в экономике» представлены основы математического моделирования в экономике, виды экономико-математических моделей, рассмотрены теоретические основы общих моделей развития экономики, разработки и использования балансовых моделей, в частности, модели межотраслевого баланса Леонтьева, представлена модель потребительского выбора.

В разделе 2 «Модели математического программирования» представлены постановка и виды задач математического моделирования, рассмотрены модели линейного программирования, анализ оптимальных планов с использованием теории двойственности и устойчивости оптимальных планов.

В разделе 3 «Производственные функции» отражены теоретические и практические основы, связанные с видами, свойствами и основными характеристиками производственных функций.

В разделе 4 «Модели финансовых потоков» отражены теоретические и практические основы, связанные с основными математическими расчетами по потокам денежных средств - наращением и дисконтированием, кредитным расчетам и оценкой экономической эффективности инвестиционных проектов.

Дидактический аппарат, представленный в учебном пособии в виде вопросов для самопроверки по разделам и в целом по дисциплине, позволит закрепить полученные знания. Список рекомендуемой литературы включает не только библиотечные фонды, но ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», информационных технологий, которые применяются в образовательном процессе и способствуют изучению дисциплины.

РАЗДЕЛ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

1.1 Основы математического моделирования в экономике

Математическая экономика – это наука, которая использует математический аппарат в качестве метода исследования экономических систем и явлений.

Она ориентирована на системное изучение экономики с помощью математических моделей микро- и макроуровней, а также в разрезе важнейших функциональных подсистем экономики (производственной и финансово-кредитной).

Задачами математической экономики являются:

– разработка математических моделей экономических объектов, систем и явлений (общих и частных задач экономики при различных условиях, предпосылках и на различных уровнях);

– изучение поведения участников экономики (условий существования оптимальных решений и их признаков, а также методов их вычисления в моделях потребления, фирмы и др.);

– изучение описательных моделей экономики (модели планирования, «затраты-выпуск», общего развития экономики и др.);

– анализ экономических величин и статистических данных (эластичности, средних и предельных величин, регрессионный и корреляционный анализ и прогнозирование экономических факторов и показателей).

Модель – это аналог реального объекта (процесса), обладающий наиболее существенными его свойствами и замещающий его в процессе исследования.

Моделирование – один из основных методов исследования социально-экономических систем. Под ним понимается способ теоретического или практического действия, направленный на построение и использование модели.

Математическое моделирование – это процесс установления соответствия реальной *системе S* математической модели М и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики реальной системы.

Математические модели можно разделить на аналитические, алгоритмические (имитационные) и комбинированные.

Для *аналитического моделирования* характерно то, что для описания процессов функционирования системы используются системы алгебраических, дифференциальных, интегральных или конечно-разностных уравнений. Аналитическая модель может быть исследована аналитическим методом, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик, и численным, когда, не умея решать уравнения в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных.

При *алгоритмическом (имитационном) моделировании* описывается процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Аналитические и имитационные модели бывают *детерминированные* и *статистические*. *Статистическое моделирование* представляет собой машинное воспроизведение функционирования вероятностных моделей, либо исследование детерминированных процессов, заданных в виде математических моделей с логическими элементами с помощью статистических испытаний на ЭВМ (метод Монте-Карло). При этом осуществляется случайное задание исходных данных с известными законами распределения и, как следствие, вероятностное оценивание характеристик исследуемых процессов.

Математические модели, в которых отражаются социально-экономические процессы, называются экономико-математичес - кими моделями.

Экономико-математические модели можно разделить на следующие виды в соответствии с указанными признаками.

По степени агрегирования объектов моделирования:

–*микроэкономические* – описывают поведение отдельных экономических звеньев (предприятия и фирмы) в рыночной среде;

–*одно-, двух-, многосекторные* (одно-, двух-, многопродуктовые) – описывают взаимодействие структурных и функциональных элементов экономики;

–*макроэкономические* – рассматривают экономику как единое целое, связывая укрупненные материальные и финансовые показатели: внутренний национальный продукт, потребление, инвестиции, занятость и т.д.;

–*глобальные* – описывают закономерности мирового (глобального) масштаба.

По предназначению(по цели создания и применения):

–*балансовые* – отражают требование соответствия наличия ресурсов и их использования;

–*оптимизационные* – позволяют найти наилучший вариант решения из множества альтернативных и другие;

–*эконометрические* – предназначены для анализа и прогнозирования процессов с использованием статистической информации.

1.2 Общие модели развития экономики

К *общим моделям развития экономики* можно отнести модели фирм, отраслевые модели и макроэкономические модели.

Модели фирм можно разделить:

- на модели отдельных фирм;
- модели конкурентных отраслей;
- модели дуополий (объединений двух фирм);
- модели олигополии (объединений нескольких фирм);
- модели монополий.

К *отраслевым моделям* относятся комплексные, или агрегированные, модели, описывающие отдельные отрасли народного хозяйства как единое целое.

Макроэкономические модели предназначены для имитации экономических систем крупного масштаба, таких как область или страна в целом.

Динамические модели макроэкономики можно разделить по способу учета динамики:

1) на модели с явным отражением фактора времени: модели Харрода, Домара, Леонтьева, Дж. Фон Неймана;
2) модели с неявным отражением фактора времени.

Акселератор – это такое звено системы управления, в котором выходная величина I учитывает запаздывание фактической скорости роста инвестиций по отношению к росту результатов производства (дохода), который вызывает (индуцирует) их.

Под мультипликатором понимается числовой коэффициент, который показывает зависимость изменения дохода от изменения инвестиций. Эффект мультипликатора в рыночной экономике состоит в том, что увеличение инвестиций приводит к увеличению национального дохода, который возрастает в гораздо больших размерах, чем первоначальный рост инвестиций.

История развития. На базе однопродуктивных схем распределения совокупного продукта Кейнс создал мгновенный мультипликатор. Харрод предложил принцип акселерации (1936 год). В 1937 году Лундберг показал, что принцип акселератора приводит к прогрессирующему росту продукции и дохода. В 1939 году Самуэльсон объединил модели мультипликатора и акселератора. Хикс развил эти исследования. Объединение идей Харрода и Домара дало новый толчок развитию исследований материального роста. Многоотраслевые динамические модели с мультипликатором и акселератором разработал и исследовал В. Леонтьев. Магистральные модели создал Дж. Фон Нейман.

Модель Самуэльсона-Хикса – это кейнсианская динамическая модель, в которой механизмы колебания конъюнктуры объясняются, исходя из принципа акселерации и мультипликатора. В ее основе – динамическое уравнение. Модель включает в себя только рынок с двумя экономическими субъектами – фирмы и домохозяйства:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \,, \tag{1.1}$$

где Y_t – национальный доход;

C_t – потребление населения;

I_t – инвестиции в производство;

G_t – правительственные затраты.

$$C_t = gY_{t-1} \,, \tag{1.2}$$

где Y_{t-1} – доход прошлого года;

g – коэффициент управления (налоговая политика).

Это модель экономического цикла. В ней допускается, что уровень С и ставки % неизменны, а объем предложения благ эластичен. Объем потребления текущего периода определяется доходом предшествующего периода.

Если под воздействием научно-технического прогресса автономные инвестиции увеличиваются, то, согласно принципу мультипликатора, увеличивается совокупный спрос и доход.

Прирост дохода вызывает колебание индуцированных (производных) инвестиций, то есть эффект мультипликатора вызывает действие акселератора.

Концепция Хикса основана на двух главных элементах:

– существование верхнего и нижнего барьеров не позволяют совокупным процессам расширения и падения дохода продолжаться до бесконечности;

– когда доход достигнет барьеров, он движется в обратном направлении.

Среди *моделей экономического роста* можно выделить модели Солоу,Домара, Харрода, Клейна.

Модель Солоу – это модель экономического роста, выявляющая механизм влияния сбережений, роста трудовых ресурсов и научно-технического прогресса на уровень жизни населения и его динамику. Модель разработана в 1956 году и учитывает только фирмы и домохозяйства.

В модели Солоу используется производственная функция Кобба-Дугласа, где отражено равенство совокупного спроса и совокупного предложения.

Модель отражает взаимосвязь между производительностью труда и капиталовооруженностью: объем производства в расчете на одного работника является функцией капитала на одного работника.

Модель Домара– это кейнсианская модель, исследующая двоякую роль инвестиций в увеличении совокупного спроса и в увеличении производственных мощностей совокупного предложения во времени.

Е. Домар рассматривает проблему полной занятости в долгом периоде. Основной вклад Домара в том, что он указал на необходимость учета обоих элементов инвестиций – мультипликатора и акселератора.

В модели Домара инвестиционные расходы, являясь элементом совокупного спроса, увеличивают общий спрос.

Модель Харрода - это модель, выявляющая механизм сбалансированного роста, опираясь на анализ психологических мотивов поведения предпринимателей и на уравнения, выражающие функциональные связи в экономике.

В модели Харрода, в отличие от модели Домара, функции инвестиций зависят от акселератора и ожиданий предпринимателей. В модели сбережения зависят от национального дохода. Сбережения в каждый данный период времени зависят от дохода этого же периода. Инвестиции во времени зависят от скорости изменения дохода от одного периода до следующего периода.

Если доход в текущем периоде обозначен Y_t, а в предыдущем Y_{t-1}, то I_t рассчитывается по формуле:

$$I_t=a(Y_t-Y_{t-1}) \qquad (1.3)$$

Модель Клейна– это макроэкономическая модель развития экономики, созданная в США на основе экономических показателей.

Все экономические связи в модели в линейной форме. Модель состоит из трех структурных уравнений и трех тождеств. Уравнения включают функцию потребления, функцию инвестиций, функцию заработной платы в частном секторе и т.д.:

$$\begin{aligned}
&Y_t=C_t+I_t+G_t-X_t \qquad (1.4)\\
&P_t=Y_t-(W_{1t}-W_{2t})\\
&K_t=K_t-1+I_t\\
&C_t=a_1+a_2(W_{1t}+W_{2t})+a_3P_t+a_4P_{t-1}+E_{1t}\\
&I_t=b_1+b_2P_t+b_3P_{t-1}+b_4K_{t-1}+E_{2t}\\
&W_{1t}=C_1+C_2(Y_t+X_t-W_{2t})+C_3(Y_{t-1}+X_{t-1}-W_{2t-1})+E_{3t}\ ,
\end{aligned}$$

где Y_t – национальный доход;

C_t – уровень потребления населения;

I_t– инвестиции в производство;

G_t – правительственные затраты;

P_t– суммарные прибыли;

K_t– суммарный основной капитал;

X_t – налог на деловую активность;

W_{1t} – фонд з/п в частном секторе;

W_{2t} – фонд з/п в правительственном секторе;

E – случайные величины;

X_t,G_t, W_{2t} – регулируются правительством.

1.3 Модель межотраслевого баланса Леонтьева

Межотраслевой баланс

Балансовая модель производства записывается в виде системы уравнений, каждое из которых выражает требование равенства (баланса) между количеством продукции, производимой отдельным экономическим объектом, и совокупной потребностью в этом продукте.

Под экономическим объектом обычно понимают так называемую «чистую отрасль», продукция которой складывается из продукции специализированных предприятий, очищенной от непрофильных ее видов, и продукции, соответствующей профилю данной отрасли, но произведенной на предприятиях, относящихся к другим отраслям.

Балансовые модели основываются на понятии межотраслевого баланса, который представляет собой таблицу, характеризующую связи между отраслями (экономическими объектами) экономической системы.

Предположим, что экономическая система состоит из n взаимосвязанных отраслей P_1, P_2, ..., P_n. Валовой продукт i-й отрасли обозначим через X_i(X_1 – валовой продукт P_1,X_2 – валовой продукт P_2, ..., X_n – валовой продукт P_n). Конечный продукт каждой отрасли обозначим буквой Y с индексом, соответствующим ее номеру (Y_i – конечный продукт P_i). Отрасли взаимосвязаны, т.е. каждая из них использует продукцию других отраслей в качестве сырья, полуфабрикатов и т. п.

Пусть X_{ij} – затраты продукции i-й отрасли на производство продукции P_j,j=1, …,n. Условно чистую продукцию i-й отрасли обозначим V_i.

Если перечисленные показатели представлены в межотраслевом балансе в тоннах, литрах, километрах, штуках и т. д., то говорят о межотраслевом балансе в натуральном выражении. Мы же договоримся, что под X_i, У_j, V_j и X_{ij} будем понимать выраженную в некоторых фиксированных ценах стоимость соответствующей продукции. Такой баланс называется стоимостным.

Всю информацию об экономической системе отразим в таблице межотраслевого баланса (таблица 1).

Первый квадрант. В таблице каждая отрасль представлена двояким образом. Как элемент строки, она выступает в роли поставщика производимой ею продукции, а как элемент столбца – в роли потребителя продукции других отраслей экономической системы.

Таблица 1

Схема межотраслевого баланса

Отрасли	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n	Итого	Конечный продукт	Валовой продукт
P_1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1i}	…	X_{1n}	ΣX_{1j}	Y_1	X_1
P_2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2i}	…	X_{2n}	ΣX_{2j}	Y_2	X_2
…	…	…	…	I квадрант			…	II квадрант	
P_i	X_{i1}	X_{i2}	…	X_{ii}	…	X_{in}	ΣX_{ij}	Y_i	X_i
…									
P_n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{ni}	…	X_{nn}	ΣX_{nj}	Y_1	X_1
Итого	ΣX_{k1}	ΣX_{k2}	…	ΣX_{ki}	…	ΣX_{kn}	$\Sigma\Sigma X_{kj}$	ΣY_k	ΣX_k
Условно чистая продукция	V_1	V_2	…	V_i	…	V_n	ΣV_j	IV квадрант	
			III квадрант						
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_i	…	X_n	ΣX_j		

В общем случае X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ii}, ..., X_{in} – объемы поставок продукции i-й отрасли отраслям, входящим в экономическую систему. Сумма этих поставок выражает суммарное производственное потребление продукции P_i и записывается в i-й строке (n + 1)-го столбца таблицы.

Число $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{kj}$ есть так называемый промежуточный продукт экономической системы.

Элементы, стоящие на пересечении первых (n + 1) строк и первых (n + 1) столбцов, образуют первый квадрант (четверть). Это важная часть межотраслевого баланса, поскольку именно в ней содержится информация о межотраслевых связях.

Второй квадрант расположен в таблице справа от первого. Он состоит из двух столбцов. Первый из них – столбец конечного потребления продукции отраслей. Под конечным потреблением понимают личное и общественное потребление, не идущее на текущие производственные нужды. Сюда включаются накопление и возмещение выбытия основных фондов, прирост запасов, личное потребление населения, расходы на содержание государственного аппарата и оборону, затраты по обслуживанию населения (здравоохранение, просвещение и т. д.), сальдо экспорта и импорта продукции. Во втором столбце представлены объемы валовой продукции отраслей. Суммарный (валовой) выпуск i-й отрасли определяется:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i \qquad (1.5)$$

Равенство (1.5) означает, что вся произведенная i-й отраслью продукция потребляется. Часть ее, в форме суммарного производственного потребления продукции P_i идет на производственные нужды отраслей, входящих в экономическую систему. Другая часть потребляется в форме конечного продукта.

Квадранты I и II отражают баланс между производством и потреблением.

Третий квадрант расположен в таблице под первым. Он состоит из двух строк. Одна из них содержит объем валового продукта по отраслям, а другая – условно чистую продукцию отраслей V_1, V_2 ,..., V_n. В состав условно чистой продукции входят амортизационные отчисления, идущие на возмещение выбытия основных фондов, заработная плата, прибыль и т.д.

Она определяется как разность между валовым продуктом отрасли и суммой ее текущих производственных затрат. Так, для P_i имеет место равенство:

$$X_i = V_i + \sum_{k=1}^{n} X_{ki} \tag{1.6}$$

Первый и третий квадранты отражают стоимостную структуру продукции каждой отрасли. Так, равенство (1.6) показывает, что стоимость валового продукта X_i i-й отрасли складывается из стоимости той части продукции отраслей системы, которая была использована для производства X_i, из амортизационных отчислений, затрат на оплату труда, из чистого дохода отрасли, из стоимости ресурсов, не производящихся внутри экономической системы, и т.д.

Суммарный конечный продукт равен суммарной условно-чистой продукции:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \tag{1.7}$$

Четвертый квадрант непосредственного отношения к сфере производства не имеет, поэтому мы его заполнять не будем.

В IV квадранте показывается, как полученные в сфере материального производства первичные доходы населения, налоги государства, кооперативных и других предприятий перераспределяются через различные каналы (финансово-кредитную систему, сферу обслуживания, общественно-политические организации и т. д.), в результате чего образуются конечные доходы населения, государства и т. д.

Межотраслевая балансовая модель

Экономическая система состоит из экономических объектов. Количество выпускаемой каждым объектом продукции может быть охарактеризовано одним числом.

Увеличение выпуска продукции в некоторое число раз k требует увеличения потребления экономическим объектом продуктов также в k раз. Другими словами, нормы производственных затрат не зависят от объема выпускаемой продукции. Для того, чтобы P_i выпустила валовой продукции стоимостью в одну денежную единицу, она должна получить от отраслей системы продукции на a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni} денежных единиц, а для обеспечения валового выпуска всех отраслей потребуется соответственно:

$$X_{ij} = a_{ij} X_j, i, j = \overline{1,n}. \tag{1.8}$$

Функции вида (1.8) – однофакторные производственные функции, представленные как функции затрат. Все указанные функции линейны относительно объема выпускаемой продукции. Поэтому мы и говорим о линейных балансовых моделях.

Выпускаемая каждым экономическим объектом продукция частично потребляется другими объектами системы в качестве сырья, полуфабрикатов и т.п. (внутрипроизводственное потребление), а часть идет на личное и производственное потребление вне данной экономической системы (внепроизводственное потребление в форме конечного продукта), что отражено в формуле (1.6).

Линейная балансовая модель имеет вид:

$$\begin{array}{l} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + Y_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + Y_2 \\ -------------------- \\ X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{in}X_n + Y_i \\ -------------------- \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n + Y_n \end{array} \tag{1.9}$$

Задачи, решаемые с помощью балансовой модели:

1) по данному вектору-столбцу X, который будем называть вектором-столбцом объемов производства, найти вектор-столбец конечной продукции Y;

2) обратная задача: по заданному вектору Y найти вектор X;

3) смешанная задача: зная значения части X_i и Y_j, найти соответствующие Y_i и X_j.

Коэффициенты прямых внутрипроизводственных затрат a_{ij} показывают, какое количество продукта i-й отрасли надо затратить на производство единицы валового продукта j-й отрасли. Коэффициенты прямых затрат считаются постоянными величинами в статических межотраслевых моделях.

Есть два основных способа получения значений коэффициентов a_{ij}.

Статистический. Коэффициенты a_{ij} определяются на основе анализа отчетных балансов за прошлые годы. Неизменность во времени коэффициентов прямых затрат в этом случае достигается подходящим выбором отраслей межотраслевого баланса. Как показывает практика, при правильном выборе достаточно крупных отраслей коэффициенты a_{ij} оказываются достаточно устойчивыми. Коэффициенты a_{ij} при данном методе рассчитываются по формуле:

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}, i, j = \overline{1,n}, \tag{1.10}$$

где X_{ij} и X_j взяты из отчетного баланса.

Нормативный. Строится модель отрасли межотраслевого баланса. В этой модели отрасль рассматривается как совокупность отдельных производств, для каждого из которых уже разработаны нормативы затрат. Если заранее знать, какую продукцию будут выпускать производства отрасли, то по нормативам затрат можно рассчитать среднеотраслевые коэффициенты прямых затрат.

Решение системы балансовых уравнений в матричной форме

Систему (1.9) заменим матричным уравнением:

$$X = (E-A)^{-1}Y, \tag{1.11}$$

где E – единичная матрица,

$(E\text{-}A)^{-1}$ – матрица, обратная матрице (E-A),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Модель вида (1.11) называется моделью Леонтьева и используется для составления межотраслевого баланса.

Матрица A продуктивна, если для выпуска продукта каждой отрасли требуется затрат меньше, чем стоит сам продукт, и когда матрица $B = (E\text{-}A)^{-1}$неотрицательна.

Матрицу $B = \|b_{ij}\|$ называют *матрицей коэффициентов полных внутренних затрат.* Коэффициент b_{ij} выражает стоимость той части валового продукта P_i, которая необходима P_i для выпуска ею единицы конечной продукции.

До сих пор мы говорили о затратах, распределении и потреблении продукции, произведенной экономическими объектами, входящими в данную экономическую систему. Однако, если экономическая система не охватывает всю экономику страны, то не исключена возможность того, что в процессе производства в качестве сырья, полуфабрикатов и т. д. будут использоваться продукты, произведенные за ее пределами.

Особая роль принадлежит трудовым ресурсам и капиталовложениям. Эти два фактора производства всегда являются внешними по отношению к любой экономической системе. Тем не менее с помощью метода межотраслевого баланса можно определить затраты труда, капитала и других ресурсов, не производящихся внутри нее.

Несмотря на простоту модели и уравнений, решение задачи МОБ в масштабах страны или отрасли связано с большими трудностями в связи с высокой размерностью (обычно n>100). Поэтому задача в этом случае решается с применением мощной вычислительной техники достаточно сложными итерационными методами и процедурами.

Для построения МОБ на компьютере можно использовать любую программу или пакет программ, которые реализуют алгоритм межотраслевого баланса. Можно также использовать универсальные программные средства, например, табличный процессор MSExcel, MATLAB, MathCADи другие.

При использовании табличного процессора MSExcel расчеты проводятся проще, чем при ручном счете. Например, эффективно применение встроенных математических функций, например, МОБР позволяет рассчитать обратную матрицу $(E\text{-}A)^{-1}$, МУМНОЖ помогает перемножить матрицы и т.д. Введение формул из алгоритма решения задачи также упрощает расчеты.

1.4 Модель потребительского выбора

Пусть потребитель располагает доходом Q, который он полностью тратит на приобретение благ (продуктов). Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определённое количество благ, и математическая модель такого его поведения называется *моделью потребительского выбора*.

Рассмотрим модель с двумя видами продуктов.

Потребительский набор – это вектор (x_1,x_2), координата x_1 которого равна количеству единиц первого продукта, а координата x_2 равна количеству единиц второго продукта.

На множестве потребительских наборов (x_1,x_2) определена функция $u(x_1,x_2)$, которая называется *функцией полезности потребителя*). Значение $u(x_1,x_2)$ на потребительском наборе (x_1,x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора.

Потребительскую оценку $u(x_1,x_2)$ набора (x_1,x_2) принято называть уровнем (или степенью) удовлетворения потребительского индивидуума, если он приобретает или потребляет данный набор (x_1,x_2). Каждый потребитель имеет, вообще говоря, свою функцию полезности. Если набор A предпочтительнее набора B, то $u(A)>u(B)$.

Функция полезности удовлетворяет следующим условиям:

1) возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведёт к росту потребительской оценки;

2) первые частные производные u'_1 и u'_2 называются предельными полезностями первого и второго продуктов соответственно;

3) предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объём его потребления растёт (закон убывания предельной полезности);

4) предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растёт количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Если блага могут замещать друг друга в потреблении, свойство не выполняется.

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1^*,x_2^*), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей, называется *линией безразличия*.

Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня функции полезности. Множество линий безразличия называется картой линий безразличия. Линии безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей, не пересекаются и не касаются. Чем выше и правее расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребностей она соответствует. Условия 1-3 означают, что линия безразличия убывает и является выпуклой вниз.

Задача потребительского выбора заключается в выборе такого потребительского набора (x_1^*,x_2^*), который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продуктыне могут превышать денежного дохода:

$$p_1x_1+p_2x_2 \le Q, \tag{1.12}$$

где p_1 и p_2 –рыночные цены;

Q – доход потребителя, который он готов потратить на приобретение первого и второго продуктов.

Величины p_1, p_2 и Q заданы.

Задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1,x_2) \rightarrow max \tag{1.13}$$

при ограничениях

$$p_1x_1+p_2x_2 \le Q;$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Набор(x_1^*,x_2^*),который является решением задачи потребительского выбора, принято называть оптимальным для потребителя.

Кривые безразличия позволяют выявить потребительские предпочтения, при этом не учитываются ограничения в потреблении и приобретении благ. Кривые безразличия показывают возможность безболезненной для потребителя замены одного блага другим, но они не определяют, какой именно набор товаров потребитель считает для себя наиболее выгодным.

Бюджетная линия учитывает и уровень дохода потребителя, и цены на блага. Бюджетная линия показывает, какие потребительские наборы можно приобрести за данную сумму денег.

Описать бюджетную линию можно при помощи уравнения:

$$I = P_a*A + P_b*B, \tag{1.14}$$

где I - это доход данного потребителя;

A -количество потребляемого (приобретаемого) блага A;

P_a -цена блага A;

B - количество потребляемого (приобретаемого) блага B;

P_b- цена блага B.

Угол наклона бюджетной линии определяется отношением цен на оба блага, взятым с отрицательным знаком. То есть это отношение цен будет являться угловым коэффициентом бюджетной линии, который измеряет наклон этой линии к оси абсцисс.

Точки пересечения с вертикальной и горизонтальной осями на графике характеризует ситуации, когда потребляется только одно благо из двух (то есть количество другого блага равняется нулю).

Таким образом, предпочтения определяются относительной полезностью, то есть полезностью комбинации двух благ, а выгоды и потери от приобретения и потребления этих благ определяются положением бюджетной линии.

Необходимо найти точку касания графиков кривой безразличия и бюджетной линии. И это пересечение называется равновесием потребителя, т.е. уравновешены все его потери и приобретения, ограничения и возможности. Точка касания кривой безразличия с бюджетной линией и будет означать состояние равновесия потребителя.

Кривая безразличия, которая пересекает бюджетную линию в двух местах, во-первых, не дает единого равновесного значения. А во-вторых, всегда найдется кривая безразличия, которая будет находиться выше этой кривой, а значит, предоставлять более выгодные условия для потребления (чем выше кривая, тем большее количество обоих благ можно потреблять).

С ростом реального дохода бюджетное ограничение сдвигается последовательно в положение $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$. Точки касания кривых безразличия с бюджетными ограничениями показывают последовательные положения равновесия потребителя в соответствии с ростом его дохода (рисунок 1).

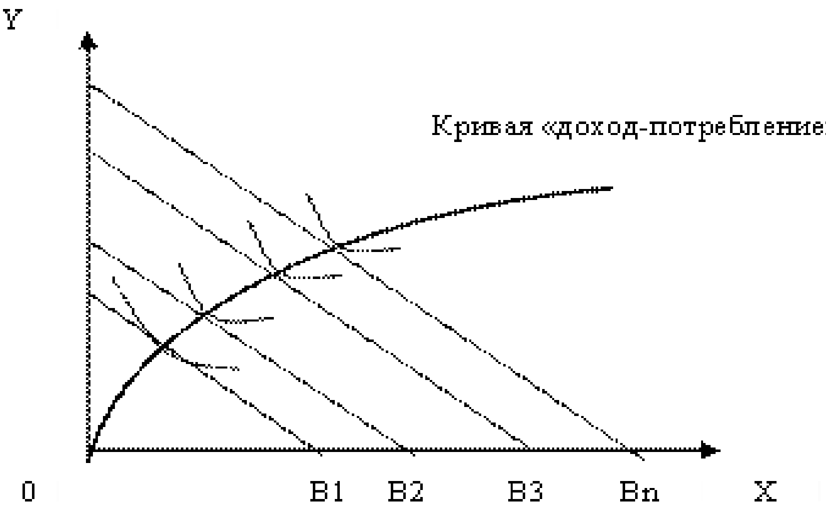

Рисунок 1. Кривая «доход-потребление»

Эта кривая, названная Дж. Хиксом «доход-потребление», в американской литературе получила название кривой уровня жизни. Если кривая «доход-потребление» - луч, выходящий из начала координат под углом 45°, это значит, что с ростом дохода потребитель в одинаковой пропорции увеличивает потребление и блага X, и блага У. Если же покупки увеличиваются непропорционально, то изменяется угол наклона кривой.

Кривая «доход-потребление» будет иметь различный наклон в зависимости от класса товара. Для нормальных товаров область допустимых перемещений точки потребительского выбора располагается в пределах прямоугольного треугольника ABC, образуемого перпендикулярами, выходящими из прежней точки равновесия, и новой бюджетной линией. Если же один из товаров - товар низшей категории, то кривая «доход

- потребление» пересечет новую бюджетную линию за пределами указанного треугольника.

Предположим, в качестве постоянной величины выступает доход потребителя, а в качестве переменной - цена блага X. Допустим, что цена блага X снижается, т.е. $P^1_x > P^2_x > P^3_x > P^4_x$ и т.д. Например, 1 единица блага X стоила 100 д.ед, а теперь стоит 50 д.ед. Это значит, что за 100 д.ед. покупатель может купить 2 единицы блага X. Графически это выглядит как сдвиг бюджетного ограничения из положения NX_1 в положение NX_2 (рисунок 2). Дальнейшее снижение цены соответственно отражают прямые NX_3, NX_4 и т.д. Соединив точки касания кривых безразличия с бюджетными ограничениями, мы получим кривую «цена-потребление».

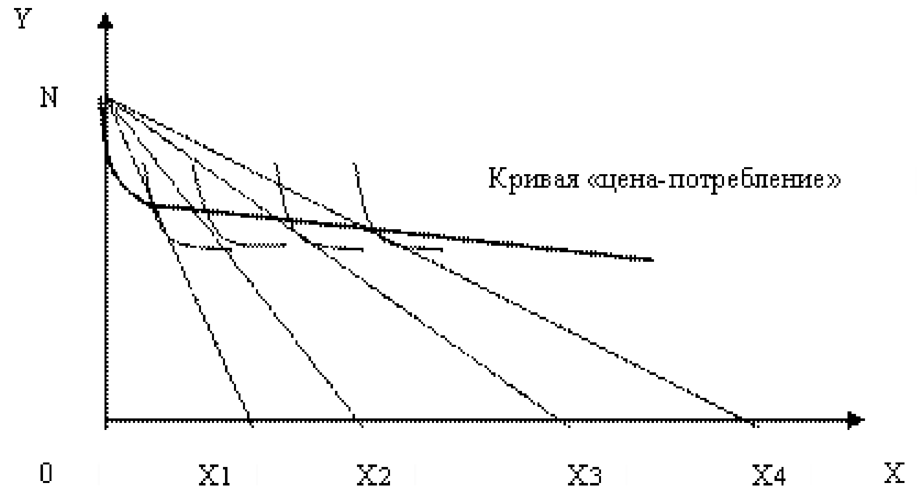

Рисунок 2. Кривая «цена-потребление»

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите предмет и задачи математической экономики.
2. Дайте определения модели и моделирования.
3. Дайте определение математического моделирования.
4. Дайте определение экономико-математического моделирования.
5. Приведите классификацию экономико-математических моделей.

6. Какие модели относятся к общим моделям макроэкономики?
7. Приведите характеристику динамическим моделям макроэкономики.
8. Дайте определение акселератора.
9. Дайте определение мультипликатора.
10. Какие модели относятся к моделям экономического роста?
11. Какие предпосылки и выводы модели Солоу?
12. В чем сущность модели межотраслевого баланса Леонтьева?
13. Как записываются уравнения соотношения баланса?
14. Дайте определение функции полезности.
15. Перечислите основные свойства функции полезности.
16. Как называются линии уровня функции полезности?
17. Как линии уровня функции полезности изображаются на координатной плоскости?
18. Какая постановка задачи потребительского выбора?
19. Какая математическая формулировка задачи потребительского выбора?
20. Как графически решается задача потребительского выбора?
21. Как решается задача потребительского выбора методом множителей Лагранжа?
22. Как построить кривые «доход-потребление»?
23. Как построить кривые «цена-потребление»?

РАЗДЕЛ 2. МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Оптимизация – это выбор наилучшего решения из множества возможных вариантов. Математическая теория оптимизации включает в себя фундаментальные результаты и численные методы, позволяющие находить наилучший вариант из множества возможных альтернатив без их полного перебора и сравнения.

Становление современного математического аппарата оптимальных экономических решений началось в 40-е годы благодаря первым работам Н. Винера, Р. Беллмана, С. Джонсона, Л. В. Канторовича. Для обозначения совокупности математических методов, применяемых в экономике, использовались различные наименования. Первоначально наиболее часто использовалось название «экономическая кибернетика», затем исследование операций, «экономико-математические методы», «математические методы в экономике».

Для того, чтобы использовать результаты и вычислительные процедуры теории оптимизации на практике, необходимо прежде всего сформулировать рассматриваемую задачу на математическом языке, т.е. построить *математическую модель* объекта оптимизации.

В большинстве реальных ситуаций дать исчерпывающее математическое представление оптимизируемой системы с учетом всех взаимосвязей ее частей, взаимодействий с внешним миром, всех целей ее функционирования бывает затруднительно или невозможно. Поэтому при построении математической модели необходимо, как правило, выделять и учитывать в дальнейшем только наиболее важные, существенные стороны исследуемого объекта с тем, чтобы было возможным его математическое описание, а также последующее решение поставленной математической задачи. При этом неучтенные в математической модели факторы не должны существенно влиять на окончательный результат оптимизации. Таким образом, математическое моделирование является сложной и ответственной творческой задачей, требующей от исследователя глубоких знаний в соответствующей области, практического опыта, интуиции и критического анализа получаемых результатов.

Несмотря на то, что общего рецепта построения математических моделей оптимизации не существует, можно условно разбить процесс математического моделирования на следующие основные этапы.

Определение границ объекта оптимизации

Необходимость этого этапа диктуется невозможностью учета и исчерпывающего описания всех сторон большинства реальных систем. Выделив главные переменные, параметры и ограничения, следует приближенно представить систему как некоторую изолированную часть реального мира и упростить ее внутреннюю структуру.

Например, при оптимизации работы одного из цехов предприятия в некоторых случаях можно пренебречь влиянием особенностей функционирования других цехов, систем снабжения и сбыта всего предприятия, его взаимодействием с другими организациями, конъюнктурой рынка и многими другими факторами. Тогда цех будет рассматриваться как изолированная система, а его связи с внешним миром либо считаются зафиксированными, либо вовсе не учитываются.

Может оказаться, что первоначальные границы объекта оптимизации выбраны неудачно. Это становится ясным при дальнейшем анализе системы и ее математической модели, при интерпретации результатов поиска оптимального решения, сопоставлении их с практикой и т.д.

Тогда в одних случаях границы системы следует расширить, а в других – сузить. Например, если выясняется, что влияние на работу исследуемого цеха других подразделений предприятия нельзя игнорировать при ее оптимизации, то необходимо включить в систему и эти подразделения. С другой стороны, может оказаться, что сам цех состоит из нескольких в большой степени независимо работающих участков, которые без значительного упрощения реальной ситуации можно рассматривать изолированно. Тогда для облегчения поиска оптимального решения разумно исследовать каждый участок как отдельную систему.

В практике следует, насколько возможно, стремиться упрощать системы, подлежащие оптимизации, разбивать сложные системы на более простые подсистемы, если есть уверенность, что это повлияет на окончательный результат в допустимых пределах.

Выбор управляемых переменных

На этом этапе математического моделирования необходимо провести различие между теми величинами, значения которых можно варьировать и выбирать с целью достижения наилучшего результата (управляемыми переменными), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует наилучшая (оптимальная) ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации её описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет. Например, в упомянутой ситуации с оптимизацией работы цеха объем поставок какого–либо сырья из другого цеха в одних случаях следует считать фиксированным или не зависящим от нашего выбора, а в других случаях – регулируемым, т.е. управляемой переменной.

Определение ограничений на управляемые переменные

В реальных условиях на выбор значений управляемых переменных, как правило, наложены ограничения, связанные с ограниченностью имеющихся ресурсов, мощностей и других возможностей. При построении математической модели эти ограничения обычно записывают в виде равенств и неравенств или указывают множества, которым должны принадлежать значения управляемых переменных. Совокупность всех ограничений на управляемые переменные определяет так называемое допустимоемножество задачи оптимизации.

Например, если годовой объем выпускаемой цехом продукции данного вида является управляемой переменной, то ее значения, во–первых, не могут быть отрицательными и, во–вторых, ограничены сверху максимальной производительностью оборудования цеха.

Выбор числового критерия оптимизации

Обязательной составной частью математической модели объекта оптимизации является числовой критерий, минимальному или максимальному значению которого (в зависимости от конкретной задачи) соответствует наилучший вариант поведения исследуемого объекта. Величина этого критерия полностью определяется выбранными значениями управляемых переменных, т.е. он является функцией этих переменных и называется целевой функцией.

В практике используется широкий спектр критериев оптимизации. Это могут быть критерии экономического характера, например, себестоимость, прибыль, капитальные затраты и т.д., технические или физические параметры системы – продолжительность технологического процесса, потребляемая энергия, максимальная механическая нагрузка, достигнутая скорость движения и другие.

Следует отметить, что во многих случаях выбор критерия оптимизации не является очевидным и однозначным. Часто бывает трудно поставить в соответствие всей совокупности целей функционирования системы какой–либо один критерий. Это объясняется различными причинами, такими, как сложность целевой функции, описывающей большую совокупность разнородных целей, неопределенность формулировок некоторых целей, препятствующая описанию их с помощью количественных характеристик, наличие противоречивых целей, важность каждой из которых зависит от точки зрения и т.д. Например, невозможно найти решение, обеспечивающее одновременно минимальные затраты, максимальную надежность, минимальное энергопотребление и максимальное быстродействие.

Выход из этого положения определяется в каждом конкретном случае. Например, из многих критериев, характеризующих различные цели оптимизации, выбирают один, считая его основным, а остальные – второстепенным. Далее второстепенные критерии либо не учитываются, либо учитываются частично с помощью дополнительных ограничений на управляемые переменные. Эти ограничения обеспечивают изменение второстепенных критериев в заданных диапазонах приемлемых значений.

Другой путь состоит в формулировке комплексного критерия, т.е. целевой функции, включающей с разумно выбранными весовыми коэффициентами целевые функции, соответствующие различным целям.

Формулировка математической задачи оптимизации

Объединяя результаты предыдущих этапов построения математической модели, ее записывают в виде математической задачи оптимизации, включающей построенную целевую функцию и найденные ограничения на управляемые переменные. В достаточно общем виде математическую задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом: минимизировать (максимизировать) целевую функцию с учетом ограничений на управляемые переменные.

Под минимизацией (максимизацией) функции n переменных $F(x_1 ,.., x_n)$ на заданном множестве U n–мерного векторного пространства E_n понимается определение хотя бы одной из точек минимума (максимума) этой функции на множестве U, а также, если это необходимо, и минимального (максимального) на множестве U значения F(x). При записи математических задач оптимизации в общем виде обычно используется следующая символика:

$$F(x) \to \min (\max), \quad x \in U, \tag{2.1}$$

где F(x) – целевая функция;

U – допустимое множество, заданное ограничениями на управляемые переменные.

Математическое программирование предназначено для решения экстремальных задач, в которых на переменные накладываются ограничения.

В математическое программирование входят линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование, дискретное (целочисленное) программирование, дробно-линейное программирование, параметрическое программирование, сепарабельное программирование, стохастическое программирование, геометрическое программирование; методы и дисциплины, специфичные отдельно как для централизованно планируемой экономики, так и для рыночной (конкурентной) экономики.

К первым можно отнести теорию оптимального функционирования экономики, оптимальное планирование, теорию оптимального ценообразования, модели материально-технического снабжения и др. Ко вторым – методы, позволяющие разработать модели свободной конкуренции, модели капиталистического цикла, модели монополии, модели индикативного планирования, модели теории фирмы и т. д. Многие из методов, разработанных для централизованно планируемой экономики, могут оказаться полезными и при экономико-математическом моделировании в условиях рыночной экономики.

Методы экспериментального изучения экономических явлений включают математические методы анализа и планирования экономических экспериментов, методы машинной имитации (имитационное моделирование), деловые игры. К ним можно отнести также методы экспертных оценок, разработанные для оценки явлений, не поддающихся непосредственному измерению.

Линейное программирование позволяет найти экстремальные (наибольшие и наименьшие) значения линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Эта линейная функция называется целевой, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются системой ограничений.

В задачах линейного программирования возможны случаи, когда параметры управления могут принимать лишь целые дискретные значения. При решении подобных задач используется целочисленное программирование.

В некоторых случаях исходные параметры задачи могут изменяться в некоторых пределах, для их решения применяется параметрическое программирование.

Задачи с нелинейной целевой функцией и линейными ограничениями называются задачами нелинейного программирования с линейными ограничениями. Если целевая функция представляет собой отношение линейных функций – это задача дробно-линейного программирования. Деление оптимальных задач на классы важно для разработки методов их решения.

В большинстве реальных ситуаций дать исчерпывающее математическое представление оптимизируемой системы с учетом всех взаимосвязей ее частей, взаимодействий с внешним миром, всех целей ее функционирования бывает затруднительно или невозможно. Поэтому при построении математической модели необходимо, как правило, выделять и учитывать в дальнейшем только наиболее важные, существенные стороны исследуемого объекта с тем, чтобы было возможным его математическое описание, а также последующее решение поставленной математической задачи. При этом неучтенные в математической модели факторы не должны существенно влиять на окончательный результат оптимизации. Таким образом, математическое моделирование является сложной и ответственной творческой задачей, требующей от исследователя глубоких знаний в соответствующей области, практического опыта, интуиции и критического анализа получаемых результатов.

Несмотря на то, что общего рецепта построения математических моделей оптимизации не существует, можно условно разбить процесс математического моделирования на следующие основные этапы.

Определение границ объекта оптимизации

Необходимость этого этапа диктуется невозможностью учета и исчерпывающего описания всех сторон большинства реальных систем. Выделив главные переменные, параметры и ограничения, следует приближенно представить систему как некоторую изолированную часть реального мира и упростить ее внутреннюю структуру.

Например, при оптимизации работы одного из цехов предприятия в некоторых случаях можно пренебречь влиянием особенностей функционирования других цехов, систем снабжения и сбыта всего предприятия, его взаимодействием с другими организациями, конъюнктурой рынка и многими другими факторами. Тогда цех будет рассматриваться как изолированная система, а его связи с внешним миром либо считаются зафиксированными, либо вовсе не учитываются.

Может оказаться, что первоначальные границы объекта оптимизации выбраны неудачно. Это становится ясным при дальнейшем анализе системы и ее математической модели, при интерпретации результатов поиска оптимального решения, сопоставлении их с практикой и т.д.

Тогда в одних случаях границы системы следует расширить, а в других – сузить. Например, если выясняется, что влияние на работу исследуемого цеха других подразделений предприятия нельзя игнорировать при ее оптимизации, то необходимо включить в систему и эти подразделения. С другой стороны, может оказаться, что сам цех состоит из нескольких в большой степени независимо работающих участков, которые без значительного упрощения реальной ситуации можно рассматривать изолированно. Тогда для облегчения поиска оптимального решения разумно исследовать каждый участок как отдельную систему.

В практике следует, насколько возможно, стремиться упрощать системы, подлежащие оптимизации, разбивать сложные системы на более простые подсистемы, если есть уверенность, что это повлияет на окончательный результат в допустимых пределах.

Выбор управляемых переменных

На этом этапе математического моделирования необходимо провести различие между теми величинами, значения которых можно варьировать и выбирать с целью достижения наилучшего результата (управляемыми переменными), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует наилучшая (оптимальная) ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации её описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет. Например, в упомянутой ситуации с оптимизацией работы цеха объем поставок какого–либо сырья из другого цеха в одних случаях следует считать фиксированным или не зависящим от нашего выбора, а в других случаях – регулируемым, т.е. управляемой переменной.

Определение ограничений на управляемые переменные

В реальных условиях на выбор значений управляемых переменных, как правило, наложены ограничения, связанные с ограниченностью имеющихся ресурсов, мощностей и других возможностей. При построении математической модели эти ограничения обычно записывают в виде равенств и неравенств или указывают множества, которым должны принадлежать значения управляемых переменных. Совокупность всех ограничений на управляемые переменные определяет так называемое допустимое множество задачи оптимизации.

Например, если годовой объем выпускаемой цехом продукции данного вида является управляемой переменной, то ее значения, во–первых, не могут быть отрицательными и, во–

вторых, ограничены сверху максимальной производительностью оборудования цеха.

Выбор числового критерия оптимизации

Обязательной составной частью математической модели объекта оптимизации является числовой критерий, минимальному или максимальному значению которого (в зависимости от конкретной задачи) соответствует наилучший вариант поведения исследуемого объекта. Величина этого критерия полностью определяется выбранными значениями управляемых переменных, т.е. он является функцией этих переменных и называется целевой функцией.

В практике используется широкий спектр критериев оптимизации. Это могут быть критерии экономического характера, например, себестоимость, прибыль, капитальные затраты и т.д., технические или физические параметры системы – продолжительность технологического процесса, потребляемая энергия, максимальная механическая нагрузка, достигнутая скорость движения и другие.

Следует отметить, что во многих случаях выбор критерия оптимизации не является очевидным и однозначным. Часто бывает трудно поставить в соответствие всей совокупности целей функционирования системы какой–либо один критерий. Это объясняется различными причинами, такими, как сложность целевой функции, описывающей большую совокупность разнородных целей, неопределенность формулировок некоторых целей, препятствующая описанию их с помощью количественных характеристик, наличие противоречивых целей, важность каждой из которых зависит от точки зрения и т.д. Например, невозможно найти решение, обеспечивающее одновременно минимальные затраты, максимальную надежность, минимальное энергопотребление и максимальное быстродействие.

Выход из этого положения определяется в каждом конкретном случае. Например, из многих критериев, характеризующих различные цели оптимизации, выбирают один, считая его основным, а остальные – второстепенным. Далее второстепенные критерии либо не учитываются, либо учитываются частично с помощью дополнительных ограничений на управляемые переменные. Эти ограничения обеспечивают изменение второстепенных критериев в заданных диапазонах приемлемых значений.

Другой путь состоит в формулировке комплексного критерия, т.е. целевой функции, включающей с разумно выбранными весовыми коэффициентами целевые функции, соответствующие различным целям.

2.2 Модели линейного программирования

Для разработки математической модели линейного программирования (ЛП), необходимо:

−ввести обозначения переменных;

−исходя из цели экономических исследований, составить целевую функцию;

−учитывая ограничения в использовании экономических показателей задачи и их количественные закономерности, записать систему ограничений.

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Дана система m линейных уравнений и неравенств с n переменными (система ограничений):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2.2)$$

или система ограничений в краткой записи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, k}); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}). \end{cases} \tag{2.3}$$

Также задана линейная целевая функция:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.4}$$

,

где i- номер ограничения;

m - количество ограничений;

j - номер переменной;,

n - количество переменных;

x_j - размер переменной j;

a_{ij} - коэффициенты при переменных x_j;

b_i - объемы правых частей ограничений;

c_j - коэффициенты целевой функции F.

Необходимо найти такое решение (множество значений переменных) $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы ограничений, при котором линейная функция F принимает максимальное (или минимальное) значение.

Для решения задачи линейного программирования применяют симплексный метод. Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) заключается в том, что, начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получаем оптимальное решение.

Пример решения задачи линейного программирования

Площадь пашни, отводимая под зерновые культуры, равна 2000 га. Имеются также следующие ресурсы: минеральные удобрения 1600 ц.д.в., трудовые ресурсы 14600 чел/дн.В таблице 2 приведены исходные данные по культурам.

Таблица 2

Исходные данные по культурам

Показатели	Пшеница	Ячмень	Гречиха
Урожайность, ц/га	24	14	12
Затраты труда на 1ц, чел/дн	0,4	0,5	0,6
Затраты удобрений на 1 га, ц.д.в.	0,6	0,4	0,8
Себестоимость 1ц, д.ед.	6	5	16
Цена реализации 1ц, д.ед.	8	8	20

Требуется определить такое сочетание посевов пшеницы, ячменя и гречихи, которое обеспечит максимальную прибыль.

Разработаем экономико-математическую модель задачи

Обозначим переменные:

X_1–площадь пшеницы, га,

X_2–площадь ячменя, га,

X_3 - площадь гречихи, га.

Составим систему ограничений:

По использованию ресурсов:

1) по пашне, га

$X_1+X_2+X_3 \leq 2000$

2) по труду, чел/дн

$9{,}6\ X_1+7X_2 + 7{,}2X_3 \leq 14600$

3) по удобрениям, ц.д.в.

$0{,}6\ X_1+0{,}4\ X_2+0{,}8\ X_3 \leq 1600$

Целевая функция – максимум прибыли, д.ед.:

$F=48X_1+42X_2+48X_3 \rightarrow \max$

В результате решения задачи симплексным методом получена следующая симплексная таблица (табл.3).

Таблица 3

Симплексная таблица с оптимальным планом

Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_3	1597,3	0	1	1	3,3	-0,3	0
X_1	402,7	1	0	0	-2,3	0,3	0
X_6	48,6	0	-0,4	0	-1,3	0	1
F	95999,5	0	6	0	47,5	0,5	0

Получен следующий оптимальный план:

1) выгодно под пшеницу (x_1) отвести 402,7 га, под гречиху (x_3) – 1597,3 га, ячмень высевать не выгодно (x_2=0);

2) пашня используется полностью (x_4=0);

3) трудовые ресурсы используются полностью (x_5=0);

4) минеральные удобрения используются не полностью, их остаток 48,6 ц.д.в. (x_6).

При выполнении данного оптимального плана прибыль будет максимальной и составит 95999,5 д. ед.

2.3 Анализ оптимальных планов в линейном программировании

Двойственность в линейном программировании

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, называемая двойственной или сопряженной по отношению к исходной (прямой) задаче.

В прямой задаче в качестве переменных выступают объемы видов деятельности (количество корма, продукции и т.д.). В двойственной задаче в качестве переменных выступают двойственные оценки ограничений.

При определении симплексным методом оптимального плана одной из задач находится решение и другой задачи.

При решении задачи в симплексных таблицах двойственные оценки находятся в строке целевой функции последней симплексной таблицы прямой задачи.

Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений – неравенств прямой задачи на величину $\Delta f(X)$:

$$\Delta f(x)=\Delta b_i y_i. \tag{2.5}$$

Другими словами, двойственная оценка - это оценка единицы измерения ограничения (эффект от единицы ресурса, избыточность единицы продукта или вида деятельности).

Сформулируем двойственную задачу в нашем примере.

Пусть необходимо установить оптимальную цену на приобретаемые ресурсы y_1,y_2,y_3, исходя из следующих объективных условий:

1)покупатель старается минимизировать общую стоимость ресурсов;

2)за каждый вид ресурсов надо уплатить не менее той суммы, которую продавец может выручить при переработке сырья в готовую продукцию.

Согласно первому условию общая стоимость сырья выразится величиной:

$g(Y)=2000y_1+14600y_2+1600y_3\rightarrow \min.$

Согласно второму требованию вводятся ограничения: на 1ц пшеницы расходуются1га пашни ценой y_1; 9,6 чел/дн трудовых ресурсов ценой y_2; 0,6 ц.д.в. удобрений ценой y_3.

Стоимость всех ресурсов, расходуемых на производство 1ц пшеницы, должна составлять не менее 48д.ед.

В результате аналогичных рассуждений относительно производства ячменя и гречихи получим систему неравенств:

$y_1+9{,}6y_2+0{,}6y_3\geq 48,$

$y_1+7y_2+0{,}4y_3\geq 42,$

$y_1+7{,}2y_2+0{,}8y_3\geq 48,$

По экономическому смыслу цены неотрицательные $Y_{1,2,3}\geq 0$.

Y_1 – эффект 1га пашни,

Y_2 – эффект 1 чел/дн,

Y_3 – эффект от 1 ц.д.в. или двойственная оценка 3-го ограничения.

Двойственные оценки основных переменных

Двойственные оценки основных переменных находятся в последней строке последней симплексной таблицы в столбцах соответствующих переменных.

Если двойственная оценка основной переменной равна нулю, то переменная вошла в оптимальное решение, в противном случае переменная не выгодна и не вошла в оптимальноерешение.

Эта переменная выгодна в том случае, если не было ограничения, требующего, чтобы она вошла в решение.

Если такое ограничение было, то судить о выгодности можно с помощью двойственной оценки этого ограничения. Она тоже должна быть равна нулю.

Если ввести в оптимальное решение единицу такой переменной, то ресурсы отвлекутся от выгодных переменных, и значение целевой функции уменьшится на величину соответствующей двойственной оценки.

В примере двойственная оценка x_1 равна «0», значит, эта переменная вошла в оптимальное решение, она выгодна.

Двойственная оценка 1га x_2(ячмень) равна 6 д.ед. Из этого следует, что эта переменная не выгодна, и если включить в оптимальное решение 1га этой культуры, то произойдет отвлечение ресурсов от выгодных культур, и прибыль уменьшится на 6 д.ед. т.е. F=(95999,5-6)=95993,5д.ед.

Двойственные оценки ограничений типа (≤)

Они находятся в последней строке последней симплексной таблицы в столбцах соответствующих дополнительных переменных.

В примере 47,5 - двойственная оценка 1га пашни, двойственная оценка 1 чел/дн. 0,5, двойственная оценка 1ц.д.в. удобрений равна 0.

Если двойственная оценка равна нулю, то дополнительная переменная этого ограничения вошла в оптимальное решение, т.е. имеется недоиспользование ресурсов или недостижение (недобор) до максимальной границы.

Изменение объема правой части ограничения в незначительных пределах не повлечет изменения величины целевой функции.

Например, двойственная оценка 1ц.д.в. удобрений равна нулю, в оптимальное решение она вошла в объеме 48,6. Правую часть ограничения по удобрениям можно увеличить на любую величину, а уменьшить максимум на 48,6, при этом значение целевой функции не изменится.

Если двойственная оценка ограничения отлична от нуля, то мы определили максимальную границу (ресурс истрачен полностью – дефицитный).

Дополнительная переменная такого ограничения (недоиспользованный ресурс) не войдет в оптимальное решение.Если правую часть такого ограничения увеличить (уменьшить) на единицу, то значение целевой функции, улучшится (ухудшится) на величину соответствующей двойственной оценки.

Двойственная оценка первого ограничения, т.е. 1га пашни равна 47,5 ден. ед. Из этого следует, что пашня используется полностью, дополнительная переменная x_4 (недоиспользованная пашня) в оптимальное решение не вошла, т.е. равна нулю.

Если ресурс пашни увеличить на 1га, то прибыль увеличится на 47,5 д. ед. и составит 95999,5+47,5=96047д.ед.

Если ресурс пашни уменьшить на 100 га, то значение целевой функции уменьшится на 100*47,5=4750 д.ед.

Двойственные оценки ограничений типа (≥)

Если двойственная оценка ограничения равна нулю, то ограничение выгодно (продукт выгоден). Изменение правой части этого ограничения в некоторых пределах не повлечет изменения целевой функции.

Если двойственная оценка ограничения отлична от нуля, дополнительная переменная в оптимальное решение не вошла, т.е. ограничение не выгодное. Увеличение (уменьшение) правой части такого ограничения (увеличение плана по производству продукции) на единицу повлечет ухудшение (улучшение) целевой функции на величину соответствующей двойственной оценки.

Анализ устойчивости оптимального плана

Для экономического анализа оптимального плана с использованием двойственных оценок нужно знать их интервал устойчивости, в котором оптимальный план двойственной задачи не менялся бы.

Пределы устойчивости для основных небазисных переменных

Определим максимальную величину основной небазисной переменной, которую можно ввести в оптимальное решение(нижняя граница равна нулю). Она равна минимальному отношению свободных членов к соответствующим положительным коэффициентам столбца этой небазисной переменной:

$$\Delta X_j^{(+)} = MIN a_{ij} > 0 \{x_i / a_{ij}\} \qquad (2.6)$$

Например, определим максимальную площадь второй культуры, которую можно ввести в оптимальное решение:

$\Delta X_2^{(+)} = \mathrm{MIN} a_{ij} > 0 \{1597,3 / 1\} = 1597,3$ га, т.е. можно ввести любой объем второй культуры, не превышающий найденной верхней границы.

Скорректируем оптимальное решение путем ввода второй культуры на площади 100 га.

При этом значения базисных переменных будут увеличиваться на соответствующие отрицательные коэффициенты, взятые по модулю и уменьшаться на соответствующие положительные коэффициенты столбца той переменной, которую вводим в решение. Оптимальный план при введении в него площади ячменя 100 га будет следующим:

$X_2 = 100$;

$X_3 = 1597,3 - 1*100 = 1497,3$;

$X_1 = 402,7 + 0*100 = 502,7$;

$X_6 = 48,6 + 0,4*100 = 88,6$;

$F = 95999,5 - 6*100 = 95399,5$.

Так как в план введена невыгодная переменная, прибыль уменьшилась.

Пределы устойчивости двойственных оценок ограничений типа (≤)

Максимальная величина, на которую можно увеличить правую часть ограничения, равна максимальному отношению свободных членов к соответствующим отрицательным коэффициентам столбца дополнительной переменной этого ограничения, взятому по модулю:

$$\Delta b_i^{(+)} = MAX a_{ij}<0 \{|x_i/a_{ij}|\}. \qquad (2.7)$$

Максимальная величина, на которую можно уменьшить правую часть ограничения типа (≤), равна минимальному отношению значений базисных переменных к соответствующим положительным коэффициентам столбца дополнительной переменной этого ограничения:

$$\Delta b_i^{(-)} = MIN a_{ij}>0 \{x_i/a_{ij}\}. \qquad (2.8)$$

Например, найдем пределы устойчивости двойственной оценки второго ограничения, т.е. 1 чел/дн.:

а) верхняя граница:

$\Delta b_2^{(+)} = MAX a_{ij}<0 \{|1597,3/-0,3|\} = 5324,3$;

б) нижняя граница:

$\Delta b_2^{(-)} = MIN a_{ij}>0 \{402,7/0,3\}; \{48,6/0\}= 1342,3$.

Двойственная оценка 1 чел/дн устойчива в интервале от 1342,3 до 5324,3 чел/дн.

При корректировке объемов ресурсов оптимальный план будет изменяться следующим образом:

1) если правую часть ограничения типа (≤) увеличить на единицу, то значение базисных переменных будут увеличиваться (уменьшаться) на соответствующие положительные (отрицательные, взятые по модулю) коэффициенты столбца дополнительной переменной этого ограничения;

2) если же правую часть ограничения уменьшить на единицу, то значения базисных переменных будут увеличиваться (уменьшаться) на соответствующие отрицательные (положительные) коэффициенты столбца дополнительной переменной этого ограничения.

В примере получим новое решение при уменьшении ресурса труда на 100 чел/дн.

На первом шаге определяется интервал устойчивости двойственной оценки ресурса.

Получаем новый оптимальный план при уменьшении трудовых ресурсов на 100 чел/дн:

$X_3 = 1597,3 + 0,3*100=1897,3$;

$X_1 = 402,7 – 0,3*100=102,7$;

$X_6 = 48,6 – 0* 100=48,6$;

$F = 95999,5 – 0,5*100=95499,5$.

При уменьшении выгодного ресурса прибыль уменьшается.

Пределы устойчивости двойственных оценок ограничений типа (≥)

Верхняя граница:

$\Delta b_i^{(+)}=MINa_{ij}>0\ \{x_i/a_{ij}$.(2.9)

Нижняяграница:

$\Delta b_i^{(-)}=MAXa_{ij}<0\ \{|x_i/a_{ij}$. (2.10)

При корректировке оптимального решения путем изменения объема ограничения типа (≥) решение будет меняться следующим образом:

1) увеличение правой части ограничения повлечет увеличение (уменьшение) базисных переменных на соответствующие отрицательные (положительные) коэффициенты столбца дополнительной переменной этого ограничения;

2) уменьшение правой части ограничения повлечет увеличение (уменьшение) базисных переменных на соответствующие положительные (отрицательные) коэффициенты столбца доп. переменной этого ограничения.

Анализ оптимального плана при изменении коэффициентов целевой функции

Необходимо определить диапазон изменения коэффициентов в целевой функции (рассматривая каждый в отдельности), при которых оптимальные значения переменных остаются неизменными.

Допустимые диапазоны изменения коэффициентов целевой функции определяются из соотношений:

$\Delta C_i^{(-)}= MIN\ a_{ij}>0\ \{y_i/a_{ij}\}$, (2.11)

$\Delta C_i^{(+)}=|MAX\ a_{ij}<0\ \{y_i/a_{ij}\}|$. (2.12)

Расчет для первого коэффициента:

$\Delta C_i^{(-)} = 0{,}5/0{,}3=1{,}66$;

$\Delta C_i^{(+)} =|\ 47{,}5/(-2{,}3)|;\ |47{,}5/(-1{,}3)| =\{20{,}6;36{,}5\} = 36{,}5$

$C_1=\{C_1-\Delta C_1^{(-)};\ C_1+\Delta C_1^{(+)}\}=\{48–1{,}66;48+36{,}5\}=\{46{,}3;\ 84{,}5\}$.

Таким образом, найденный оптимальный план выпуска продукции не будет меняться при изменении прибыли от реализации 1га пшеницы в диапазоне от 46,3 до 84,5 единиц.

Аналогичный расчет может осуществляться по остальным коэффициентам целевой функции.

Анализ целесообразности включения в план других переменных

В оптимальный план задачи на получение максимума прибыли может быть включен лишь тот вариант, для которого прибыль, недополученная из-за отвлечения дефицитных ресурсов, т.е. величина $\sum a_{ij} y_i$, покрывается полученной прибылью C_j. Таким образом, характеристикой того или иного варианта служит разность:

$$\Delta_j = \sum a_{ij} y_i - c_j. \qquad (2.13)$$

Если $\Delta_j \leq 0$, то вариант выгоден, если $\Delta_j > 0$, то н евыгоден.

В примере рассмотрим включение в оптимальный план двух новых культур -ржи и овса. Исходные показатели по новым культурам приведены в таблице 4.

Таблица 4

Исходные показатели по новым культурам

Ресурсы	Двойственная оценка	Затраты ресурсов на 1га	
		рожь	овес
Пашня, га	47,5	1	1
Труд, чел/дн	0,5	7	8,5
Удобрения, ц.д.в.	0	0,7	0,9
Прибыль, д.ед.		49	54

Рассчитаем характеристики новых культур по формуле (2.13):

$\Delta_{рожь}$=1*47,5+0,5*7+0–49=2>0, т.е рожь не выгодно включать в план;

$\Delta_{овес}$=47,5+0,5*8,5+0*0,9–54=-2,5 < 0, т.е. овес выгодно включать в план.

При решении задач ЛП на ЭВМ можно использовать любую программу или пакет программ, которые реализуют алгоритмы решения задач математического программирования. К таким программным средствам относятся, например, MATLAB, MathCAD, табличный процессор MSExcel (надстройка «Поиск решения») и другие. Для решения задачи линейного программирования в MSExcel в надстройке «Поиск решения» следует выбрать параметр «Решение задачи симплексным методом». Решение задач нелинейного программирования осуществляется «по умолчанию».

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие математического программирования.
2. Перечислите виды задач математического программирования.
3. Дайте понятие задачи линейного программирования.
4. Представьте общий вид задачи линейного программирования.
5. Охарактеризуйте понятие двойственности в линейном программировании.
6. Представьте модель двойственной задачи в ЛП.
7. Приведите правила оценки оптимального плана по двойственным оценкам основных переменных.
8. Перечислите правила оценки оптимального плана по двойственным оценкам ограничений типа (≤).
9. Приведите правила оценки оптимального плана по двойственным оценкам ограничений типа (≥).
10. В чем состоит анализ устойчивости оптимального плана?
11. Приведите формулы расчета пределов устойчивости для основных небазисных переменных.
12. Приведите формулы определения пределов устойчивости двойственных оценок ограничений типа (≤).
13. Представьте расчет определения пределов устойчивости двойственных оценок ограничений типа(≥).
14. Приведите формулы для анализа оптимального плана при изменении коэффициентов целевой функции.
15. Представьте расчет целесообразности включения в план других переменных.

РАЗДЕЛ 3. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

3.1 Понятие и виды производственных функций

В современном обществе большой интерес представляет анализ закономерностей, действующих в процессе производства благ, которые формируют в дальнейшем их предложение на рынке.

Производственный процесс - это основное и первоначальное понятие экономики. Все необходимое для организации процесса производства называют факторами производства. Традиционно к факторам производства относят капитал, труд, землю и предпринимательство.

Для организации производственного процесса необходимые факторы производства должны присутствовать в определенном количестве. Зависимость максимального объема производимого продукта от затрат используемых факторов называется *производственной функцией (ПФ)*.

Исторически одними из первых работ по построению и использованию производственных функций были работы по анализу сельскохозяйственного производства в США. В 1909 г. Митчерлих предложил нелинейную производственную функцию: удобрения– урожайность. Независимо от него Спиллман предложил показательное уравнение урожайности. На их основе был построен ряд других агротехнических производственных функций.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом. С помощью производственных функций решаются задачи:

− оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

− прогнозирования экономического роста;

− разработки вариантов плана развития производства;

− оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

Рассмотрение понятия «производственная функция» начнем с наиболее простого случая, когда производство обусловлено только одним фактором. В этом случае производственная функция – это функция, независимая переменная которой принимает значения используемого ресурса (фактора производства), а зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции

$$y=f(x). \qquad (3.1)$$

В этой формуле y есть функция одной переменной x. В связи с этим производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения – множество неотрицательных действительных чисел. Символ f является характеристикой производственной системы, преобразующей ресурс в выпуск. ПФ – статистически устойчивая связь между затратами ресурса и выпуском. Более правильной является символика

$$y=f(x, a), \qquad (3.2)$$

где a – вектор параметров ПФ.

Возьмем ПФ f в виде $f(x)=ax^b$, где x – величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), f(x) – объем выпускаемой продукции (например, число готовых к отправке холодильников). Величины a и b – параметры ПФ f. Здесь a и b – положительные числа и число $b \leq 1$, вектор параметров есть двумерный вектор (a, b). График ПФ $f(x)=ax^b$ изображен на рисунке 3.

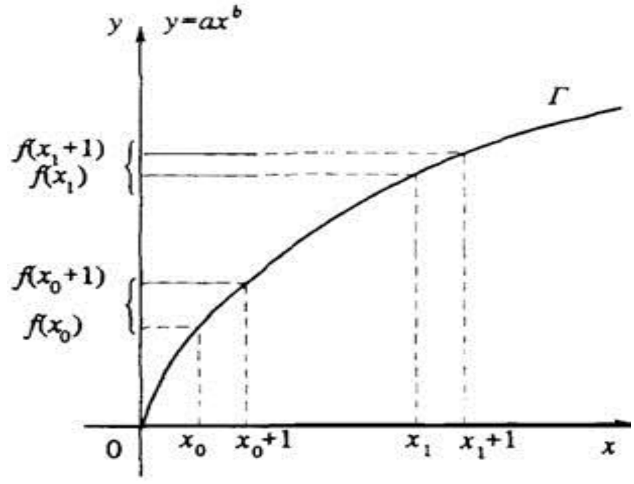

Рисунок 3. График ПФ $f(x)=ax^b$

На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x отражает фундаментальное положение экономической теории и подтверждаемое практикой, называемое законом убывающей эффективности (убывающей производительности или убывающей отдачи).

Производственная функция нескольких переменных – это функция, независимые переменные которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y=f(x)=f(x_1,...,x_n), \quad (3.3)$$

где y ($y \geq 0$) – скалярная величина;

x – векторная величина;

$x_1,…,x_n$– координаты вектора x.

То есть $f(x_1,…,x_n)$ есть числовая функция нескольких переменных $x_1,…,x_n$. В связи с этим ПФ $f(x_1,…,x_n)$ называют многоресурсной или многофакторной. Более правильной является такая символика $f(x_1,…,x_n, a)$, где a – вектор параметров ПФ.

По экономическому смыслу все переменные этой функции неотрицательны, следовательно, областью определения многофакторной ПФ является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1,…,x_n$ которых- неотрицательные числа.

Для отдельного предприятия (фирмы), выпускающего однородный продукт, ПФ $f(x_1,…,x_n)$ может связывать объем выпуска с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. ПФ такого типа характеризуют действующую технологию предприятия (фирмы).

При построении ПФ для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y чаще берут совокупный продукт (доход) региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал (x_1(=K) – объем используемого в течение года основного капитала) и живой труд (x_2(=L) – количество единиц затрачиваемого в течение года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении.

Таким образом, строят двухфакторную ПФ $Y=f(K, L)$.

От двухфакторных ПФ переходят к трехфакторным. Кроме того, если ПФ строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

ПФ $y=f(x_1,x_2)$ называется *статической*, если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объем выпуска могут зависеть от времени t, то есть могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0),x_1(1),\ldots,x_1(T);x_2(0),x_2(1),\ldots,x_2(T);y(0),y(1),\ldots,y(T);y(t)=f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь t – номер года, $t=0,1,\ldots,T$; $t=0$ – базовый год временного промежутка, охватывающего годы $1,2,\ldots,T$.

ПФ называется *динамической*, если…

1) время t фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;

2) параметры ПФ и ее характеристика f зависят от времени t.

При построении ПФ научно-технический прогресс может быть учтен с помощью введения множителя научно-технического прогресса.

Производственные функции определяются двумя группами предположений: математических и экономических. Математически предполагается, что производственная функция должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой. Экономические предположения состоят в следующем: при отсутствии хотя бы одного производственного ресурса производство невозможно, т. е.

$Y(0, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n) = Y(X_1, 0, \ldots, X_i, \ldots, X_n) = \ldots Y(X_1, X_2, \ldots, 0, \ldots, X_n) = \ldots = Y(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, 0) = 0$.

Однако, только с помощью натуральных показателей определить для данных затрат X единственный выпуск Y удовлетворительно не удается: наш выбор сузился лишь до «кривой» производственных возможностей K_x. В силу этих причин разработана лишь теория производственных функций производителей, выпуск которых можно охарактеризовать одной величиной – либо объемом выпуска, если выпускается один товар, либо суммарной стоимостью всего выпуска.

Пространство затрат m-мерно. Каждой точке пространства затрат $X=(x_1, \ldots, x_m)$ соответствует единственный максимальный выпуск, произведенный при использовании этих затрат. Эта связь и называется производственной функцией. Однако обычно производственную функцию понимают не столь ограничительно, и всякую функциональную связь между затратами и выпуском считают производственной функцией. В дальнейшем будем считать, что производственная функция имеет необходимые производные.

Предполагается, что производственная функция f(X) удовлетворяет двум аксиомам.

Первая из них утверждает, что существует подмножество пространства затрат, называемое экономической областью E, в которой увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска. Таким образом, если X_1, X_2 – две точки этой области, то $X_1 \geq X_2$ влечет $f(X_1) \geq f(X_2)$. В дифференциальной форме это выражается в том, что в этой области все первые частные производные функции неотрицательны: $\partial f/\partial x_1 \geq 0$ (у любой возрастающей функции производная больше нуля). Эти производные называются *предельными продуктами*, а вектор $\partial f/\partial X = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)$ – *вектором предельных продуктов* (показывает, во сколько раз изменится выпуск продукции при изменении затрат).

Вторая аксиома утверждает, что существует выпуклое подмножество S экономической области, для которой подмножества $\{X \in S : f(X) \geq a\}$ выпуклы для всех $a \geq 0$. В этом подмножестве S матрица Гёссе, составленная из вторых производных функции f(X), отрицательно определена, следовательно, $\partial^2 f/\partial x^2_i < 0$ для любого $i = 1, \ldots, m$.

Остановимся на экономическом содержании этих аксиом. Первая аксиома утверждает, что производственная функция не какая-то совершенно абстрактная функция, придуманная теоретиком-математиком. Она, пусть и не на всей своей области определения, а только лишь на ее части, отражает экономически важное, бесспорное и в то же время тривиальное утверждение: в разумной экономике увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Из второй аксиомы поясним только экономический смысл требования, чтобы производная $\partial^2 f/\partial x^2_i$ была меньше нуля для каждого вида затрат. Это свойство называется в экономике *законом убывающей отдачи или убывающей доходности*: по мере увеличения затрат, начиная с некоторого момента (при входе в область S), начинает уменьшаться предельный продукт. Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производство зерна на фиксированном участке земли. В дальнейшем подразумевается, что производственная функция рассматривается на области S, в которой обе аксиомы справедливы.

Составить производственную функцию данного предприятия можно, даже ничего не зная о нем. Надо только поставить у ворот предприятия счетчик (человека или какое-то автоматическое устройство), который будет фиксировать X – ввозимые ресурсы и Y – количество продукции, которую предприятие произвело. Если накопить достаточно много такой статической информации, учесть работу предприятия в различных режимах, то потом можно прогнозировать выпуск продукции, зная только объем ввезенных ресурсов, а это и есть знание производственной функции.

3.2 Производственная функция Кобба-Дугласа

Рассмотрим одну из наиболее распространенных производственных функций – функцию Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{3.4}$$

где A, α, $\beta > 0$ – константы, $\alpha + \beta < 1$;

K – объем фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве, скажем, число станков;

L – объем трудовых ресурсов, также в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве – число рабочих, человеко-дней и т. п.;

Y – выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении.

Проверим, выполняются ли требования к производственным функциям. Положительность предельных продуктов:

$$\partial Y/\partial L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} > 0 \qquad .(3.5)$$

Отрицательность вторых частных производных, т. е. убывание предельных продуктов:

$$\partial Y^2/\partial K^2 = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta} < 0, \tag{3.6}$$

$$\partial Y^2/\partial L^2 = A\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} > 0.$$

Перейдем к основным экономико-математическим характеристикам производственной функции Кобба-Дугласа.

Средняя производительность труда определяется как y = Y/L – отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда; средняя фондоотдача k = Y/K – отношение объема произведенного продукта к величине фондов.

Для функции Кобба-Дугласа средняя производительность труда равна

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta-1}, \tag{3.7}$$

и в силу условия β < 1 является убывающей функцией L, т. е. с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение– поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда.

Предельная производительность труда равна

$$\partial Y/\partial L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} > 0, \tag{3.8}$$

откуда видно, что для функции Кобба-Дугласа предельная производительность труда пропорциональна средней производительности и меньше ее. Аналогично определяются средняя и предельная фондоотдачи. Для них также справедливо указанное соотношение – предельная фондоотдача пропорциональна средней фондоотдаче и меньше ее.

Важное значение имеет такая характеристика, как *фондовооруженность*

$$f = K/L, \tag{3.9}$$

показывающая объем фондов, приходящийся на одного работника (на одну единицу труда).

Найдем теперь эластичность продукции по труду:

$$(\partial Y/\partial L):(Y/L) = (\partial Y/\partial L)L/Y = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}L/(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \beta. \tag{3.10}$$

Таким образом, ясен смысл *параметра* β – это *эластичность* (отношение предельной производительности труда к средней производительности труда) *продукции по труду*. Эластичность продукции по труду означает, что для увеличения выпуска продукции на 1 % необходимо увеличить объем трудовых ресурсов на β %. Аналогичный смысл имеет *параметр* α–это *эластичность продукции по фондам*.

Функция Кобба-Дугласа принадлежит к классу мультипликативных ПФ. На практике при ее построении иногда отказываются от некоторых требований (например, сумма α + β может быть больше 1 и т. п.).

Пример

Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на a = 3 %, надо увеличить основные фонды на b = 6 % или численность работников на c = 9 %. В настоящее время один работник за месяц производит продукции на $M = 10^4$ руб., а всего работников L = 1000. Основные фонды оцениваются в $K = 10^8$ руб. Найти производственную функцию.

Решение

Найдем коэффициенты α, β: α = a/b = 3/6 = 1/2, β = a/c = = 3/9 = 1/3, следовательно, $Y = AK^{1/2}L^{1/3}$. Для нахождения A подставим в эту формулу значения K, L, M, имея в виду, что $Y = ML = 1000 \cdot 10^4 = 10^7$. Решая уравнение $10^7=A(10^8)^{1/2}1000^{1/3}$, получаем A = 100. Таким образом, производственная функция имеет вид: $Y = 100K^{1/2}L^{1/3}$.

Расчет численных значений параметров производственных функций проводится с помощью корреляционного и регрессионного анализа. При решении этих задач на ЭВМ можно использовать программы, предназначенные для статистической обработки данных, например, статистические пакеты Statgraphics, Статистика и др. Можно использовать табличный процессор MSExcel (надстройка «Пакет анализа»).

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение производственной функции.
2. Приведите формулу мультипликативной производственной функции.
3. Приведите формулу производственной функции Кобба-Дугласа.
4. Назовите наиболее часто рассматриваемые ресурсы в производственной функции.
5. Перечислите показатели, которыми характеризуется производственная функция.
6. Перечислите основные свойства производственной функции.
7. Дайте определение эластичности мультипликативной производственной функции по капиталу.
8. Дайте определение эластичности мультипликативной производственной функции по труду.
9. Дайте определение предельной нормы замены труда капиталом.
10. Что показывают предельные нормы замены труда капиталом?
11. Дайте определение предельной нормы замены капитала трудом.
12. Что показывают предельные нормы замены капитала трудом?

РАЗДЕЛ 4. МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

4.1 Наращение денежных средств

Процентные ставки

В практических финансовых операциях суммы денежных средств связаны с конкретными моментами или интервалами времени. Необходимость учета этого фактора выражается в виде принципа неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Учет фактора времени осуществляется с помощью начисления процентов. Неопределенность связана с тем, что сберегаемые деньги подвержены риску: при хранении долга им грозит обесценивание, если деньги даются в долг, имеет место риск невозврата.

Процентные деньги (проценты) – абсолютная величина дохода (приращение Д) от предоставленных в долг денег (ссуда, вклад, депозит):

$$D = S - P, \qquad (4.1)$$

где P – первоначальная сумма вклада, кредита, депозита;

S – наращенная сумма денег (первоначальная сумма с начисленными на неё процентами).

Наращение (рост) – процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о процентной ставке.

Процентная ставка – отношение суммы процентных денег, выплаченных за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды:

$$I_{ПС} = \frac{S - P}{P} = T_{прироста}. \qquad (4.2)$$

Период начисления – временной интервал, к которому приурочена процентная ставка.

Интервал начисления – минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов. Начисление процентов может производиться дискретно и непрерывно. Дискретное наращение процентов осуществляется через определенные промежутки времени.

Период начисления процентов: год, полугодие, квартал, месяц, день.

В зависимости от исходной базы проценты делятся:

– на простые проценты, когда процентная ставка применяется к одной и той же исходной базе на протяжении всего срока ссуды. Простые проценты, как правило, используются в краткосрочных операциях – срок меньше года;

– на сложные проценты – базой для исчисления процентов является исходная сумма сделки плюс накопленные к этому времени проценты. Сложные проценты используются, как правило, в долгосрочных операциях – срок более года.

Учетная ставка фиксирует процентное (долевое) уменьшение суммы S на 1 период назад:

$$I_{УС} = \frac{S - P}{P} = T_{снижения} . \tag{4.3}$$

Основные математические методы расчетов

В финансовом анализе используются два основных математических метода.

Наращение – приведение настоящего (текущего уровня) к будущему. При наращении определяется будущая величина первоначальной суммы, через некоторый промежуток времени, исходя из заданной процентной ставки.

Дисконтирование – приведение поступлений будущих периодов к текущему уровню:

− авансовое удержание с заемщика процента в момент выдачи ссуды, т.е. до наступления срока ее погашения;

− процесс нахождения величины на текущий момент времени по известному (предполагаемому) заключению в будущем.

Наращение денежных средств по простым процентам

Расчеты проводятся по формуле:

$$S = P(1 + I_{ПС} * n), \tag{4.4}$$

где P – исходная сумма;

$I_{пс}$ – процентная ставка;

n – продолжительность сделки.

Если продолжительность сделки меньше года, то n=t/k, где t – продолжительность сделки (ссуды) в днях, k – временная база (число дней в году).

При k=360 используются обыкновенные процентные, при k=365(366) – точные проценты.

Количество дней определяется:

− точным методом – в каждом месяце календарное число дней;

− приближенным методом - в каждом месяце 30 дней.

В обоих случаях день выдачи и день погашения ссуды – 1 день.

Основные варианты расчетов процентов по ссудам (срок до года)

К основным вариантам расчетов процентов по ссудам при сроке до года относятся:

− точные проценты с точным числом дней ссуды;

− обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;

− приближенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Для случая дискретно меняющейся процентной ставки $I_{пс}$ (разные процентные ставки в разные периоды) наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = p(1+n_1 * I_{ПС} + \ldots + n_i * I_{ПС} + n_k * I_{ПСk}), \quad (4.5)$$

где $I_{пс}$ – процентная ставка $сn_i$;

n_i – продолжительность периода с n_i.

При реинвестировании процентных денег используется формула:

$$S = p(1+n_1 * I_{ПС1}) * \ldots * (1+n_k * I_{ПСk}). \quad (4.6)$$

Реинвестирование – последовательное повторение, наращение по простым процентам в пределах заданного срока.

Если продолжительность начислений и процентной ставки одинаковы для всех периодов, то применяется формула:

$$S = p(1+n * I_{ПСn})^m. \quad (4.7)$$

Наращение денежных средств по сложным процентам

По этой схеме начисления процентов суммируются с исходным капиталом р, и на следующем интервале начисление процентов производится уже на всю образовавшуюся сумму. Этот процесс называется капитализацией процентов или процент на процент:

$$S = p(1+I_{ПС})^n. \quad (4.8)$$

В случае меняющейся во времени процентной ставки расчеты ведутся по зависимости:

$$S = p(1+I_{ПС1})^{n1} * \ldots * (1+I_{ПСk})^{nk}. \quad (4.9)$$

При периоде менее года простые проценты более выгодны кредитору, при периоде в 1 год простые и сложные проценты приводят к одинаковым результатам, при периоде более года сложные проценты более выгодны вкладчику.

Проценты за дробное число лет начисляется 2 способами:

– по формуле сложных процентов:

$$S = p(1+I_{ПС})^{a+b}, \quad (4.10)$$

–с использованием смешанного метода:

$$S = p(1+I_{ПС})^a * (1+bI_{ПС}). \quad (4.11)$$

Когда начисление сложных процентов осуществляется помесячно, поквартально, по полугодиям, используется номинальная годовая процентная ставка j, она также называется релятивной (относительной).

Наращенная сумма будет определяться по формуле:

$$S = p(1+\frac{j}{m})^{n*m} \quad (4.12)$$

Особенности внутригодовых вычислений. Номинальная и эффективные ставки

Пусть по требованию клиента банк начисляет ему проценты ежеквартально, хотя в договоре указана годовая процентная ставка $I_{пс}$ =12%.

Если использовать начисление по схеме сложных процентов, то в квартал получится 3%, а за год f=(1+0.03)=1,1255. Ставка f=12,55% называется эффективной, а объявленная 12% - номинальной.

Эффективная процентная ставка – процентная ставка, при которой первоначальный капитал P, при m разовой капитализации и капитализации 1 раз в год возрастает одинаково.

Эффективная ставка измеряет реальный относительный доход, полученный за год, т.е. показывает, какая ставка сложных процентов даёт тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год.

Если приравнять множители наращений $(1+i)^{n}=(1+j/m)^{m*n}$, то ставка $I_{псэ}$ равна:

$$I_{псэ}=(1+j/m)^{m}-1. \quad (4.13)$$

Номинальной называется процентная ставка до фиксирования в договорах, а эффективной – действительная ставка.

Можно выразить номинальную ставку при заданной ставке $I_{пс}$:

$$j = m[(1+I_{ПС})^{1/m} - 1], \quad (4.14)$$

$$I_{ПС_э} = (1+\frac{j}{m})^m - 1. \qquad (4.15)$$

Эффективную учетную ставку рассчитываем следующим образом:

$$I_{УС_э} = 1-(1-\frac{I_{УС}}{m})^{m*n}. \qquad (4.16)$$

Таким образом, определение наращенной суммы денежныхсредств может производиться по зависимостям:

$$S = \frac{p}{(1-I_{УС})^n}, \qquad (4.17)$$

$$S = p(1-\frac{I_{УС}}{m})^{m*n}. \qquad (4.18)$$

Для решения задач наращения денежных средств на ЭВМ можно использовать MSExcel, финансовую функцию БС, которая вычисляет Будущую Стоимость инвестиции на основе периодических постоянных (равных по величине сумм) платежей и постоянной процентной ставки

4.2 ДИСКОНТИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ СРЕДСТВ

Процедурой дисконтирования и удержания процентов в определенном смысле считаются обратными по отношению к процессам наращения и начисления процентов.

Дисконтированием называется авансовое удержание с заёмщика процентов в момент выдачи ссуды, т.е. до наступления срока ее погашения, а также приведение поступлений будущих периодов к текущему уровню.

Дисконтирование делится на математическое и банковское.

Банковское дисконтирование состоит в учете векселей в банке. Вексель – письменное долговое обязательство.

Векселедержатель может продать вексель банку или другому лицу ранее указанного в векселе срока, по цене ниже той, что указана в векселе, такая сделка называется учетом векселя или дисконтированием. Банк, принимая вексель от предъявителя и выдавая ему обозначенную на векселе сумму до срока его погашения, удерживает в свою пользу процент (дисконт) от суммы векселя за время, оставшееся до срока погашения.

Дисконт – разница между номинальной стоимостью векселя и суммой, полученной векселедержателем в результате учета векселя.

При *математическом дисконтировании* находится Р-приведенная величина, современная стоимость будущей суммы:

$$P = S\frac{1}{1 + nI_{ПС}}, \tag{4.19}$$

где n – срок до погашения ссуды;

$\frac{1}{1 + nI_{ПС}}$ - дисконтный множитель, показывающий долю Р в величине S.

При банковском дисконтировании сумма, полученная при учете векселя, определяется по формуле:

$$P = S(1 - I_{УС} * \tilde{n}), \tag{4.20}$$

где $(1 - I_{УС} * \tilde{n})$ - дисконтный множитель;

$I_{УС}$ – простая учетная ставка;

$\tilde{n}$ - срок с момента учета векселя до момента его погашения.

Дисконтирование по процентной ставке $I_{ПС}$ и учетной ставке $I_{УС}$ приводят к различным финансовым результатам.

В случае дисконтирования по сложной ставке процентов используется приведение по вкладу Р. Приведенная величина ссуды Р определяется по формуле:

$$P = S\frac{1}{(1 + I_{УС})^n}, \tag{4.21}$$

где $\frac{1}{(1 + I_{УС})^n}$ - учетный или дисконтный множитель.

Если проценты начисляются m раз в году, то

$$P = S\frac{1}{(1+I_{УС}/m)^{m*n}}. \qquad (4.22)$$

При расчетах по размеру платежа, когда сложная учетная ставка для каждого периода применяется не к первоначальной сумме, а к сумме, уменьшенной на сумму дисконта, определенной на предыдущем этапе, применяется формула:

$$P = S(1-I_{УС})^{n}. \qquad (4.23)$$

При дисконтировании m раз в году применяют номинальную учетную ставку:

$$P = S(1-I_{УС}/m)^{m*n}. \qquad (4.24)$$

Для решения задач с дисконтированием денежных средств можно использовать финансовые функции в MSExcel следует использовать функцию ПС, которая вычисляет приведенную (к текущему моменту) стоимость инвестиций. Функция ПС производит расчет текущей (Приведенной) Стоимости фиксированных периодических выплат. Приведенная (нынешняя) стоимость представляет собой общую сумму, которая на настоящий момент равноценна ряду будущих выплат.

4.3 Потоки платежей и кредитные расчеты

Виды потоков платежей

Финансовые операции часто предполагают не разовые платежи, а последовательность их во времени. Например, погашение задолженности в рассрочку, выплаты пенсии и т.д. Такого рода последовательность (ряд) называют потоком платежей.

Потоки платежей могу быть:

− регулярными – размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу, которое предусматривает равные интервалы между платежами;

− нерегулярными.

Отдельный элемент ряда платежей называется членом потока. Члены потоков платежей бывают положительными и отрицательными (выплаты).

Финансовой рентой (рентой) называют поток платежей, все члены которого – положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы (получение процентов по облигациям, платежи по потребительскому кредиту).

Иногда такие потоки платежей называют аннуитетом (строго говоря, применимы только к ежегодным выплатам).

Рента описывается следующими параметрами:

− член ренты (R) – размер отдельного платежа;

− период ренты – временной интервал между двумя последовательными платежами;

− срок ренты (n) – время от начала первого периода ренты до конца последнего;

− процентная ставка.

Ренты могут классифицироваться следующим образом:

1) по количеству выплат членов ренты в течение года:

−годовые – выплата раз в год;

−р-срочные – р количество выплат в году;

2) по числу раз начислений процентов на протяжении года:

−с ежегодным начислением;

−m-раз в году;

− с непрерывным начислением;

3) по величине членов ренты:

− постоянные – с одинаковыми размерами члена ренты;

− переменные – измеряются согласно какому-либо закону (например, арифметической или геометрической прогрессии) или несистематично (задаются таблицей);

4) по соотношению начала срока ренты и момента времени, упреждающего начало ренты:

− немедленные;

−отложенные (отсроченные) (погашение долга в рассрочку после льготного периода);

5) по моменту выплат платежей в пределах периода ренты:

− постнумерандо (обыкновенные) – платежи осуществляются в конце периода ренты;

− пренумерандо – платежи производятся в начале периодов ренты;

− платежи в середине периодов.

Рассмотрим, основные показатели потока платежей:

− наращенная сумма – сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами;

− современная стоимость потока платежей – сумма всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты и некоторый упреждающий момент времени.

Прямой метод расчета наращенной суммы и современной стоимости потока платежей

Пусть имеется ряд платежей R_t, выплачиваемых, спустя время n_t после некоторого начального момента времени.

Пусть проценты начисляются раз в году по сложной ставке i. При этом будут использоваться следующие формулы:

− расчет наращенной суммы на момент платежей:

$$S = \sum_t R_t (1+i)^{n-n_t}, \qquad (4.25)$$

−расчет современной стоимости потока платежей:

$$A = \sum_t R_t \upsilon^{n_t}, \qquad (4.26)$$

где дисконтный множитель по ставке i равен $\upsilon^n = \frac{1}{(1+i)^n}$.

Когда размеры члена потока произвольны, но выплаты постнумерандо производятся через равные интервалы времени для расчета величины А, можно применить финансовую функцию ЧПС в MSExcel.

Наращенная сумма постоянной ренты постнумерандо

Методом прямого счета можно найти S и А для любого потока платежей. Однако удобнее пользоваться более компактными формулами. Например, рассчитаем наращенную сумму постоянной ренты постнумерандо.

Пусть в течение n лет в банк в конце каждого года вносится по R рублей. На взносы начисляются сложные проценты по ставке i % годовых:

$$S = R * S_{n;i}, \tag{4.27}$$

где $s_{n;i}$ - коэффициент наращения ренты,

$$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{4.28}$$

Кредитные расчеты

Разработка плана погашения долга заключается в составлении графика периодических платежей должника. Такие расходы должника называются расходами по обслуживанию долга или срочными уплатами, или расходами по займам.

Расходы по обслуживанию долга включают:

− текущие процентные платежи;

− средства, предназначенные для погашения основного долга.

В расчетах учитываются следующие условия погашения долга:

− срок займа;

− продолжительность льготного периода;

− уровень и вид процентной ставки;

− методы уплаты процентов;

− способы погашения основной суммы долга.

В льготном периоде основной долг не погашается, обычно выплачиваются проценты. Не исключается возможность присоединения процентов к сумме основного долга. В долгосрочных займах проценты обычно выплачиваются на протяжении всего срока займа. Реже они начисляются и присоединяются к основной сумме долга.

Основная сумма долга иногда погашается одним платежом. Чаще она выплачивается частями в рассрочку.

При кредитных расчетах используются формулы по рентам.

При определении срочных уплат будем использовать следующие обозначения:

Д – сумма задолженности;

Y – срочная уплата;

I – проценты по займам (начисляются банком);

R – расходы по погашению основного долга;

g – ставка процентов по займам (проценты за кредит);

n – общий срок займа;

L – продолжительность льготного периода.

По определению расходы по обслуживанию долга находятся как $Y=R+I$.

Если в льготном периоде уплачиваются проценты, то расходы по долгу в этом периоде сокращаются до $Y=I$.

Существует несколько кредитных схем погашения долга. К основным из них относятся:

− погашение основного долга равными суммами;

− погашение долга равными срочными уплатами;

− создание погасительного фонда.

Погашение долга равными суммами основного долга

Например, долг в сумме 1000 тыс. руб. необходимо погасить последовательными равными суммами за 5 лет (платежи производятся в конце года) за займ берется 10 % годовых.

Рассчитаем размер погашения основного долга в год:D= $\frac{D}{n} = \frac{1000}{5}$ =200 тыс.руб.

В таблице 5 приведен график погашения платежей равными суммами основного долга. Как видим, в начале срока срочные уплаты Y выше, чем в конце срока, что часто нежелательно должнику.

Таблица 5

График погашения платежей равными суммами основного долга

Год	Остаток основного долга на начало года	Срочные уплаты	Погашение основного долга	%
	D=D-d	Y=d+I	D	I
	1	2	3	4
1	1000	300	200	100
2	800	280	200	80
3	600	260	200	60
4	400	240	200	40
5	200	220	200	20
Итого		1300	1000	300

Погашение долга равными срочными уплатами

Например, долг в сумме 1000 тыс.руб. необходимо погасить равными срочными уплатами за 5 лет (за займ берется 10% годовых).

Размер срочной уплаты рассчитывается по формуле:

$$Y = \frac{D}{a}, \tag{4.29}$$

где a - коэффициент приведения годовой ренты со ставкой g и сроком n, равный $\frac{1-(1+j)^{-n}}{i}$,

a= $\frac{1-(1+0,1)^{-5}}{0,1}$ = 3,790778,

Y=$\frac{1000}{3,790778}$ = 263,8 тыс.руб.

В таблице 6 приведен график погашения платежей равными срочными уплатами.

Таблица 6

График погашения платежей равными срочными уплатами

Год	Д=Д-d	Y=I+d	d=Y-I	I
1	1000	263,8	163,8	100
2	836,2	263,8	180,18	83,86
3	656,02	263,8	198,2	65,6
4	457,82	263,8	218,02	45,78
5	234,8	263,8	239,82	23,48
Итого		1319	1000	319

Создание погасительного фонда

Если должник должен вернуть долг в конце срока в виде разового платежа, то ему необходимо создать погасительный фонд. Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника, например, на специальный счет в банке, на который начисляются проценты.

Сумма взносов в фонд вместе с начисленными процентами, накопленная в погасительном фонде к концу срока, должна быть равна сумме долга.

Взносы в фонд могут быть постоянными и переменными во времени.

Рассмотрим вариант с постоянными взносами.

Пусть накопления производятся путем регулярных ежегодных взносов R в фонд, на которые начисляются сложные проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов за долг по ставке g:

$$Y = D * g + R. \qquad (4.30)$$

Пусть фонд должен быть накоплен за n лет, тогда соответствующие взносы образуют постоянную ренту постнумерандо с параметрами R, n, I:

$$R = \frac{D}{S_{n;i}}, \qquad (4.31)$$

где $s_{n;i}$ - коэффициент наращения постоянной ренты со сроком i.

Срочная уплата определяется по формуле:

$$Y = D * g + \frac{D}{S_{n;i}}. \qquad (4.32)$$

Если условия контракта предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то

$$Y = D\frac{(1+g)^n}{S_{n;i}}. \qquad (4.33)$$

При создании погасительного фонда используются две процентные ставки i и g. Схема создания погасительного фонда выгодна должнику только тогда, когда i>g.

Накопленные за t лет средства определяются по формуле наращенных сумм постоянных рент или реккурентно:

$$S_{t+1} = S_t(1+i) + R. \qquad (4.34)$$

Если взносы вносятся не ежегодно, а в конце каждого месяца, то используются формулы постоянных рент с начислением m раз в году.

4.4 Оценка инвестиционных процессов

Оценка инвестиционных процессов с дисконтированием денежных средств

Инвестиции – это долгосрочные вложения капитала с целью получения доходов в будущем. От кредитов инвестиции отличаются степенью доходности и риска. Для инвестора (кредитора) — кредит и проценты необходимо возвращать в оговоренные сроки независимо от прибыльности проекта. Если проект убыточен — инвестиции могут быть утрачены. Существует много различных областей инвестирования: в производство, в землю, социально-экономические программы, инновационные проекты, недвижимость, в ценные бумаги и т.д.

Для привлечения инвестиций в производство разрабатывается инвестиционный проект. Оценка инвестиционного проекта – сложный и многоэтапный процесс. Методам и моделям оценки инвестиций посвящено большое количество исследовательских работ.

Инвестиционный проект представляет собой комплекс взаимосвязанных мероприятий, предполагающий определенные вложения капитала с целью получения дохода в будущем. При этом должна проводиться оценка экономической эффективности проекта.

Оценка производится при разработке проекта или его экспертизе для решения следующих задач: оценка конкретного инвестиционного проекта, обоснование целесообразности участия в проекте, сравнение нескольких проектов (вариантов проекта) и выбор лучшего из них.

Внедрение информационных систем и IT-технологий можно рассматривать как инвестиционный процесс (проект).

Оценки экономической эффективности IT-проекта можно разделить на поддающиеся стоимостному измерению и не поддающиеся (качественный эффект). К поддающемуся стоимостному измерению традиционно относятся трудовые и стоимостные показатели по процессам.

При оценке инвестиционных проектов широко используется техника дисконтирования, позволяющая учитывать различия в ценности денежных средств в разные периоды времени. На изменение денежных средств во времени влияют разные социально-экономические факторы, в том числе инфляция. Для учета этого обстоятельства денежные средства должны быть приведены к начальному моменту времени.

Предлагаются две методики расчета экономической эффективности IT-проектов: без дисконтирования и с дисконтированием денежных средств.

В мировой и российской практике в настоящее время основными показателями оценки экономической эффективности инвестиционных процессов, в том числе и IT-проектов, с дисконтированием денежных потоков являются:

1. Чистая приведенная стоимость – NPV (NetPresentValue).

2. Внутренняя норма рентабельности инвестиций - IRR (InternalRateofReturn).

3. Индекс прибыльности – PI (Profitability Index).

4. Срок окупаемости инвестиций –PB (PayBack).

Все эти показатели основываются на теории дисконтирования денежного потока.

Чистая приведенная стоимость NPV

Чистая приведенная стоимость (чистый приведенный доход) рассчитывается по формуле:

$$NPV = \sum_{t=0}^{N} \frac{R_t}{(1+r_t)^t} . \qquad (4.35)$$

В отличие от приведенной стоимости при дисконтировании учитывается денежный поток в нулевой период. Положительные значения C_t соответствуют доходам, а отрицательные – расходам. Процентная ставка дисконтирования обычно называется ставкой дисконтирования и выбирается с учетом степени риска проекта и цены привлечения капитала, которая равна средневзвешенной цене кредитных ресурсов и цене привлечения акционерного капитала. Как правило, процентная ставка дисконтирования рассчитывается на основе модели оценки финансовых активов CAPM.

Если NPV>0, то проект следует принять к рассмотрению, поскольку он приносит прибыль.

Если NPV<0, то проект следует отвергнуть, поскольку будущие доходы не компенсируют затрат.

Если NPV=0, то затраты полностью компенсируются доходами, проект не увеличивает капитал фирмы.

Внутренняя норма доходности IRR

Внутренняя норма доходности (рентабельности) инвестиций (IRR) – это ставка дисконта, при которой чистая приведенная стоимость ожидаемых от проекта денежных потоков и связанных с ним издержек, равна нулю.

Для решения в MSExcel можно использовать финансовую функцию ВСД. Можно также найти примерное значение IRR, если построить график зависимости NPV от IRR. Пересечение графика с осью x является искомым значением IRR.

IRR характеризует ожидаемую доходность проекта. Если проект финансируется банком, IRR характеризует максимально допустимый уровень процентной ставки. При этой ставке инвестиции окупаются, но не приносят прибыли. Решение, как правило, принимается на основе сравнения внутренней нормы доходности инвестиционного проекта с нормативной рентабельностью (доходностью). Рекомендуется принимать те инвестиционные проекты, которые дают доходность более высокую, чем стоимость капитала фирмы. Это не всегда очевидно для долгосрочных проектов.

Проект называется ординарным (normal), если за отрицательными денежными потоками следуют положительные денежные потоки. Для таких проектов зависимость NPV от ставки дисконтирования является монотонной, и имеется единственный корень, при котором NPV=0, т.е. единственное значение IRR. Однако, если в проекте положительные и отрицательные денежные потоки чередуются (неординарный), то показатель IRR неприемлем.

Индекс прибыльности PI

Индекс прибыльности (рентабельности) показывает относительную прибыльность проекта, или дисконтированную стоимость денежных поступлений от проекта в расчете на одну единицу вложений. Он рассчитывается путем деления приведенной стоимости денежных чистых поступлений на стоимость первоначальных вложений

$$PI = \frac{PV(\text{прибыли})}{PV(\textit{затраты})} = \frac{\sum_{t=0}^{N} {C^{inv}}_t \Big/ (1+r)^t}{\sum_{t=0}^{N} C_t^{inc} \Big/ (1+r)^t}, \qquad (4.36)$$

где ${C^{inv}}_t$ - ожидаемый приток денежных средств,

C_t^{inc} - ожидаемый отток денежных средств.

Если $PI > 1$, то доходность проекта выше, чем требуемая инвесторами, и проект считается привлекательным. Если $PI < 1$, то доходность проекта меньше,чем требуемая инвесторами, и проект считается непривлекательным.

Срок окупаемости проекта PB

Срок окупаемости проекта – ожидаемое число лет, которое требуется для возмещения первоначальных вложений из чистых денежных поступлений. PB численно равно числу периодов N^*, при котором NPV становится положительным т.е.

$$\sum_{t=0}^{N^*} \frac{C_t}{(1+r)^t} = NPV_{N^*} \geq 0. \qquad (4.37)$$

Этот показатель не учитывает денежные потоки после срока окупаемости проекта. Однако, чем меньше срок окупаемости, тем менее рискован проект, поскольку считается, что более удаленные во времени члены денежного потока являются более рискованными. Если ожидаемый срок окупаемости меньше нормативного, то он может быть принят. При оценке нормативного срока окупаемости учитываются самые разные факторы, такие как средний срок окупаемости по уже принятым решениям, средний срок окупаемости в отрасли, распределение потребностей в денежных ресурсах во времени.

В программе ProjectExpert рассчитываются приведенные показатели оценки экономической эффективности инвестиционных процессов, в том числе для обоснования эффективности бизнес-планов.

Оценка инвестиционных процессов без дисконтирования денежных средств

Методика содержит расчет трудовых и стоимостных показателей до и после внедрения IT-проекта. Рассчитываются доход, получаемый за счет внедрения проекта и затраты на проектирование, внедрение и сопровождение проекта. На основе этих показателей рассчитывается экономический эффект от внедрения проекта и срок окупаемости проекта. Расчеты могут проводиться как традиционно, так и с использованием АВС-анализа, встроенного в CASE – средство ErwinProcess-Modeler.

Этапы расчета экономической эффективности IT-проекта без дисконтирования:

1 этап. Определить стоимостные затраты на создание проекта.

Стоимостные затраты на создание проекта (К) состоят из стоимостных затрат на проектирование и стоимостных затрат на внедрение проекта.

Затраты на проектирование ИС определяются по формуле:

$$K_{П}=K_{ПР}+K_{ОП}, \qquad (4.38)$$

где $К_{пр}$ – затраты на заработную плату проектировщиков и программистов с отчислениями в фонд социального страхования и во внебюджетные фонды;

$К_{оп}$ – затраты, связанные с использованием машинного времени на разработку и отладку программ.

Затраты на внедрение проекта включают:

$$K_{В}=K_{ТС}+K_{ЛС}+K_{ПО}+K_{ОП}, \qquad (4.39)$$

где $K_{тс}$ – затраты на технические средства;

$К_{лс}$ – затраты на создание линий связи локальных сетей;

$К_{по}$ – затраты на программное обеспечение;

$К_{оп}$ – затраты на обучение персонала.

Расчет стоимостных затрат на создание проекта производится по формуле:

$$К=К_П+К_В. \qquad (4.40)$$

2 этап. Определить прирост дохода и снижение трудоемкости в результате внедрения IT-проекта.

Под приростом дохода будем понимать снижение стоимостных эксплуатационных затрат в результате внедрения IT-проекта, то есть разницу в стоимостных эксплуатационных затратах до и после внедрения IT-проекта.Эксплуатационные затраты, в отличие от капитальных, являются повторяющимися и рассчитываются за год.

1) Рассчитать годовые суммарные стоимостные эксплуатационные затраты и трудоемкости по всему бизнес-процессу до ($Сэкс_0$) и после ($Сэкс_1$) внедрения IT-проекта.

2) Рассчитать прирост дохода в результате внедрения IT-проекта ($\Delta Сэкс$) за год по формуле:

$$\Delta Сэкс = Сэкс_0 - Сэкс_1, \qquad (4.41)$$

где $Сэкс_0$ - стоимостные эксплуатационные затраты на существующий бизнес-процесс за год;

$Сэкс_1$ – стоимостные затраты на бизнес-процесс после внедрения IT-проекта за год.

3 этап. Определить общий доход в результате внедрения IT-проекта.

Общий доход от внедрения IT-проекта (Д) включает:

Д = ΔСэкс + другие доходы от внедрения IT-проекта.

4 этап. Определить срок окупаемости IT-проекта.

$$Т_{ок} = К / Д, \qquad (4.42)$$

где K - затраты на создание проекта;

$Д$ - общий доход от внедрения IT-проекта.

Дополнительно можно рассчитать следующие показатели:

1. Индекс снижения стоимостных эксплуатационных затрат:

$$Y_C = Сэкс_0 / Сэкс_1. \quad (4.43)$$

2.Снижение трудовых затрат (ΔT) в часах за год:

$$\Delta T = T_0 - T_1, \quad (4.44)$$

где T_0 – трудовые затраты за год до внедрения IT-проекта, час;

T_1 - трудовые затраты за год после внедрения IT-проекта, час.

3. Индекс снижения трудовых затрат:

$$Y_T = T_0 / T_1. \quad (4.45)$$

Расчет экономической эффективности IT-проекта с использованием АВС анализа

АВС- методика функционально-стоимостного анализа для идентификации истинных генераторов затрат на предприятии/организации.

Методика предназначена для определения общей стоимости реализации целевого технологического процесса и представляет собой соглашение об учете, используемое для определения как затрат, возникающих на каждом этапе процесса, так и суммарных затрат. Расчеты будут проводиться с использованием функционально-стоимостного анализа, проведенного вручную и с применением АВС-анализа, встроенного в CASE-средство AllFusionProcessModeler (BPwin).

Модуль АВС применяется для…

- понимания происхождения выходных затрат и определения их стоимости;

- определения действительной стоимости производства продукта;
- определения требуемых ресурсов;
- определения действительной стоимости поддержки клиента;
- оценки и анализа затрат на осуществление различных видов деятельности;
- облегчения выбора оптимальной модели процесса при реорганизации деятельности предприятия;
- выделения наиболее дорогостоящих операций для их реинжиниринга.

Применение модуля ABC и имеющихся в BPwin средств подготовки отчетов позволяет обеспечить корпоративную стратегию управления хозяйственной деятельностью.

ABC включает следующие основные понятия:

- объект затрат – цель существования функции процесса, т.е. основной выход. Стоимостью целевого технологического процесса будет являться суммарная стоимость всех объектов затрат. Результат расчета суммарной стоимости представляется на контекстной диаграмме;
- движитель затрат - входы и управления функции, определяющие ее существование и влияющие на срок ее действия;
- центры затрат - различные статьи расходов.

Метод ABC может быть осуществлен в любой модели ERwin путем задания в объекте затрат применяемой валюты как единицы измерения затрат, или значения временного периода.

Для эффективного использования механизма стоимостного анализа сначала строится функциональная модель существующей организации работы - AS - IS (как есть). На основании этой модели анализируются существующие процессы, изучаются имеющиеся потоки данных, определяется возможность изменения их направления, и строится модель TO-BE. Рекомендуется строить несколько моделей TO-BE, из которых по определенному авторским коллективом критерию выбирается лучшая.

Механизм поддержки ABC в ERwin, хотя и учитывает стоимость выполнения каждой работы, продолжительность каждой работы по времени и сколько раз необходимо выполнить работу в течение одного цикла бизнес-процесса, все же дает довольно грубые оценки и к тому же требует, чтобы все диаграммы, для которых производится оценка, были выполнены в IDEF0. Результаты функционально- стоимостного анализа отображаются непосредственно на диаграммах. В левом нижнем углу прямоугольника блока может показываться либо стоимость (по умолчанию), либо продолжительность, либо частота проведения функции (диапазон измерения времени в списке Unitofmeasurement достаточен для большинства случаев - от секунд до лет).

Для определения затрат моделируемого процесса с помощью ABC порядок действий следующий:

1. Определяются единицы измерения ABC. Прежде всего, следует определить, в каких денежных единицах и в течении какого периода времени (секунды, минуты, часы, дни, недели, месяцы и года) осуществляется расчет затрат. После задания этих единиц они становятся общими для всех диаграмм модели и представляются в заданном виде на диаграммах и в отчетах. Выполнить команду Edit/ModelProperties;
2. В открывшемся диалоговом окне ModelProperties на вкладке ABC Units задать единицы измерения. Если в списке выбора отсутствует необходимая валюта, ее можно добавить самостоятельно;

3. Определяются центры затрат (costcenter), которые является категорией стоимости, единой для всех функций. Выполнить команду Dictionary / CostCenter. В открывшемся диалоговом окне CostCenterDictionary в окне Definition подробно описать каждый центр затрат. Список центров затрат должен быть упорядочен. Порядок в списке можно менять при помощи стрелок, расположенных справа от списка. Задание определенной последовательности центров затрат в списке, во-первых, облегчает последующую работу при присвоении стоимости работам, а во-вторых, имеет значение при единых стандартных отчетах в разных моделях. Хотя BPwin сохраняет информацию в стандартном отчете в файле BPWINRPT.INI, однако информация о центрах затрат и UDP сохраняется в виде указателей, т. е. хранятся не текстовые названия центров затрат, а их номера. Поэтому, если нужно использовать один и тот же стандартный отчет в разных моделях, списки центров затрат должны быть в них одинаковы;

4. Для задания стоимости функции (для каждого блока на диаграмме композиции) в контекстном меню блока выбрать команду Costs. В открывшемся диалоговом окне ActivityProperties на вкладке Costs в текстовом окне Frequency указать частоту выполнения конкретной функции общего процесса, а в текстовом окне Duration- ее продолжительность

5. Выбрать в списке один из центров затрат и в текстовом окне Cost задать его стоимость;

6. Для определения стоимости каждой функции по каждой статье расхода повторить действия по назначению суммы затрат по каждому уже определенному центру затрат. Если в процессе назначения стоимости возникает необходимость внесения дополнительных центров затрат, то диалоговое окно

CostCenterEditor может быть открыто непосредственно из диалогового окна ActivityCost щелчком по соответствующей кнопке;

7. Рассчитать общие затраты как сумму по всем центрам затрат для последовательно выполняемых процессов можно одним из способов:

– при вычислении затрат вышестоящей (родительской) работы сначала вычисляется произведение затрат дочерней работы на частоту работы (число раз, которое работа выполняется в рамках проведения родительской работы), затем результаты складываются;

– если во всех работах модели включен режим ComputefromDecompositions, подобные вычисления автоматически проводятся по всей иерархии работ снизу вверх;

8. Если схема выполнения более сложная (например, работы производятся альтернативно) то BPwin позволяет разрабатывать упрощенные модели стоимости, которые, тем не менее, оказываются чрезвычайно полезными для предварительной оценки затрат. В таком случае рекомендуется отказаться от подсчета и задать итоговые суммы для каждой работы вручную (опция OverrideDecompositions). В этом случае результаты расчетов с нижних уровней декомпозиции будут игнорироваться, при расчетах на верхних уровнях будет учитываться сумма, заданная вручную;

9. На любом уровне результаты расчетов сохраняются независимо от выбранного режима, поэтому при выключении опции OverrideDecompositions расчет снизу вверх производится обычным образом;

10. Для отображения результатов расчета в левом нижнем углу блока на диаграмме в виде стоимости (по умолчанию), либо продолжительности, либо частоты проведения функции необходимо произвести настройку свойств с помо-

щью опций ABC Dataи ABC Units вкладки Display диалогового окна ModelProperties.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как учитывается фактор времени в изменении денежных средств?
2. Дайте определение процентной ставки.
3. Охарактеризуйте сущность наращения по простым процентам.
4. Приведите способы измерения временной базы.
5. Приведите формулу наращения по простым процентам.
6. Охарактеризуйте сущность наращения по сложным процентам.
7. Приведите формулу наращения по сложным процентам.
8. Сравните, как изменяется наращенная сумма при расчете по сложным и простым процентам.
9. Дайте определение номинальной ставки.
10. Приведите формулу наращения процентов m раз в году.
11. Дайте определение номинальной ставки.
12. Приведите определение эффективной ставки и формулы для ее расчета.
13. Приведите формулы для расчета инфляции.
14. Приведите формулы для расчета наращенных сумм с учетом инфляции.
15. Охарактеризуйте сущность дисконтирования денег.
16. Как называются разные виды дисконтирования и их определения?
17. Дайте определение учетной ставки.
18. Приведите формулы для расчета современной стоимости при математическом дисконтировании.
19. Приведите формулы для расчета современной стоимости при банковском учете.
20. Дайте определение эквивалентных платежей.
21. Приведите виды потоков платежей и их основные показатели.
22. Приведите основные параметры кредитных расчетов.
23. Перечислите кредитные схемы.
24. Как рассчитывается график платежей при погашении долга в рассрочку равными суммами?

25. Как рассчитывается график платежей при погашении долга в рассрочку равными срочными уплатами?

26. Приведите понятие инвестиционного процесса.

27. Охарактеризуйте IT-проект как инвестиционный процесс.

28. Перечислите основные показатели оценки экономической эффективности инвестиционного проекта с дисконтированием.

29. Приведите формулу расчета чистого приведенного дохода.

30. Приведите формулу расчета дисконтируемого срока окупаемости инвестиций.

31. Приведите формулу расчета внутренней нормы доходности и индекса доходности.

32. Что собой представляет функционально-стоимостной ABC-анализ?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время успешная деятельность предприятий и организаций связана с эффективным использованием ресурсов, оптимизацией производственных и социально-экономических процессов. Для достижения желаемых результатов необходимо опираться на научно-обоснованные, в том числе математические, решения, которые могут быть получены при использовании математического моделирования, экономико-математических методов и информационных технологий.

Математическая экономика позволяет исследовать и прогнозировать экономические системы и явления с помощью математических моделей микро- и макроуровней.

В учебном пособии рассмотрены:

– математические модели экономических объектов, систем и явлений, основы моделирования управленческих решений в экономике, виды экономико-математических моделей;

– вопросы поведения участников экономики, условий существования оптимальных решений, а также методов их вычисления в моделях математического и линейного программирования, двойственность и анализ устойчивости оптимальных планов в линейном программировании;

– основы разработки и использования балансовых моделей, в частности, модели межотраслевого баланса Леонтьева, общих моделей развития экономики;

– модели сферы потребления - потребительского выбора, спроса и предложения, потребления и сбережения;

– теоретические и практические основы, связанные с производственными функциями, их свойствами и основными характеристиками;

– модели финансовых потоков - математические расчеты по потокам денежных средств - наращением и дисконтированием, кредитным расчетам и оценкой экономической эффективности инвестиционных проектов, в том числе IT-проектов.

Учебное пособие поможет обучающимся:

– освоить современные математические модели и методы анализа и научного прогнозирования поведения экономических объектов и явлений, формирование системы основных понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов, и раскрытие взаимосвязи этих понятий,

– ознакомиться с элементами аппарата математической экономики, необходимого для решения теоретических и практических задач;

– сформировать навыки самостоятельного изучения специальной литературы;

– развить логическое мышление, навыки математического исследования явлений и процессов, связанных с производственной деятельностью;

– применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач.

.

Дальнейшее развитие знаний по математической экономике обучающиеся могут получить при использовании учебных изданий, в том числе автора, с конкретизацией алгоритмов решения по приведенным в пособии моделям, в том числе с использованием современных программных средств на ЭВМ.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Предмет, основные цели и задачи математической экономики.
2. Понятия модели, моделирования. Классификация экономико-математических моделей.
3. Модель межотраслевого баланса Леонтьева.
4. Общие модели развития экономики.
5. Динамические модели макроэкономики.
6. Модели экономического роста.
7. Модели математического и линейного программирования.
8. Двойственность в линейном программировании.
9. Анализ устойчивости оптимального плана.
10. Задача потребительского выбора.
11. Функция полезности как критерий оценки товаров.
12. Кривые «доход-потребление» и «цена-потребление».
13. Функции спроса и предложения.
14. Эластичность функции и ее свойства.
15. Функции потребления и сбережения.
16. Понятие и виды производственных функций.
17. Свойства производственных функций.
18. Основные характеристики производственных функций.
19. Учет временного фактора в изменении денежных средств. Процентные ставки.
20. Наращение по простым и сложным процентам. Способы измерения временной базы.
21. Наращение процентов m раз в году. Номинальная ставка.
22. Дисконтирование денежных средств.
23. Потоки платежей и их основные показатели.
24. Кредитные расчеты: основные параметры, перечень кредитных схем. Погашение долга в рассрочку равными суммами.
25. Кредитные расчеты: погашение долга равными срочными уплатами.
26. Понятие инвестиционного процесса. Направления и виды оценки экономической эффективности IT-проекта.
27. Основные показатели оценки экономической эффективности IT-проекта с дисконтированием.
28. Методика расчета показателей экономической эффективности IT-проекта без дисконтирования.
29. Расчет затрат на создание IT-проекта.
30. Функционально-стоимостной ABC-анализ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бабешко, Л. О. Математическое моделирование финансовой деятельности : учебное пособие* / Л. О. Бабешко. - Москва : КНОРУС, 2011. - 224с.
2. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели [Электронный ресурс]: учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва :Юрайт, 2017. – Режим доступа: http://www.biblio-online.ru.–Загл. с экрана.
3. Гетманчук, А. В. Экономико-математические методы и модели :<учебное пособие> / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. - Москва : Дашков и К', 2013. - 185с.
4. Данилов, Н. Н. Курс математической экономики :<учебное пособие>* / Н. Н. Данилов. - Москва : Лань, 2016. - 400с.
5. Дубина, И. Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов [Электронный ресурс] : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / И. Н. Дубина. – Москва :Юрайт, 2017. –Режим доступа: http://www.biblio-online.ru. – Загл. с экрана.
6. Касимов, Ю.Ф. Финансовая математика: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры [Электронный ресурс] /Ю.Ф. Касимов. - 5-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2016. – Режим доступа: http://www.biblio-online.ru
7. Каштаева, С. В. Моделирование экономических процессов в АПК [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / С. В. Каштаева ; Пермская ГСХА. – Пермь : Пермская ГСХА, 2012. – Режим доступа: http://pgsha.ru/web/generalinfo/library. –Загл. с экрана.
8. Королев, А. В. Экономико-математические методы и моделирование [Электронный ресурс]: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. В. Королев. – Москва :Юрайт, 2017. –Режим доступа: http://www.biblio-online.ru. – Загл. с экрана.
9. Косников, С. Н. Математические методы в экономике : учеб.пособие для вузов / С. Н. Косников. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 172 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04098-2. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/018ECE89-72FD-4206-AFAA-CF33A150D178.
10. Кочегурова, Е. А. Теория и методы оптимизации [Электронный ресурс] : учебное пособие для академического бакалавриата / Е. А. Кочегурова. – Москва :Юрайт, 2016. – Режим доступа: http://www.biblio-online.ru.–Загл. с экрана.
11. Петров, А.В. Моделирование процессов и систем [Электронный ресурс] : учебное пособие. – Санкт-Петербург : Лань, 2015. – Режим доступа: http://e.lanbook.com.–Загл. с экрана.
12. Попов, А. М. Экономико-математические методы и модели : учебник [Электронный ресурс] / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2019. – Режим доступа :http://www.biblio-online.ru. – Загл. с экрана.
13. Рейзлин, В. И. Математическое моделирование [Электронный ресурс] : учебное пособие для магистратуры / В. И. Рейзлин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва :Юрайт, 2017.– Режим доступа: http://www.biblio-online.ru.–Загл. с экрана.
14. Фомин, Г. П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 462 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3021-4. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/F776ADFE-ABC7-41C9-8FC9-6480EBC8B68E.

15. Шевалдина, О. Я. Математика в экономике[Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / О. Я. Шевалдина ; под науч. ред. В. Т. Шевалдина. – Москва :Юрайт, 2017.– Режим доступа: http://www.biblio-online.ru.–Загл. с экрана.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1.Электронный каталог библиотеки Пермского ГАТУ [Электронный ресурс]: базы данных содержат сведения о всех видах лит., поступающей в фонд библиотеки Пермского ГАТУ. – Электрон.дан. (251 141 запись). – Пермь: [б.и., 2005]. Доступ не ограничен. https://pgsha.ru/generalinfo/library/webirbis/

2. Собственная электронная библиотека. Доступ не ограничен https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/

3. Система ГАРАНТ: электронный периодический справочник [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (7162 Мб: 887 970 документов). – [Б.и., 199 -]; Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

4. ConsultantPlus: справочно - поисковая система [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (64 231 7651 документов) – [Б.и., 199 -]. Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

5. ЭБС издательского центра «Лань» - «Ветеринария и сельское хозяйство», «Лесное хозяйство и лесоинженерное дело»; «Инженерно-технические науки», «Информатика», «Технологии пищевых производств», «Доступ к произведениям отдельно от Разделов (39 наименований)». http://e.lanbook.com/ Доступ не ограничен.

6. Электронно-библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» www.biblio-online.ru

7. Электронная библиотечная система «Национальный цифровой ресурс «Руконт». Коллекция «Электронная библиотека авторефератов диссертаций ФГБОУ ВПО РГАУ МСХА имени К.А. Тимирязева» (массив документов с 1992 года по настоящее время), тематическая коллекция «Сельское хозяйство. Лесное дело. http://rucont.ru/ Доступ не ограничен.

8. ООО Научная электронная библиотека. Интегрированный научный информационный портал в российской зоне сети Интернет, включающий базы данных научных изданий и сервисы для информационного обеспечения науки и высшего образования. (Включает РИНЦ- библиографическая база данных публикаций российских авторов и SCIENCE INDEX- информационно - аналитическая система, позволяющая проводить аналитические и статистические исследования публикационной активности российских ученых и научных организаций). http://elibrary.ru/. Доступ не ограничен.

9.ООО «ИД «Гребенников». Электронная библиотека Grebennikon содержит статьи, опубликованные в специализированных журналах Издательского дома «Гребенников», где освещается широкий спектр вопросов по экономике (в том числе – по маркетингу, менеджменту, управлению персоналом, управлению финансами и т.д.). http://grebennikon.ru. Доступ не ограничен.

10. ООО «Ай Пи Эр Медиа». База данных ЭБС IPRbooks. Тематические коллекции через платформу Библиокомплектатор «Информатика и вычислительная техника», «Геодезия. Землеустройство», «Технические науки». http://www/bibliocomplectator.ru/. Доступ не ограничен.

11. ООО «ПОЛПРЕД Справочники». ЭБС Polpred.com (Полпред.ком). Доступ к электронным изданиям «Агропром в РФ и за рубежом. Доступ не ограничен. Обзор СМИ.