Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д.Н. Прянишникова»

С.В. Каштаева

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2020

УДК 51
ББК 22.1
К 316

Рецензенты:

Д.В. Климов, канд. экон. наук, доцент кафедры предпринимательства и экономической безопасности ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»;

В.П. Черданцев, д-р экон. наук, профессор кафедры менеджмента ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ.

К316 Каштаева, С.В.

Методы оптимизации : учебное пособие / С.В. Каштаева; Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский аграрно-технологический университет имени академика Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2020. – 84 с ; 21 см – Библиогр.: с.83. – 35 экз. – ISBN 978-5-94279-501-6 – Текст : непосредственный

В учебном пособии изложены классификация и математические основы методов оптимизации, представлены алгоритмы решения задач линейного программирования: графический, симплексный, искусственного базиса, транспортной задачи, рассмотрены вопросы анализа устойчивости оптимальных планов, минимизации функций одной и нескольких переменных с использованием прямых методов и производных. Приведены вопросы и задания для самоконтроля по разделам и для подготовки к промежуточной аттестации.

Учебное пособие предназначено для обучающихся в высших учебных заведениях по направлениям подготовки 09.03.03 Прикладная информатика, направленность (профиль) «Прикладная информатика в экономике», 09.03.02 Информационные системы и технологии, направленность (профиль) «Информационные системы и технологии», а также может быть использовано специалистами предприятий агропромышленного комплекса, преподавателями и аспирантами сельскохозяйственных вузов.

УДК 51
ББК 22.1

Утверждено в качестве учебного пособия Методическим советом ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ

Учебное издание

Каштаева Светлана Васильевна

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Подписано в печать 20.11.20. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л.5,25. Тираж 35 экз. Заказ № 103

ИПЦ «Прокростъ»
Пермского государственного аграрно-технологического
университета имени академика Д.Н. Прянишникова,
614990, Россия, Пермь, ул. Петропавловская, 23

ISBN 978-5-94279-501-6

СОДЕРЖАНИЕ

Список сокращений

ЗЛП – задача линейного программирования
ОДР – область допустимых решений
ТЗ – транспортная задача

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация, в широком смысле слова, находит применение в науке, технике и в любой другой области человеческой деятельности. Математика дает удобные способы описания разнообразных явлений реального мира и тем самым выполняет в этом смысле функцию языка. Часто в математической модели требуется найти экстремальное значение функции на некотором множестве, то есть решить задачу оптимизации.

Для внедрения методологии оптимального проектирования в практическую деятельность нужны специалисты, которые, с одной стороны, достаточно глубоко разбираются в сущности экономических проблем и способны формализовать возникающие задачи, а с другой – профессионально владеют математическими методами оптимизации.

Теория оптимизации представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, ориентированных на нахождение и идентификацию наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать полного перебора и оценивания возможных вариантов.

Цель учебного пособия – помочь обучающимся освоить современные математические методы оптимизации в соответствии с рабочей программой дисциплины «Методы оптимизации».

В результате изучения дисциплины обучающийся должен овладеть умением формулирования задач оптимального проектирования, выбора и реализации методов их решения.

В учебном пособии представлены и систематизированы сведения теоретического и прикладного характера, изложенные в доступной и удобной форме, с точки зрения самостоятельного изучения и освоения учебной дисциплины.

Учебное пособие обобщает существующие учебники и учебные пособия по дисциплине «Методы оптимизации» и отражает авторскую трактовку содержания дисциплины.

*Степень новизны издани*я данного учебного пособия заключается в систематизации содержания дисциплины, которая имеет разноречивые трактовки в разных источниках.

Учебное пособие включает четыре раздела.

В разделе 1 «Задачи и модели оптимизации» представлены математическая постановка задач оптимизации и классификация методов оптимизации.

В разделе 2 «Линейное программирование» представлены математическая модель линейного программирования, примеры экономических задач, приводящих к задачам линейного программирования, алгоритмы решения задач линейного программирования графическим, симплексным методами, методом искусственного базиса, алгоритм решения транспортных задач.

В разделе 3 «Минимизация функций одной переменной» приведены постановка задачи безусловной оптимизации функции одной переменной, прямые методы и методы с использованием производной.

В разделе 4 «Минимизация функций нескольких переменных» представлены прямые методы безусловной оптимизации функций нескольких переменных, методы с использованием производных.

Дидактический аппарат, представленный в учебном пособии в виде вопросов и заданий для самопроверки по разделам и в целом по дисциплине, позволит закрепить полученные знания.

Библиографический список включает не только библиотечные фонды, но ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», информационных технологий, которые применяются в образовательном процессе и способствуют изучению дисциплины.

РАЗДЕЛ 1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизация – это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при наличии множества альтернативных при определенных условиях. Оптимизационной называется задача определения наилучших структуры или значений параметров объектов.

На практике оказывается, что в большинстве случаев понятие «наилучший» может быть выражено количественными критериями – минимум затрат, минимум времени, максимум прибыли и т.д. Поэтому возможна постановка математических задач отыскания оптимального (optimum – наилучший) результата, так как принципиальных различий в отыскании наименьшего или наибольшего значения нет. Задачи на отыскание оптимального решения называются *задачами оптимизации*.

Математика дает удобные и плодотворные способы описания самых разнообразных явлений реального мира и, тем самым, выполняет в этом смысле функцию языка

Оптимальный результат, как правило, находится не сразу, а в результате процесса, называемого процессом оптимизации. Применяемые в процессе оптимизации методы получили название методов оптимизации.

Для того, чтобы использовать результаты и вычислительные процедуры теории оптимизации на практике, необходимо, прежде всего, сформулировать рассматриваемую задачу на математическом языке, т.е. построить математическую модель объекта оптимизации. Математическая модель – это более или менее полное математическое описание исследуемого процесса или явления.

В большинстве реальных ситуаций дать исчерпывающее математическое представление оптимизируемой системы с учетом всех взаимосвязей ее частей, взаимодействий с внешним миром, всех целей ее функционирования бывает затруднительно или невозможно. Поэтому при построении математической модели необходимо, как правило, выделять и учитывать в дальнейшем только наиболее важные, существенные стороны исследуемого объекта с тем, чтобы было возможным его математическое описание, а также последующее решение поставленной математической задачи. При этом неучтенные в математической модели факторы не должны существенно влиять на окончательный результат оптимизации. Таким образом, математическое моделирование является сложной и ответственной творческой задачей, требующей от исследователя глубоких знаний в соответствующей области, практического опыта, интуиции и критического анализа получаемых результатов.

Для применения теории оптимизации к решению конкретных задачи нужно выполнить определённую последовательность действий, которая называется постановкой задачи оптимизации. Она включает следующие этапы:

1) установление границ подлежащей оптимизации системы. Система – некая изолированная часть внешнего мира. Границы системы задают пределы, отделяющие её от внешнего мира. При этом предполагается, что взаимосвязи с внешним миром зафиксированы. Первоначальный выбор границ системы может оказаться слишком жёстким. Для получения адекватного решения нужно включить в систему дополнительные подсистемы, однако это ведёт к увеличению размерности задачи. Следует стремиться к представлению системы в виде изолированных подсистем, которые можно рассматривать независимо от других;

2) выбор количественного критерия, позволяющего выявить наилучший вариант, называемого характеристическим критерием. Критерии могут быть, в зависимости от конкретной задачи, экономического или технологического характера (минимальная стоимость, максимальная прибыль и т.д.). Независимо от того, какой критерий принят в качестве характеристического, он должен принимать максимальное (или минимальное) значение для наилучшего варианта;

3) определение внутрисистемных переменных, через которые выражается характеристический критерий. Нужно выбрать только те переменные, которые оказывают наибольшее влияние на характеристический критерий;

4) построение модели, которая описывает взаимосвязь внутрисистемных переменных. Модель системы описывает взаимосвязь между переменными и отражает степень влияния этих переменных на характеристический критерий. Модель включает в себя основные уравнения материальных, производственных и других балансов; уравнения, описывающие экономические процессы в системе; неравенства, определяющие области допустимых значений переменных.

Оптимизационная задача включает:

1) множество независимых переменных;
2) модель, отражающую взаимосвязь переменных.

Математическая постановка задачи оптимизации

В общем виде математическую задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом: минимизировать (максимизировать) целевую функцию с учетом ограничений на управляемые переменные.

Под минимизацией (максимизацией) функции n переменных $f(x) = (x_1 ,.., x_n)$ на заданном множестве U n–мерного векторного пространства E_n понимается определение хотя бы одной из точек минимума (максимума) этой функции на множестве U, а также, если это необходимо, и минимального (максимального) на множестве U значения f(x). При записи математических задач оптимизации в общем виде обычно используется следующая символика:

$$\underset{x \in U}{f(x) \to \min (\max)}, \qquad (1.1)$$

где f(x) – целевая функция;

U – допустимое множество, заданное ограничениями на управляемые переменные.

1.2 Классификация методов оптимизации

Математическая теория оптимизации включает в себя фундаментальные результаты и численные методы, позволяющие находить наилучший вариант из множества возможных альтернатив без их полного перебора и сравнения.

Методы оптимизации можно разделить на два класса:

1) методы безусловной оптимизации, когда решение можно искать на всем множестве действительных чисел;

2) методы условной оптимизации, когда на область допустимых решений накладываются определенные ограничения, и формируется так называемая область допустимых решений (далее – ОДР).

В зависимости от размерности допустимого множества методы безусловной оптимизации делятся:

1) на методы одномерной оптимизации;

2) на методы многомерной оптимизации.

Для решения задач безусловной оптимизации используются численные методы поиска экстремума и методы поиска с помощью производных. Их можно разделить на следующие методы:

1) прямые методы, требующие только вычислений целевой функции в точках приближений;

2) методы первого порядка, в которых используются вычисления первых частных производных функции;

3) методы второго порядка, в которых используются вычисления вторых частных производных.

Если ограничения на переменные не накладываются, а целевая функция является непрерывной дифференцируемой функцией, то задача называется классической задачей на экстремум (безусловный экстремум). В основе ее решения лежит теория дифференциального исчисления, в частности, теория экстремумов и опирающиеся на нее методы.

Если в задаче оптимизации имеется система ограничений и требование неотрицательности переменных, то для ее решения используются методы математического программирования.

Методы математического программирования классифицируются в зависимости от вида целевой функции и свойств допустимой области ограничений.

К ним относятся методы:

1) линейного программирования;
2) целочисленного программирования;
3) нелинейного программирования;
4) квадратичного программирования;
5) дробно-линейного программирования;
6) динамического программирования;
7) параметрического программирования;
8) стохастического программирования и другие.

Методы линейного программирования используются для решения оптимизационных задач, в которых целевая функция и ограничения являются линейными функциями.

Для решения задачи линейного программирования (далее – ЗЛП) разрабатываются специфические алгоритмы, основанные на комбинаторике, графах и т.д. Существуют эффективные методы решения ЗЛП: геометрический метод, симплекс-метод и его модификации и другие. Модификации симплекс-метода позволяют существенно сократить время счета, сделать алгоритм нечувствительным к вырожденности опорных планов, повысить размерность решаемых задач, решать так называемые блочные задачи и т.д. Кроме того, существуют способы и приемы, позволяющие расширить область применения методов решения ЗЛП. Например, некоторые нелинейные задачи могут быть преобразованы и решены методами, используемыми для ЗЛП.

Важную роль в классе ЗЛП играют задачи целочисленного программирования, в которых на переменные накладывается условие целочисленности. Это связано с физической неделимостью многих объектов расчета. Простое округление до целых чисел здесь не помогает – план может получиться не оптимальным. Поэтому приходится использовать специальные алгоритмы решения, к наиболее известным из которых относятся алгоритмы Гомори, основанные на так называемой идее отсечения.

Интерес к целочисленному программированию обусловлен еще и тем, что многие нелинейные невыпуклые задачи могут быть сведены к ЗЛП с дополнительным требованием целочисленности. Теория целочисленного программирования используется также для разработки методов решения комбинаторных задач, например, для составления расписаний.

Частным случаем задачи целочисленного программирования являются задачи булевского программирования, где переменные принимают два значения – 0 и 1. Наиболее известные из этих задач – это задача о назначениях (какого работника на какую работу поставить), задача выбора маршрута (задача коммивояжера, задача почтальона) и т.д.

Если в задаче оптимизации целевая функция и ограничения – непрерывно дифференцируемые нелинейные скалярные функции, то имеет место задача нелинейного программирования. Универсального и эффективного метода решения задач нелинейного программирования не существует. Их класс довольно обширен. В нем выделяют отдельные категории задач, имеющих ту или иную специфику, позволяющую строить более эффективные, чем в общем случае, алгоритмы. В качестве примеров задачи нелинейного программирования можно привести квадратичные, дробно-линейные задачи и др.

В задаче квадратичного программирования целевая функция представляет собой полином второй степени, а система ограничений линейна.

В задаче дробно-линейного программирования целевая функция представляет собой дробно-линейную функцию, а система ограничений линейна.

В некоторых случаях исходные параметры задачи могут изменяться в некоторых пределах, для их решения применяется параметрическое программирование.

Многие задачи описываются математическими моделями дискретного программирования. Дискретное программирование – это раздел математического программирования, в котором на экстремальные задачи налагается условие дискретности переменных при конечной области допустимых значений. Если вводим ограничение, что часть или все переменные – целые числа, то приходим к задачам целочисленного программирования, которые являются частным случаем дискретного программирования.

Задачи геометрического программирования – задачи наиболее плотного расположения некоторых объектов в заданной двумерной или трехмерной области. Такие задачи встречаются в задачах раскроя материала для производства каких-то изделий и т.п. Имеющиеся здесь алгоритмы в основном ориентированы на сокращение перебора вариантов с поиском локальных минимумов.

В задаче стохастического линейного программирования коэффициенты целевой функции, коэффициенты в матрице коэффициентов, коэффициенты ограничений – являются случайными величинами. В этом случае сама целевая функция становится случайной величиной, и ограничения типа неравенств могут выполняться лишь с некоторой вероятностью. Приходится менять постановку самих задач с учетом этих эффектов и разрабатывать совершенно новые методы их решения.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте понятие оптимизационной задачи.
2. Приведите понятие математической модели.
3. Охарактеризуйте этапы постановки задачи оптимизации.
4. Приведите математическую постановку задач оптимизации.
5. Представьте классификацию методов безусловной оптимизации.
6. Представьте классификацию методов условной оптимизации.
7. Какие существуют методы математического программирования?
8. Дайте понятие линейного программирования.
9. Представьте классификацию методов линейного программирования.
10. Охарактеризуйте сущность целочисленного и булевского программирования.
11. Дайте понятие нелинейного программирования.
12. Охарактеризуйте сущность квадратичного и дробно-линейного программирования.
13. Дайте понятие дискретного программирования.
14. Какова сущность геометрического программирования?
15. Дайте понятие стохастического программирования.

РАЗДЕЛ 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1 Математическая модель линейного программирования

Линейное программирование позволяет найти экстремальные (наибольшие и наименьшие) значения линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Эта линейная функция называется целевой, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются системой ограничений.

Решение задачи линейного программирования заключается в выборе наилучшего (оптимального) варианта из множества возможных по какому-либо признаку – критерию оптимальности.

Признаки оптимизационной модели:

1) наличие признака оптимальности (специального показателя выгодности или критерия оптимальности), который называется целевой функцией. Типичные критерии оптимальности: максимум дохода, прибыли, валовой продукт, производительность, эффективность. В таких случаях выгодно, чтобы показатель оптимальности был для выбранного варианта решения максимальным. Другая группа критериев – это минимум издержек, себестоимости, капиталовложений, трудоемкости, то есть в этих случаях критерий должен быть минимальным;

2) наличие системы ограничений, то есть условий, которые описывают множество возможных вариантов (решений), из которых выбирается оптимальный. Множество возможных решений всегда ограничено (ресурсами сырья, наличием рабочей силы, количеством и качеством оборудования и т.п.). По-

этому каждое из рассматриваемых решений должно быть допустимым, т.е. удовлетворять имеющимся ограничениям.

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Дана система m линейных уравнений и неравенств с n переменными (система ограничений):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

или система ограничений в краткой записи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, k}); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}). \end{cases} \tag{2.2}$$

Также задана линейная целевая функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \ ,$$

где i – номер ограничения;

m – количество ограничений;

j – номер переменной;

n – количество переменных;

x_j – размер переменной j;

a_{ij} – коэффициенты при переменных x_j;

b_i – объемы правых частей ограничений;

c_j – целевой функции F.

Необходимо найти такое решение (множество значений переменных) $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы ограничений, при котором линейная функция F принимает максимальное (или минимальное) значение: $F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$.

В общем случае задача может иметь бесконечное множество решений. Решение $\overline{X} = (x_1, ..., x_n)$, которое удовлетворяет ограничениям, называют планом. Если все компоненты $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$), то решение (план) $\overline{X}$ называют допустимым решением (опорным планом). Множество опорных планов образует область допустимых решений.

Решение $\overline{X^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, которое удовлетворяет всем ограничениям, условию неотрицательности всех переменных ($x_j \geq 0$) и при этом дает max (min) целевой функции F, называется оптимальным решением (оптимальным планом).

Примеры экономических задач, приводящих к задачам линейного программирования

Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии (задача об оптимальном ассортименте)

Предположим, что предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуются m различных видов ресурсов (сырья, вспомогательных материалов, рабочего и машинного времени). Эти ресурсы ограничены и составляют в планируемый период $b_1, b_2, …, b_m$ условных единиц. Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства изделия j-го вида ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Пусть прибыль, получаемая предприятием при реализации единицы изделия j-го вида, равна c_j. В планируемый период все показатели a_{ij}, b_i, c_j предполагаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей. Другими словами требуется составить оптимальный план работы предприятия $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. найти такие значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (объем выпуска продукции каждого вида), чтобы обеспечить предприятию получение максимальной прибыли от реализации всей продукции и чтобы на ее производство хватило имеющихся в распоряжении ресурсов.

Экономико-математическая модель задачи:

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2.3)$$

$$x_j \ge 0; \ j = \overline{1,n}.$$

Целевая функция представляет собой суммарную прибыль от реализации объема выпускаемой продукции всех видов. В данной модели оптимизация плана возможна за счет выбора наиболее выгодных видов продукции.

Ограничения означают, что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство всех видов продукции не превосходит его запасы.

При составлении плана производства приходится учитывать не только ограниченность ресурсов, но и директивные задания по выпуску продукции T_j (госзаказы или уже заключенные договоры по отдельным видам продукции). В таком случае модель дополнится ограничением вида $x_j \ge T_j$.

Задача о смесях (рационе, диете)

К группе задач о смесях относят задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Получаемые смеси должны иметь в своем составе n различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями m исходных материалов.

Введем следующие обозначения:

x_j – количество материала j-го вида, входящего в смесь;

c_j – цена материала j-го вида;

b_i – минимально необходимое содержание i-го компонента в смеси.

Коэффициенты a_{ij} показывают удельный вес j-го компонента в единице j-го материала.

Экономико-математическая модель задачи:

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i , \quad i = \overline{1, m} ; \tag{2.4}$$

$$x_j \geq 0; \; j = \overline{1, n} .$$

Целевая функция представляет собой суммарную стоимость смеси. Функциональные ограничения являются ограничениями по содержанию компонентов в смеси: смесь должна содержать компоненты в объемах, не менее указанных.

Задача о раскрое материалов

Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.

Задача о размещении заказа

Речь идет о задаче распределения заказа (загрузки взаимозаменяемых групп оборудования) между предприятиями (цехами, станками, исполнителями) с различными производственными и технологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказа. Требуется составить план размещения заказа (загрузки оборудования), при котором с имеющимися производственными возможностями заказ был бы выполнен, а показатель эффективности достигал экстремального значения.

Транспортная задача

Модель транспортной задачи позволяет разработать оптимальный маршрут перевозки однородного продукта от производителей к потребителям; при этом имеется баланс между суммарным спросом потребителей и возможностями поставщиков по их удовлетворению. Причем потребителям безразлично, из каких пунктов производства будет поступать продукция, лишь бы их заявки были полностью удовлетворены. Так как от схемы прикрепления потребителей к поставщикам существенно зависит объем транспортной работы, возникает задача о наиболее рациональном прикреплении, правильном направлении перевозок грузов, при котором потребности полностью удовлетворяются, вся продукция от поставщиков вывозится, а затраты на транспортировку минимальны.

2.2 Графический метод решения задачи линейного программирования

Наиболее простым и наглядным методом решения задач линейного программирования является графический метод. Он применяется для решения задач линейного программирования с двумя переменными, заданными в неканонической форме, и многими переменными в канонической форме при условии, что они содержат не более двух свободных переменных.

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на котором достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Рассмотрим постановку задачи линейного программирования на примере задачи определения оптимального плана производства продукции.

Предприятие планирует выпуск двух видов продукции I и II. На их производство расходуется три вида сырья A, B, C, объемы которых ограничены складскими запасами.

Потребности сырья для производства единицы каждого j-го вида продукции a_{ij} называются ресурсными коэффициентами (нормами расхода сырья для производства продукции).

Потребность a_{ij} на каждую единицу j-го вида продукции (j= 1, 2) i-го вида сырья (i = 1, 2, 3), запас b_i соответствующего вида сырья и прибыль c_j от реализации единицы j-го вида продукции (c_j – единичная прибыль, целевые коэффициенты) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Нормативы затрат, объемы сырья и прибыль

Виды сырья, i	Виды продукции, j		Запасы сырья, b_i (кг)
	I	II	
	ресурсные коэффициенты a_{ij} (кг)		
A	$a_{11} = 13$	$a_{12} = 24$	$b_1 = 312$
B	$a_{21} = 32$	$a_{22} = 32$	$b_2 = 480$
C	$a_{31} = 58$	$a_{32} = 29$	$b_3 = 696$
Единичная прибыль, c_j (д.ед.)	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	
План (ед.)	x_1	x_2	

Требуется составить оптимальный план производства продукции I и II видов $\overline{X}^* = (x_1^*; x_2^*)$, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов. Кроме того, заранее планируется произвести продукции обоих видов в количестве не менее 10 единиц.

Для построения математической модели обозначим через неизвестную x_1 – количество изделий I вида, x_2 – количество изделий II вида, которое необходимо производить.

В условии задачи сформулированы ограничения на запасы каждого вида сырья. Потребление ресурсов по каждому виду (А, В, С) не превзойдет имеющихся запасов b_i. Запишем эти ограничения в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 13x_1 + 24x_2 \le 312 \\ 32x_1 + 32x_2 \le 480 \\ 58x_1 + 29x_2 \le 696 \\ x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Например, величина $13x_1$ в первом неравенстве – это количество сырья А, необходимое для производства продукции I вида в количестве x_1 изделий. Четвертое неравенство ($x_1 + x_2 \ge 10$) представляет собой условие на ограничение производимого количества продукции обоих видов.

Составим целевую функцию общей прибыли, получаемой от реализации всей произведенной продукции: $F(\overline{X}) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$. Здесь $4x_1$ – прибыль от продажи x_1 единиц продукции Iвида, д. ед., $3x_2$ – прибыль от продажи x_2 единиц продукции II вида, д. ед..

Геометрический метод решения задачи линейного программирования является самым простым и используется в случае, если задача содержит не более двух переменных или может быть сведена к таковой.

Каждое из неравенств системы ограничений геометрически определяет полуплоскость допустимых значений переменных с граничными прямыми.

Алгоритм геометрического метода:

1) в системе ограничений знаки неравенств заменяются на знаки точных равенств и по полученным уравнениям строятся прямые на плоскости x_1Ox_2;

2) определяются полуплоскости – области решения неравенств, и строится многоугольник решений, который получается в результате пересечения полуплоскостей и является ОДР. Стороны этого многоугольника являются прямыми уравнений системы ограничений;

3) из точки (0; 0) строится вектор $\overline{N}(c_1, c_2)$, направление которого определяет направление возрастания целевой функции $F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2$;

4) строится начальная прямая (линия уровня) целевой функции $F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, которую передвигают в направлении вектора $\overline{N}$ до крайней угловой точки многоугольника решений. В этой точке целевая функция принимает *max* значение;

5) определяются координаты точки максимума целевой функции (x_1^*, x_2^*) как точки пересечения соответствующих прямых и вычисляется значение целевой функции в этой точке $F_{\max}(x_1^*, x_2^*)$.

В нашем случае для задачи определения оптимального плана производства система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 13x_1 + 24x_2 = 312 \\ 32x_1 + 32x_2 = 480 \\ 58x_1 + 29x_2 = 696 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x_1 + 24x_2 = 312 & (1) \\ x_1 + x_2 = 15 & (2) \\ 2x_1 + x_2 = 24 & (3) \\ x_1 + x_2 = 10 & (4) \\ x_1 = 0 & (5) \\ x_2 = 0 & (6) \end{cases}$$

Построим по полученным уравнениям прямые и пронумеруем их (рисунок 1).

ОДР будет выпуклый многоугольник ABCDEF, каждая вершина которого является опорным планом.

Из точки (0; 0) построим вектор $\overline{N}(c_1, c_2) = \overline{N}(4, 5)$. Начальная линия уровня будет иметь вид:

$F(\overline{X}) = 4x_1 + 3x_2 = 0$. Перемещая линию уровня вдоль вектора $\overline{N}$, получим, что функция Fпринимаетmax значение в точке D – самой крайней справа вершине многоугольника ОДР. Точка D является точкой пересечения прямых (2) и (3).

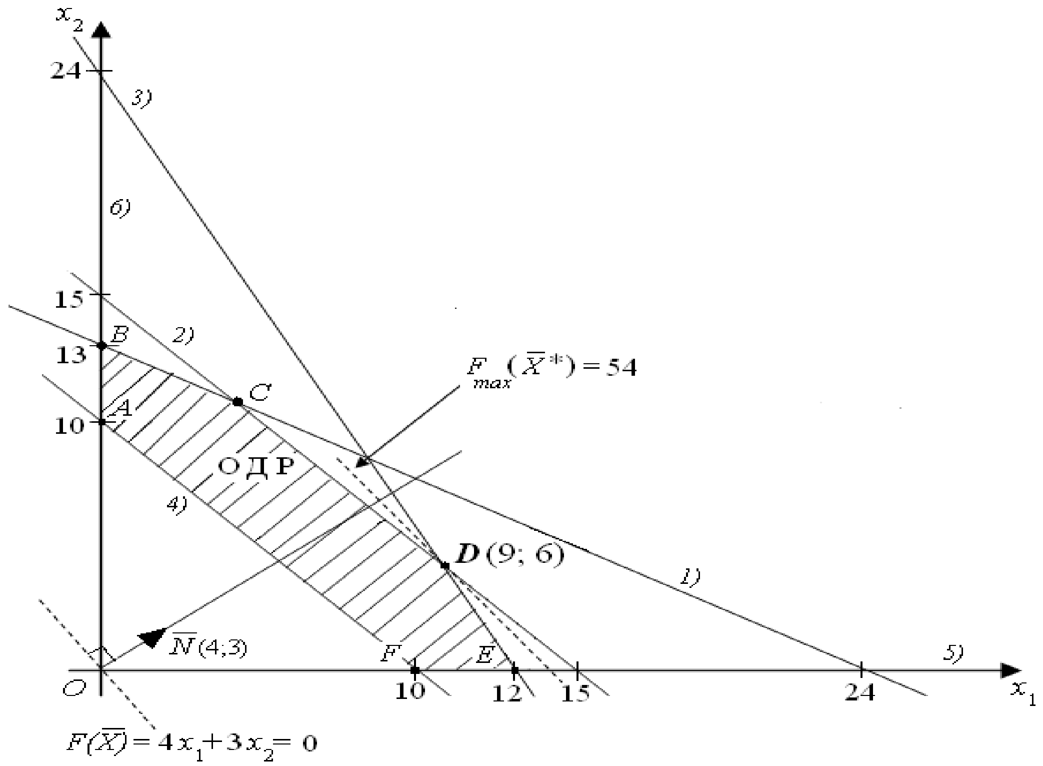

Рисунок 1. Иллюстрация графического метода решения задачи линейного программирования

Находим координаты точки D, решая систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = 24 \end{cases}.$$

Решением системы будут значения $x_1 = 9$, $x_2 = 6$, то есть D(9; 6).

Таким образом, решением задачи будет оптимальный план $\overline{X}^* = (9; 6)$, дающий максимальное значение функции $F_{\max}(\overline{X}^*) = 4x9 + 3x6 = 54$ д.ед.. Максимальная прибыль 54 д.ед.

достигается при изготовлении 9 единиц изделий I вида и 6 единиц изделий II вида.

В данной задаче ОДР является выпуклый многоугольник. Однако возможны и следующие случаи:

1) ОДР – пустое множество. В этом случае задача линейного программирования не имеет решения из-за несовместности системы ограничений;

2) ОДР – единственная точка, которая и будет единственным и оптимальным решением;

3) ОДР – выпуклая неограниченная область. В задаче на max оптимальное решение не существует, если целевая функция не ограничена сверху ($F_{max} = \infty$). В задаче на min оптимальное решение не существует, если целевая функция не ограничена снизу ($F_{min} = -\infty$);

4) может оказаться, что линия уровня целевой функции совпадает с одной из сторон многоугольника ОДР (экстремум целевой функции достигается на всем отрезке между двумя соседними вершинами ОДР). Тогда имеет место альтернативный оптимум: $\overline{X}^* = t\overline{X}_1^* + (1-t)\overline{X}_2^*$, где $t \in [0;1]$ – параметр.

Например, пусть линия уровня функции $F(x_1,x_2) = 2x_1+x_2$ совпадает с границей ОДР – отрезком, координаты вершин которого равны (0; 4) и (2; 0). Тогда решением задачи на min будут два оптимальных решения $\overline{X}_1^* = (2;0)$, $\overline{X}_2^* = (0;4)$. При этом $\overline{X}^* = t(2;0) + (1-t)(0;4)$; $F_{\min}\left(\overline{X}^*\right) = 4$.

2.3 Симплексный метод решения задач линейного программирования

Одним из наиболее распространенных (универсальных) методов решения задач линейного программирования является симплексный метод (табличный).

Геометрическая интерпретация задач линейного программирования большей размерности ($n \geq 2$) аналогична. Ограничения определяют допустимое множество, являющееся пересечением конечного числа полупространств и гиперплоскостей, которое называют многогранным множеством. Оно выпукло и замкнуто. В частности, оно может оказаться пустым или неограниченным. Многогранное множество имеет не более чем конечное число вершин. Точка многогранного множества называется вершиной, если она не лежит внутри ни одного из отрезков, целиком принадлежащих данному множеству. Поверхностями уровня в n-мерном случае являются гиперплоскости, ортогональные градиенту. Если допустимое множество имеет вершины, то среди точек минимума (максимума) линейной функции всегда будет по крайней мере одна из вершин. Здесь предполагается, что точки минимума (максимума) существуют.

На основе этого утверждения можно предположить следующий способ решения задач линейного программирования, множество ограничений которых имеет вершины: сначала определить все вершины допустимого многогранного множества (это осуществимо, так как количество вершин конечно), а затем среди найденных вершин выбрать ту, в которой целевая функция принимает наименьшее (наибольшее) значение. Таким образом, задача линейного программирования будет решена за конечный промежуток времени. Предложенный метод не вызывает принципиальных возражений, однако количество вершин в реальных задачах оказывается слишком большим и перебор может потребовать большого времени.

В излагаемом ниже симплексном методе для нахождения оптимальной вершины также производится перебор вершин многогранного множества, но этот перебор осуществляется целенаправленно, что позволяет исключить из рассмотрения значительное количество вершин, заведомо не являющихся оптимальными.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) заключается в том, что, начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение. Опорным решением называется базисное неотрицательное решение.

Для решения задачи линейного программирования *симплекс-методом* ее приводят к каноническому виду, т.е. из ограничений – неравенств надо сделать ограничения – равенства. Для этого в каждое ограничение вводится дополнительная неотрицательная балансовая переменная со знаком «+», если знак неравенства «≤», и со знаком «–», если знак неравенства «≥».

В целевой функции эти дополнительные переменные входят с нулевыми коэффициентами, т.е. запись целевой функции не изменится.

Если ограничения задачи отображают наличие и расход ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в канонической форме, равно объему неиспользованного ресурса.

Алгоритм симплексного метода:

I. Построим первый опорный план, базис в котором полностью заполнен и свободные члены неотрицательны. Для базисных переменных заполним единичные столбцы: на пересечении одинаковых переменных по столбцу и строке ставится

1, остальные элементы столбца заполняются нулями;

II. Проверим план на оптимальность. План будет оптимальным, если в строке целевой функции Z не будет отрицательных коэффициентов (в задачах на max, в задачах на min – положительных). Если в строке Z есть отрицательные коэффициенты, то план можно улучшить, построив новый план;

III. Построим новый план.

1. Выберем разрешающий столбец. Им будет столбец с максимальным по модулю отрицательным коэффициентом в строке целевой функции Z;

2. Выберем разрешающую строку. Ей будет строка с минимальным симплексным отношением. Симплексные отношения рассчитываются делением свободных членов (b_i) на положительные коэффициенты разрешающего столбца (a_{ij*});

3. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки выделим разрешающий элемент;

4. В базис новой таблицы вместо X разрешающей строки старой таблицы вводим X разрешающего столбца. Остальные переменные базиса переписываем из старой таблицы без изменений;

5. Строка с новым X в новой таблице называется начальной и рассчитывается делением коэффициентов разрешающей строки старой таблицы на разрешающий элемент;

6. Для базисных переменных заполним единичные столбцы;

7. Остальные элементы новой таблицы рассчитываются по правилу «прямоугольного треугольника»: элемент в новой таблице равен разности между соответствующим элементом в старой таблице и произведением соответствующего элемента разрешающего столбца на соответствующий элемент начальной строки.

IV. Идти к II.

Пример решения задачи линейного программирования симплексным методом

Механический завод выпускает продукцию видов А, Б и В. Общий выпуск продукции не должен превышать 2000 ед. На производство продукции расходуются ресурсы двух видов. Объем первого вида ресурса составляет 15000 ед., второго – 20000 ед.

В таблице 2 представлены нормативы затрат ресурсов и прибыль от продажи единицы продукции.

Таблица 2

Исходные данные для решения задачи ЗЛП

Затраты ресурсов на 1 продукции, ед.						Прибыль от продажи 1 продукции, д.ед.		
Ресурс 1			Ресурс 2					
А	Б	В	А	Б	В	А	Б	В
5	4	1	3	2	1	80	40	50

Определить оптимальную производственную программу предприятия, которая приносила бы максимум прибыли.

Решение

Обозначение переменных:

x_1 – выпуск продукции А, ед.;

x_2 – выпуск продукции Б, ед.;

x_3 – выпуск продукции В, ед.

Система ограничений:

1) ограничение по общему выпуску продукции, ед.

$x_1 + x_2 + x_3 \le 2000$;

2) ограничения по использованию 1-го ресурса, ед.

$5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 15000$;

3) ограничения по использованию 2-го ресурса,ед.

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 20000$.

Целевая функция (максимум прибыли, д.ед.)

$Z = 80x_1 + 40x_2 + 50x_3 \to max$.

Приведем к канонической форме модели: неравенства преобразуем в уравнения, добавив в левую часть дополнительные переменные x_4, x_5, x_6:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2000$;

2) $5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15000$;

3) $3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20000$,

где x_4 – недостижение выпуска продукции до заданной границы, ед.;

x_5 – остаток 1 ресурса, ед.;

x_6 – остаток 2 ресурса, ед.

Имеем систему из 3-х уравнений и 6-ти переменных. Решением является значение трех переменных, а остальные три приравниваются к 0:

$x_4 = 2000 – (x_1 + x_2 + x_3)$;

$x_5 = 15000 – (5x_1 + 4x_2 + x_3)$;

$x_6 = 20000 – (3x_1 + 2x_2 + x_3)$;

$Z = 0 – (– 80x_1 –40x_2 – 50x_3)$.

Полученный план перенесем в симплексную таблицу и проверим на оптимальность (таблица 3).

Таблица 3

Симплексная таблица

Базисные перемен-ные	Свобод-ные члены (b_i)	Основные пере-менные			Дополнительные переменные			Симплексные отношения (b_i/a_{ij}*)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	2000	1	1	1	1	0	0	2000:1=2000
x_5	15000	5	4	1	0	1	0	15000:5=3000
x_6	20000	3	2	1	0	0	1	20000:3=6667
Z	0	-80*	-40	-50	0	0	0	
x_1	2000	1	1	1	1	0	0	начальная
x_5	5000	0	-1	-4	-5	1	0	
x_6	14000	0	-1	-2	-3	0	1	
Z	160000	0	40	30	80	0	0	

Ответ

План оптимален, т.к. в строке целевой функции Z нет отрицательных коэффициентов.

Предприятию выгодно выпускать продукцию А в количестве 2000 ед. Продукцию Б и В выпускать не выгодно, т.к. $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Выпуск продукции соответствует максимально возможному объему выпуска ($x_4 = 0$).

Остаток 1-го ресурса составляет 5000 ед. ($x_5 = 5000$ ед.).

Остаток 2-го ресурса составляет 14000 ед. ($x_6 = 14000$ ед.). При выполнении данного оптимального плана прибыль будет максимальной и составит 160000 д. ед.

Проверка

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2000$

$2000 + 0 + 0 + 0 = 2000$

$2000 = 2000$

2) $5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15000$

$5\times2000 + 4\times0 + 1\times0 + 1\times5000 = 15000$

$10000 + 0 + 0 + 5000 = 15000$

$15000 = 15000$

3) $3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20000$

$3\times2000 + 2\times0 + 1\times0 + 1\times14000 = 20000$

$6000 + 0 + 0 + 14000 = 20000$

$20000 = 20000$

$Z = 80x_1 + 40x_2 + 50x_3 = 80\times2000 + 40\times0 + 50\times0 == 160000 + 0 + 0 = 160000.$

2.4 Метод искусственного базиса (М-метод)

Метод искусственного базиса (М-метод) используется для нахождения допустимого базисного решения задачи линейного программирования, когда в условии присутствуют ограничения типа равенств или неравенств типа $\geq$. В ограничения и в функцию цели вводят так называемые «искусственные переменные» Y_j.

При введении искусственных переменных в методе искусственного базиса в функцию цели им приписывается достаточно большой коэффициент М, который имеет смысл штрафа за введение искусственных переменных. В случае минимизации искусственные переменные прибавляются к функции цели с коэффициентом М. Введение искусственных переменных допустимо в том случае, если в процессе решения задачи они последовательно обращаются в нуль.

Симплекс-таблица, которая составляется в процессе решения, используя метод искусственного базиса, называется расширенной**.** Она отличается от обычной тем, что содержит две строки для функции цели: одна – для составляющей $Z = \sum c_i x_i$, другая – для составляющей $F = M\sum Y_j$.

Данная задача решается с помощью симплексного метода линейного программирования при некоторых дополнительных построениях.

Неизвестные задачи обозначаются через x_j, все условия выражаются в виде линейных ограничений и записывается целевая функция Z. Затем выполняются следующие преобразования:

1) все неравенства приводятся к равенствам. Для этого в левую часть ограничений типа «$\leq$» вводятся дополнительные переменные с коэффициентами «+1», а типа «$\geq$» – коэффициентами «-1». В целевую функцию дополнительные переменные вводят с нулевой оценкой. При этом необходимо пояснить экономический смысл дополнительных переменных;

2) в левую часть ограничений, в которых нет дополнительных переменных с коэффициентом «+1», вводятся искусственные переменные y_j с коэффициентами «+1». В целевую функцию искусственные переменные вводятся с очень большой положительной оценкой «М», если задача решается на минимум, и с «-М» – при решении на максимум;

3) все ограничения разрешаются относительно дополнительных или искусственных переменных с коэффициентами «+1». Соответствующим образом преобразуется целевая функция. При этом она для удобства записывается двумя строками. В первую целевую строку Z записываются оценки при основных и дополнительных переменных с обратным знаком. Во вторую целевую строку F записываются оценки, полученные путем умножения уравнений, содержащих искусственные переменные, на оценки «М» или «-М» в зависимости от решения задачи, соответственно, на минимум или максимум, и последующим их суммированием.

После этого заполняется первая симплексная таблица, в нее записывается первый опорный план, который, как правило, не является оптимальным. Затем с помощью алгоритма симплексного метода производится улучшение первого опорного плана и заполняется новая симплексная таблица.

Алгоритм М-метода (решение задачи на минимум в сокращенных симплексных таблицах):

1. Выбирается разрешающий столбец j* по максимальной положительной (при решении на максимум – максимальной по абсолютной величине отрицательной) оценке в строке F. Если в строке F нет положительных (при решении на максимум – отрицательных) оценок, то столбец выбирается аналогично по оценкам строки Z, исключая столбцы, в которых в строке F стоят отрицательные (при решении на максимум – положительные) оценки. План считается оптимальным, если нельзя найти разрешающий столбец;

2. Выбирается разрешающая строка i* по минимальному частному от деления элементов столбца свободных членов b_i на положительные элементы разрешающего столбца a_{ij*}. Если в разрешающем столбце нет положительных элементов, то задача не имеет решения. На пересечении разрешающего

столбца и разрешающей строки стоит разрешающий элемент;

3. Заполняется новая таблица.

3.1 Переменная, стоящая в разрешающей строке, выводится из базиса, а переменная, стоящая в разрешающем столбце, вводится в базис, то есть данные переменные меняются местами. Остальные переменные остаются на своих местах;

3.2 Вместо разрешающего элемента записывается его обратная величина:

$$a_{i^*j^*} = 1/\,a_{ij}; \tag{2.5}$$

3.3 Заполняется начальная строка новой таблицы, стоящая на месте разрешающей. Для этого элементы разрешающей строки (кроме разрешающего элемента) делятся на разрешающий элемент:

$$a_{i^*j^*} = a_{i^*j}/a_{i^*j^*}; \tag{2.6}$$

3.4 Заполняется столбец новой таблицы, стоящий на месте разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента) делятся на разрешающий элемент, взятый с обратным знаком:

$$a_{ij^*} = a_{ij^*}/{-a_{i^*j^*}}; \tag{2.7}$$

(столбец можно не заполнять, если в нем стоит искусственная переменная);

3.5 Остальные элементы новой таблицы рассчитываются по формуле:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ij^*}\, a_{i^*j}; \tag{2.8}$$

4. Идти к п.1.

После получения оптимального плана производится анализ и проверка решения. Проверка осуществляется путем подстановки значений базисных переменных в исходную систему ограничений.

2.5 ДВОЙСТВЕННОСТЬ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Задачу линейного программирования можно определенным образом сопоставить с другой задачей линейного программирования, называемой двойственной. Первоначальная задача является исходной. Эти две задачи тесно связаны между собой и образуют единую двойственную пару.

Если в исходной задаче ищется $F(\overline{X}) \to \max$, определяются значения n переменных x_1, x_2, …, x_n и используется m ограничений, то в двойственной задаче находятся $Z(\overline{Y}) \to \min$, значения m переменных y_1, y_2, …, y_m и используется n ограничений.

Правила составления двойственной задачи:

1) число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче, т.е. в нашем случае m = 3: y_1, y_2, y_3;

2) матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений исходной задачи путем ее транспонирования;

3) знаки «≤» в системе ограничений заменяются на противоположные «≥»;

4) свободными членами двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции исходной задачи, и наоборот, коэффициенты целевой функции двойственной задачи являются свободными членами в системе ограничений исходной задачи;

5) на каждую переменную двойственной задачи накладывается условие неотрицательности.

Необходимо найти такой набор теневых цен (оценок) ресурсов $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, при котором общие затраты на сырье Z будут минимальными (min) при условии, что выручка от продажи сырья А, В, С, используемого при производстве единицы продукции I и II видов, будет не менее единичной прибыли (прибыли от реализации единицы продукции).

Искомыми переменными являются y_1, y_2, y_3 – теневые (внутренние) цены на сырье. Теневая цена выражает величину изменения целевой функции F (прибыли) при изменении имеющегося объема сырья данного вида (т.е. в исходной задаче – правой части неравенства) на единицу при условии, что все остальные переменные не изменяются. Теневая цена имеет и другие названия: условная, скрытая, неявная. Смысл этих названий в том, что это условные, ненастоящие цены, которые определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их называют оценками.

Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем значения целевой функции в исходной и двойственных задачах равны. При этом оптимальное решение одной из пары задач находится по решению другой.

Экономико-математический анализ задач с использованием теории двойственности

Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение ее целевой функции.

В задаче оптимизации использования сырья при изменении i-го ресурса оптимальный доход является линейной функцией от его приращения, причем коэффициентом служит y_i – i-я компонента оптимального решения двойственной задачи.

Если $y_i = 0$, то при увеличении i-го ресурса оптимальный доход остается неизменным и ценность этого ресурса равна нулю. Сырье, запасы которого превышают потребности в нем, не представляет ценности для производства и его оценку можно принять за нуль.

Если y_i велико, то незначительному увеличению i-го ресурса будет соответствовать существенное увеличение оптимального дохода и ценность ресурса высока. Уменьшение ресурса ведет к существенному сокращению выпуска продукции.

Переменную y_i считают некоторой характеристикой ценности i-го ресурса. В частности, при увеличении i-го ресурса на единицу ($\Delta b_i = 1$) оптимальный доход возрастает на y_i, что позволяет рассматривать y_i как «условную цену», оценку единицы i-го ресурса, объективно обусловленную оценку.

Другими словами, двойственная оценка – это оценка единицы измерения ограничения (эффект от единицы ресурса, избыточность единицы продукта или вида деятельности).

При решении задачи в симплексных таблицах двойственные оценки находятся в строке целевой функции последней симплексной таблицы прямой задачи.

Если двойственная оценка основной переменной равна нулю, то переменная вошла в оптимальное решение, в противном случае переменная не выгодна и не вошла в оптимальное решение. Если ввести в оптимальное решение единицу такой переменной, то ресурсы отвлекутся от выгодных переменных и значение целевой функции уменьшится на величину соответствующей двойственной оценки.

Если двойственная оценка основной переменной отлична от нуля, то переменная не вошла в оптимальное решение, соответствующий вид деятельности невыгоден. Величина двойственной оценки показывает, на сколько ухудшится целевая функция (в задачах на максимум – уменьшится, в задачах на минимум – увеличится) при введении данной переменной в план.

Двойственные оценки ограничений типа «$\leq$»

Они находятся в симплексной таблице в строке целевой функции в столбцах, соответствующих дополнительным переменным.

Если двойственная оценка равна нулю, то дополнительная переменная этого ограничения вошла в оптимальное решение, т.е. имеется недоиспользование ресурсов или недостижение (недобор) до максимальной границы. Изменение объема правой части ограничения в незначительных пределах не повлечет изменения величины целевой функции.

Если двойственная оценка ограничения отлична от нуля, то в оптимальном плане ресурс истрачен полностью, он является дефицитным. Дополнительная переменная такого ограничения (недоиспользованный ресурс) не войдет в оптимальное решение. Если правую часть такого ограничения увеличить (уменьшить) на единицу, то значение целевой функции улучшится (ухудшится) на величину соответствующей двойственной оценки.

Двойственные оценки ограничений типа «$\geq$»

Если двойственная оценка ограничения равна нулю, то ограничение выгодно (продукт выгоден).

Изменение правой части этого ограничения в некоторых пределах не повлечет изменения целевой функции.

Если двойственная оценка ограничения отлична от нуля, дополнительная переменная в оптимальное решение не вошла, т.е. ограничение не выгодное.

Увеличение (уменьшение) правой части такого ограничения (увеличение плана по производству продукции) на единицу повлечет ухудшение (улучшение) целевой функции на величину соответствующей двойственной оценки.

Анализ устойчивости оптимального плана

Часто получения оптимального решения задачи оказывается недостаточно. Например, пользователя может интересовать, насколько чувствительным является полученное оптимальное решение к изменению различных параметров исходной модели.

При исследовании результатов решения оптимизационных задач используются следующие правила:

– если результирующие значения оптимизируемых переменных находятся внутри интервала их ограничений, они всегда имеют равный нулю показатель нормированной стоимости;

– при решении задач максимизации переменные, оптимальные значения которых совпадают с нижней границей интервала ограничений (x_1^*, x_2^*), имеют отрицательную или равную нулю нормированную стоимость;

– переменные, оптимальные значения которых совпадают с верхней границей интервала ограничений, имеют положительную или равную нулю нормированную стоимость;

– при решении задач минимизации предыдущие закономерности действуют наоборот;

– теневые цены ресурсов определяют прирост (в задаче минимизации – сокращение) целевой функции при увеличении (в задаче минимизации – при уменьшении) на единицу имеющегося объема дефицитных ресурсов;

– недефицитные ресурсы имеют нулевую теневую цену;

– виды продукции, имеющие отрицательную нормированную стоимость, являются неэффективными для производства.

После того, как оптимальное решение получено, выявляется его чувствительность к определенным изменениям исходной модели. В связи с этим требуется:

1) проанализировать, увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно;

2) рассчитать, на сколько можно увеличить запас ресурсов для улучшения полученного оптимального значения целевой функции;

3) определить, каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения;

4) выявить целесообразность включения в план новых изделий.

Чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости, в котором оптимальный план двойственной задачи не менялся бы.

Например, максимальная величина основной небазисной переменной, которую можно ввести в оптимальное решение, равна минимальному отношению свободных членов к соответствующим положительным коэффициентам столбца этой небазисной переменной:

$$\Delta x_j^{(+)} = \min a_{ij}>0 \ \{x_i/a_{ij}\}. \qquad (2.9)$$

При этом значения базисных переменных будут увеличиваться на соответствующие отрицательные коэффициенты, взятые по модулю, и уменьшаться на соответствующие положительные коэффициенты столбца той переменной, которую вводим в решение.

Максимальная величина, на которую можно увеличить правую часть ограничения, равно максимальному отношению свободных членов к соответствующим отрицательным коэффициентам столбца дополнительной переменной этого ограничения, взятому по модулю:

$$\Delta b_i^{(+)} = \max a_{ij}<0 \ \{|x_i/a_{ij}|\}. \qquad (2.10)$$

Сделаем анализ оптимального плана в задаче, решенной выше симплексным методом:

1) предприятию выгодно выпускать продукцию А в количестве 2000 ед. ($x_1 = 2000$). Двойственная оценка равна 0, т.к. переменные базисные, вошли в оптимальный план (двойственные оценки находятся в строке Z симплексной таблицы с оптимальным планом);

2) продукцию Б выпускать не выгодно, т.к. $x_2 = 0$. Двойственная оценка показывает, при включении в план 1 ед. этой продукции прибыль завода уменьшится на 40 д.ед.;

3) продукцию В выпускать не выгодно, т.к. $x_3 = 0$. Двойственная оценка показывает, при включении в план 1 ед. этой продукции прибыль завода уменьшится на 30 д.ед.;

4) $x_4 = 0$, следовательно, выпуск продукции соответствует максимально возможному объему выпуска. Двойственная оценка показывает, что при увеличении объема возможного выпуска продукции прибыль завода может увеличиться на 80 д.ед.;

5) $x_5 = 5000$ ед. – остаток 1-го ресурса. Двойственная оценка равна 0, т.к. переменная x_5 вошла в оптимальный план;

6) $x_6 = 14000$ ед. – остаток 2-го ресурса. Двойственная оценка равна 0, т.к. переменная x_6 вошла в оптимальный план.

2.6 Транспортная задача

Многие прикладные модели в экономике сводятся к задачам линейного программирования. Практически все задачи линейного программирования можно решить, используя ту или иную модификацию симплексного метода. Однако существуют более эффективные вычислительные процедуры решения некоторых типов ЗЛП, основанные на специфике ограничений этих задач. Примером такой задачи является *транспортная задача по критерию стоимости* (далее – ТЗ). Она возникает при планировании рациональных перевозок грузов.

Постановка транспортной задачи

Имеются m пунктов отправления однородного груза $A_1, A_2, ..., A_m$ (поставщики) и n пунктов назначения того же груза $B_1, B_2, ..., B_n$ (потребители). Предполагается, что из любого пункта A_i ($i=\overline{1,m}$) груз может быть доставлен в любой B_j ($j=\overline{1,n}$). Известны объемы (запасы) груза поставщиков (a_i> 0), потребности в грузе (спрос) потребителей (b_j>0), стоимость (тариф) перевозки единицы груза из каждого пункта отправления в любой пункт назначения ($c_{ij} \geq 0$).

Требуется определить оптимальный план перевозок груза из пунктов A_i в пункты B_j так, чтобы:

1) вывезти весь груз от отправителей A_i;
2) удовлетворить потребность в грузе (спрос) каждого потребителя B_j;
3) транспортные расходы были минимальными.

Допустимый план перевозок – решение задачи в виде неотрицательной матрицы

$$X=\left\|x_{ij}\right\|=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

где x_{ij} – количество груза, перевозимого из точки A_i (от i-го поставщика) в точку B_j (к j-му потребителю).

Математическая модель ТЗ

Найти матрицу X, удовлетворяющую условиям ограничений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j=\overline{1,n} \end{cases} \qquad (2.11)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}$$

и минимуму целевой функции (транспортных расходов)

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min .$$

Допустимый план, имеющий не более (m+n-1) отличных от нуля компонентов x_{ij}, называется базисным (опорным) планом.

Опорный план называется оптимальным, если он доставляет минимум целевой функции.

Ранг матрицы системы – это число r = m+n-1 (количество строк плюс количество столбцов и минус единица).

Если число заполненных клеток в таблице равно рангу матрицы, то опорный план называется невырожденным, иначе – вырожденным. Невырожденный опорный план имеет ровно (m+n-1) отличных от нуля компонент. Вырожденный опорный план имеет меньше, чем (m+n-1) число отличных от нуля компонент.

Любая ТЗ имеет опорный план, если выполняется условие баланса $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$. В этом случае модель ТЗ называется закрытой. Если модель ТЗ не удовлетворяет условию баланса, тогда она называется открытой.

Если задача открытая, то:

1) при $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос меньше предложения) вводят «фиктивного» потребителя B_{n+1}^{ϕ} с потребностью $b_{n+1}^{\phi} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимости перевозок от любого поставщика до «фиктивного» потребителя принимаются равными нулю: $c_{i,n+1}$=0 ($i = \overline{1, m}$);

2) при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос больше предложения) вводят «фиктивного» поставщика A_{m+1}^{ϕ} с запасом $a_{m+1}^{\phi} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Стоимости перевозок от «фиктивного» поставщика до всех потребителей принимаются равными нулю: $c_{m+1,j}$=0 ($j = \overline{1, n}$).

Транспортную задачу представляют в виде распределительной таблицы (рисунок 2). Тарифы c_{ij} будем записывать в левом верхнем углу клетки, а величины поставок x_{ij} – в правом нижнем углу клетки.

A_i	B_j Спрос b_j / Запас a_i	B_1	B_2	…	B_n	
		b_1	b_2	…	b_n	$\sum b_j$
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	
	…	…	…	…	…	
A_m	a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	
	$\sum a_i$					$\sum a_i = \sum b_j$

Рисунок 2. Распределительная таблица транспортной задачи

Модель ТЗ относится к ЗЛП и может быть решена симплексным методом. Однако для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самый распространенный метод решения – *метод потенциалов*.

Решение ТЗ включает два этапа:

1) определение начального опорного плана – первоначальное распределение поставок груза;

2) выполнение последовательности шагов, улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты) до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Построение начального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице перевозок так, что на каждом шаге заполнения либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от одного поставщика.

Заполненные перевозками клетки называются базисными, а остальные (пустые) – свободными.

Для построения 1-го (начального) опорного плана могут использоваться:

1) метод северо-западного угла (диагональный метод);
2) метод по наименьшему элементу в таблице;
3) метод по наименьшему элементу в строке или в столбце и другие.

Метод северо-западного угла (диагональный метод)

На каждом шаге заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части распределительной таблицы.

Заполнение таблицы начинают с клетки (1;1), при этом $x_{11} = \min(a_1; b_1)$. Далее смещаются или по строке вправо или по столбцу вниз и заканчивается заполнение в клетке неизвестного $x_{mn}(a_m;b_n)$, т.е. заполнение идет как бы по диагонали таблицы.

Метод по наименьшему элементу в таблице

Сущность метода состоит в том, что на каждом шаге заполняется клетка с наименьшей величиной c_{ij}. Если такая клетка не единственная, то лучше заполнять ту, по вертикали и горизонтали которой встречаются бóльшие значения c_{ij}, а в принципе заполняется любая из них.

Таблица начинает заполняться с той клетки, в которой наименьший тариф c_{ij}. Пусть это будет клетка (i, j). В эту клетку записывается максимально возможная поставка с учетом ограничений i-й строки и j-го столбца, т.е. значение $x_{ij} = \min(a_i; b_j)$. Если $a_i > b_j$, тогда этой поставкой обеспечивается потребность потребителя B_j, и этот потребитель (столбец) исключается из дальнейшего рассмотрения, а запасы поставщика A_i становятся равными величине $(a_i – b_j)$. Если же $a_i < b_j$, то от поставщика забирается весь груз, и тогда этот поставщик (строка) исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность потребителя B_j становится равной величине ($b_j - a_i$).

Процесс повторяется до тех пор, пока не будут заполнены все столбцы и строки.

Если ТЗ открытая, и введены фиктивный поставщик или потребитель, то сначала заполняются клетки для действительных поставщиков и потребителей, и в последнюю очередь – для фиктивных.

Метод по наименьшему элементу в строке включает следующие этапы:

1) выбрать строку, например, первую;
2) в этой строке выбрать клетку с наименьшей стоимостью c_{ij};
3) в выбранную клетку поставить минимальный груз строки и столбца;
4) если не весь груз вывезен, среди оставшихся клеток строки выбрать клетку с минимальной стоимостью и в нее поставить груз и так далее, пока не будет вывезен весь груз по строке;
5) аналогичные действия произвести по всем строкам.

Если среди клеток имеются 2 или более одинаковых стоимостей для выбора, выбирается та клетка, в которую можно поставить бо́льший груз.

В опорном плане должно быть ($m+n-1$) заполненных клеток. Такой план является невырожденным.

Вырожденный план появляется, когда число заполненных клеток будет меньше, чем $r = m+n-1$. Для дальнейших расчетов его надо дополнить до невырожденного плана нулями. При этом клетки, заполненные нулями, не должны составлять цикл (контур) с прочими заполненными клетками.

Необходимо отметить, что при наличии в таблице клеток с одинаковыми тарифами, планы, полученные с помощью этого метода, могут быть разными.

Пример

Четыре оптовых склада обслуживают четыре магазина одним товаром. Необходимо составить оптимальный план перевозок, который имел бы минимальную стоимость.

Известны: матрица стоимостей перевозки единицы товара от складов к магазинам, тыс.руб.; наличие товара на складах, ед.; потребность магазинов в товаре,ед.

Транспортную задачу удобно решать в распределительных таблицах Тарифы c_{ij}, записываются, например, в правом верхнем углу клетки, а величины поставок x_{ij} – по центру клетки.

Исходные данные занесем в распределительную таблицу (таблица 4).

Таблица 4

Распределительная таблица с исходными данными

Склады	Магазины				Наличие товара на складе, ед.	U_i
	1	2	3	4		
1	9	4	2	2	65	
2	3	8	5	7	10	
3	2	7	3	4	110	
4	5	4	9	6	25	
Потребность магазинов в товаре, ед.	40	45	95	30	210/210	
V_j						

Алгоритм решения транспортной задачи:

1. Проверить, какой является задача по условию баланса наличия товара у поставщиков и потребностей в товаре потребителей. Если задача закрытая, то ее можно решать методом потенциалов. Если задача открытая, то ее нужно привести к закрытой. В примере наличие товара на складах равно потребности магазинов в товаре и составляет 210 т, следовательно, задача закрытая;

2. Построить первый опорный план. В таблице 5 представлен первый опорный план, построенный по методу наилучшего элемента в строке;

Таблица 5

Распределительная таблица с первым опорным планом

Склады	Магазины				Наличие товара на складе, ед.	U_i
	1	2	3	4		
1	9	4	2 65	2	65	
2	3 10	8	5	7	10	
3	2 30	7 20	3 30	4 30	110	
4	5	4 25	9	6	25	
Потребность магазинов в товаре, ед.	40	45	95	30	210	
V_j						

3. Проверить количество занятых клеток. В примере количество занятых клеток равно 4+4-1=7, что свидетельствует, что план невырожденный;

4. Для опорных и оптимального планов рассчитывается целевая функция. Рассчитаем целевую функцию для первого опорного плана:

Z_1 = 65*2+10*3+30*2+20*7+30*3+30*4+25*4 = 670 тыс.руб.;

5. После построения опорного плана он проверяется на оптимальность методом потенциалов.

Для этого необходимо рассчитать потенциалы для занятых клеток по формуле:

$$U_i + V_j = c_{ij}, \tag{2.12}$$

где c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза между i-м пунктом отправления и j-м пунктом назначения;

U_i – потенциалы строк;

V_j – потенциалы столбцов.

Любой из потенциалов (например,U_1) берется равным нулю.

В таблице 6 представлены рассчитанные потенциалы.

Таблица 6

Распределительная таблица с потенциалами

Склады	Магазины				Наличие товара на складе, ед.	U_i
	1	2	3	4		
1	9	4	2 65	2	65	0
2	3 10	8	5	7	10	2
3	2 30	7 20	3 30	4 30	110	1
4	5	4 25	9	6	25	-2
Потребность магазинов в товаре, ед.	40	45	95	30	210	
V_j	1	6	2	3		

План оптимален, если характеристики свободных клеток $d_{ij} \geq 0$. Характеристики d_{ij} рассчитываются по формуле:

$$d_{ij} = c_{ij} - (U_i + V_j). \tag{2.13}$$

Если есть $d_{ij} < 0$, то опорный план можно улучшить, построив новый опорный план.

Рассчитаем d_{ij}:

$d_{11} = 9\text{-}(1+0) = 8$;$d_{12}= 4\text{-}(6+0) = -2$;$d_{14}= 2\text{-}(3+0) = -1$;

$d_{21}= 3\text{-}(1+2) = 0$;$d_{23}= 5\text{-}(2+2) = 1$;$d_{24}= 7\text{-}(3+2) = 2$;

$d_{41}= 5\text{-}(1\text{-}2) = 6$;$d_{43}= 9\text{-}(2\text{-}2) = 9$;$d_{44}= 6\text{-}(3\text{-}2) = 5$;

6. Так как есть $d_{ij} < 0$, то нужно построить новый опорный план.

Для этого:

а) среди клеток с $d_{ij} < 0$ выбирается та, у которой d_{ij} больше по абсолютной величине. В эту клетку ставится знак «+»;

б) для выбранной клетки строится цикл перераспределения груза.

Цикл – это замкнутая ломаная, прямые которой взаимно перпендикулярны, а вершины цикла находятся в занятых клетках, кроме одной – начала цикла.

Правила построения цикла:

– от выбранной клетки нужно пройти по клеткам таблицы, поворачивая в занятых клетках под прямым углом и вернуться в исходную клетку;

– в вершинах цикла расставить «+» и «–», чередуя;

– среди вершин с минусами выберем минимальный груз. Если минимальный груз получился в нескольких клетках, то при перераспределении груза одну (любую) клетку сделать свободной, а остальные условно занятыми грузом «0», чтобы соблюсти правило «m+n-1». При этом следить, чтобы клетка с нулем не составляла замкнутый цикл с заполненными клетками;

– перераспределить груз по циклу следующим образом: в вершинах с минусами выбранный в предыдущем пункте груз вычитается, в вершинах с плюсами прибавляется. Таким образом будет получен новый план, в котором бывшая свободная клетка стала занятой, а одна из занятых – свободной.

В таблице 7 представлен опорный план с циклом перераспределения груза.

Таблица 7

Опорный план с циклом перераспределения груза

Склады	Магазины				Наличие товара на складе, ед.	U_i
	1	2	3	4		
1	9	4 +	2 65-	2	65	
2	3 10	8	5	7	10	
3	2 30	7 20-	3 30+	4 30	110	
4	5	4 25	9	6	25	
Потребность магазинов в товаре, ед.	40	45	95	30	210	
V_j						

Среди вершин с минусом выберем минимальный груз 20 т и в клетках с «–» его вычтем, а в клетках с «+» – прибавим. Получим новый опорный план (таблица 8).

Таблица 8

Новый опорный план

Склады	Магазины				Наличие товара на складе,ед.	U_i
	1	2	3	4		
1	9	4 20	2 45	2	65	
2	3 10	8	5	7	10	
3	2 30	7	3 50	4 30	110	
4	5	4 25	9	6	25	
Потребность магазинов в товаре,ед.	40	45	95	30	210	
V_j						

7. Перейти к5.

После расчета нескольких опорных планов получен оптимальный план (таблица 9).

Таблица 9

Оптимальный план

Склады	Магазины				Наличие товара на складе, ед.	U_i
	1	2	3	4		
1	9	4 20	2 15	2 30	65	0
2	3 10	8	5	7	10	2
3	2 30	7	3 80	4	110	1
4	5	4 25	9	6	25	0
Потребность магазинов в товаре, ед.	40	45	95	30	210	
V_j	1	4	2	2		

Рассчитаем d_{ij}:

d_{11} = 9-(1+0) = 8; d_{22} = 8-(4+2) = 2; d_{23} = 5-(2+2) = 1;

d_{24} = 7-(2+2) = 3; d_{32} = 7-(4+1) = 2; d_{34} = 4-(2+1) = 1;

$d_{41} = 5-(1+0) = 4; d_{43} = 9-(2+0) = 7; \quad d_{44} = 6-(2+0) = 4.$

Все $d_{ij} \geq 0$, следовательно, план оптимален.

Ответ

Оптимальный маршрут перевозок:

с 1-ого склада во 2-ой магазин – 20 ед., в 3-ий магазин – 15 ед., в 4-ый магазин – 30 ед.;

со 2-ого склада в 1-ый магазин – 10 ед.;

с 3-ого склада в 1-ый магазин – 30 ед., в 3-ий магазин – 80 ед.;

с 4-ого склада во 2-ой магазин – 25 ед.

Транспортные расходы по оптимальному плану составят Z= 20*4 + 15*2 + 30*2 + 10*3 + 30*2 + 80*3 + 25*4 = 600 тыс. руб., что на 70 тыс. руб. меньше первоначального плана.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Приведите понятие и признаки оптимизационной модели.
2. Представьте математическую модель задачи линейного программирования.
3. Дайте понятия опорного и оптимального планов, области допустимых решений.
4. Приведите примеры экономических задач, приводящих к задачам линейного программирования.
5. Сформулируйте постановку и общий вид задачи оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии.
6. Сформулируйте постановку и общий вид задачи о смесях (рационе, диете).
7. Представьте алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом.
8. Приведите алгоритм решения задачи линейного программирования симплексным методом.
9. Представьте алгоритм решения задачи линейного программирования методом искусственного базиса (М-методом).
10. Охарактеризуйте понятие двойственности в линейном программировании.
11. В чем состоит анализ устойчивости оптимального плана?
12. Сформулируйте правила определения устойчивости оптимального плана при изменении основных небазисных переменных.
13. Сформулируйте правила определения пределов устойчивости двойственных оценок ограничений.
14. Сформулируйте постановку транспортной задачи.
15. Какой существует алгоритм решения транспортной задачи?

РАЗДЕЛ 3. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1 КЛАССИЧЕСКАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этом разделе рассматривается простейшая математическая модель оптимизации, в которой целевая функция зависит от одной переменной, а допустимым множеством является отрезок вещественной оси:

$$f(x) \to min, \qquad (3.1)$$
$$x \in [a;b].$$

Из математического анализа известны следующие условия локального экстремума функции f(x), дифференцируемой достаточное число раз:

1) если функция f(x) дифференцируема в точке $\tilde{x}$, и достигает в этой точке локального экстремума, то $f'(\tilde{x}) = 0$ (необходимое условие экстремума);

2) если функция f(x) n раз дифференцируема в точке $\tilde{x}$, и в этой точке все производные f(x) до n–1-го порядка включительно равны нулю, то $f^{(n)}(\tilde{x}) \neq 0$. Тогда, если n – нечетно, то $\tilde{x}$ не является точкой локального экстремума функции f(x). Если n – четное число:

а) то при $f^{(n)}(\tilde{x}) > 0$ $\tilde{x}$ – точка локального минимума f(x);

б) то при $f^{(n)}(\tilde{x}) < 0$ $\tilde{x}$ – точка локального максимума f(x) (достаточное условие экстремума).

Перечисленные условия позволяют предложить следующий путь решения задачи минимизации (3.1):

1) с помощью условия 1 находим все точки возможного экстремума функции f(x) на интервале (a;b), т.е. корни уравнения

$$f'(\tilde{x}) = 0, \qquad (3.2)$$

которые являются стационарными точками, принадлежащими интервалу (a;b);

2) найденные стационарные точки исследуем в соответствии с условием 2, выделяя из них только точки локальных минимумов f(x);

3) значения f(x) в точках локальных минимумов и на концах отрезка [a;b] сравниваем между собой. Наименьшему из этих значений соответствует точка глобального минимума f(x) на [a;b].

*Замечание***.** Применение условия 2 требует вычисления высших производных функции f(x), поэтому в большинстве случаев бывает проще сравнить значения f(x) во всех стационарных точках, не интересуясь их характером. [13] [15]

Алгоритм минимизации f(x) на отрезке [a;b] (классический метод):

1. Решить уравнение (3.2) на интервале $x \in (a;b)$, т.е. найти все стационарные точки $x_1,..,x_{k-1} \in (a;b)$. Положить $x_0 = a$, $x_k = b$;

2. Вычислить значения f (x) функции f (x) в точках x_i, $i = 0, .., k$;

3. Найти $f^* = \min\limits_{0 \le i \le k} f(x_i) = f(x_m)$. Положить $x^* = x_m$.

Пример

Решить задачу $f(x) = x^3 - 3x + 1 \to \min$, $x \in [-2; 2]$, используя классический метод минимизации.

1. Находим корни уравнения $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ из интервала (–2; 2): $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Полагаем $x_0 = -2$, $x_3 = 2$;

2. Вычисляем значения f(x) в точках x_i, $i = 0, .., 3$: $f(x_0) = -17$, $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = -1$, $f(x_3) = 1$;

3. Находим $f^* = \min(-17, 3, -1, 1) = -17 = f(x_0)$. Поэтому $x^* = x_0 = -2$, $f^* = -17$.

При решении практических задач оптимизации классический метод имеет ограниченное применение. Это объясняется тем, что, во–первых, во многих случаях значения целевой функции f(x) находятся из измерений или экспериментов, а измерение производной f '(x) затруднительно или невозможно и, во–вторых, даже когда производная f '(x) задана аналитически или поддается измерению, решение уравнения (3.2) зачастую вызывает затруднения.

3.2 Прямые методы безусловной оптимизации функций одной переменной

Для решения задачи минимизации функции f(x) на отрезке [a;b] на практике, как правило, применяют приближенные методы. Они позволяют найти решение этой задачи с необходимой точностью в результате определения конечного числа значений функции f(x) и ее производных в некоторых точках отрезка [a;b]. Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, называются *прямыми методами минимизации*.

Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов минимизации, это возможность определения значений f(x) в заданных точках.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике прямые методы поиска точки минимума. Эти методы можно использовать, если функция f(x) унимодальна на отрезке [a;b].

К методам одномерного поиска относятся методы, использующие правило исключения интервалов, методы, использующие квадратичную аппроксимацию и методы, использующие производные.

Методы исключения отрезков

Пусть a < x $_1$< x$_2$ < b. Сравнив значения f(x) в точках x$_1$ и x$_2$ (пробных точках), можно сократить отрезок поиска точки x*, перейдя к отрезку [a;x$_2$], если $f(x_1) \le f(x_2)$, или к отрезку m [x$_1$; b], если $f(x_1) > f(x_2)$.

Описанную процедуру можно повторить необходимое число раз, последовательно уменьшая отрезок, содержащий точку минимума. Когда длина последнего из найденных отрезков станет достаточно малой, следует положить $x^* \approx \bar{x}$, где $\bar{x}$ – одна из точек этого отрезка, например, его середина. Методы мимизации, основанные на этом принципе, называются *методами исключения отрезков* (рисунок 3).

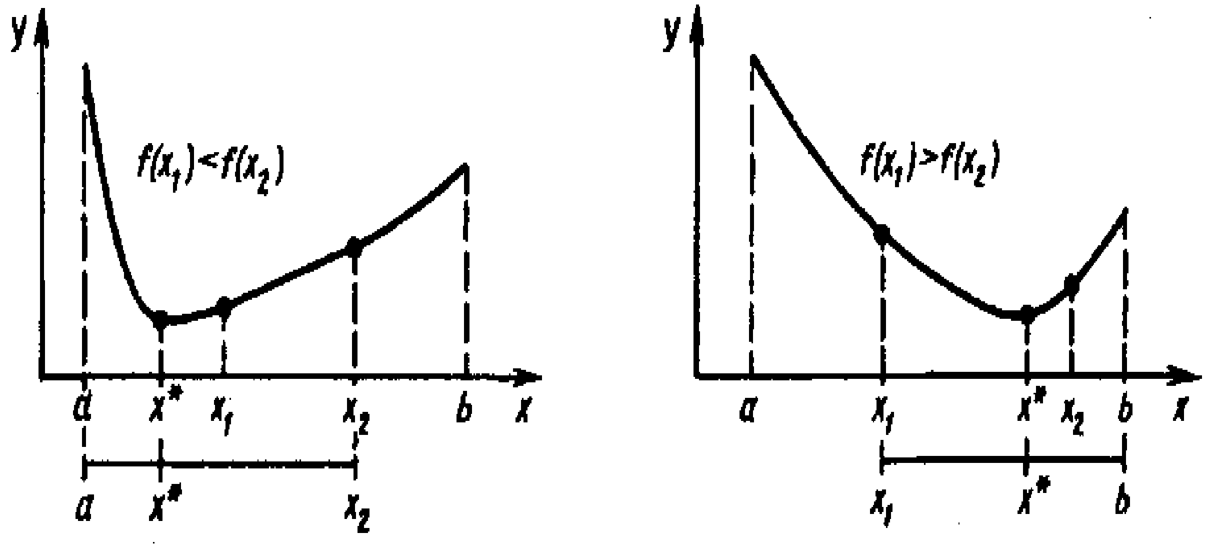

Рисунок 3. Уменьшение отрезка поиска точки минимума методами исключения отрезков

Чтобы относительное уменьшение отрезка на каждой итерации не зависело от того, какая из его частей исключается из дальнейшего рассмотрения, пробные точки следует располагать симметрично относительно середины исходного отрезка. В зависимости от способа выбора пробных точек получаются различные методы исключения отрезков.

Метод деления отрезка пополам (дихотомии)

В этом методе точки x_1 и x_2располагаются близко к середине очередного отрезка [a; b]:

$$x_1 = \frac{b+a-\delta}{2}, x_2 = \frac{b+a+\delta}{2} , \qquad (3.3)$$

где δ > 0 – малое число. При этом отношение длин нового и исходного отрезков $\tau = \frac{b-x_1}{b-a} = \frac{x_2-a}{b-a}$ близко к 1/2, этим и объясняется название метода.

Отметим, что для любых точек x_1 и x_2 величина $\tau > 1/2$, поэтому указанный выбор пробных точек объясняется стремлением обеспечить максимально возможное относительное уменьшение отрезка на каждой итерации поиска x^*.

В конце вычислений по методу дихотомии в качестве приближенного значения x* берут середину последнего из найденных отрезков [a; b], убедившись предварительно, что достигнуто неравенство $\frac{b-a}{2} \le \varepsilon$.

Опишем алгоритм метода деления отрезка пополам.

1. Определить x_1 и x_2 по формулам (3.3). Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$;

2. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то перейти к отрезку $[a;x_2]$, положив $b = x_2$, иначе – к отрезку $[x_1;b]$, положив $a = x_1$;

3. Найти достигнутую точность $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$. Если $\varepsilon_n > \varepsilon$,, то перейти к следующей итерации, вернувшись к шагу 1. Если $\varepsilon_n \le \varepsilon$, то завершить поиск x*, перейдя к п. 4;

4. Положить $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}, f^* \approx (\bar{x})$.

Замечания:

1. Число δ из (3.3) выбирают на интервале (0;2ε) с учетом следующих соображений:

а) чем меньше δ, тем больше относительное уменьшение длины отрезка на каждой итерации, т.е. при уменьшении δ достигается более высокая скорость сходимости метода дихотомии;

б) при чрезмерно малом δ сравнение значений f(x) в точках x_1 и x_2 , отличающихся на величину δ, становится затруднительным. Поэтому выбор δ должен быть согласован с точностью определения f(x) и с количеством верных десятичных знаков при задании аргумента x.

2. Число n итераций метода дихотомии, необходимое для определения точки x* с точностью до ε, определяется неравенством

$$n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}. \qquad (3.4)$$

Обозначим длину исходного отрезка [a;b] через Δ_0. Длина отрезка, полученного после первой итерации, будет $\Delta_1 = \frac{\Delta_0}{2} + \frac{\delta}{2}$, после второй итерации $\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{b-a}{4} + \delta\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$,

после третьей – $\Delta_3 = \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{b-a}{8} + \delta\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$ и т.д.

Таким образом, в результате n итераций длина отрезка поиска точки x* станет

$$\Delta_n = \frac{b-a}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2}\right) = \frac{b-a}{2^n} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\delta. \qquad (3.5)$$

При этом будет достигнута точность определения точки минимума $\varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2}$. Находя n из условия

$$\varepsilon_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{\delta}{2} \leq \varepsilon, \qquad (3.6)$$

получаем неравенство (3.4).

3. Величина δ может быть выбрана достаточно малой, поэтому, пренебрегая ею в (3.4), получаем $\varepsilon_n = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$. На каждой итерации метода дихотомии вычисляют два значения f(x). Поэтому после N вычислений f(x) производят n = N/2 итераций и достигают точность определения x*:

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_{N/2} = \frac{b-a}{\frac{N}{2}+1}. \qquad (3.7)$$

Пример

Решить задачу $f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min$, $x \in [0; 1]$, ε = 0,1 методом деления отрезка пополам.

Выберем δ=0,02.

Итерация 1.

1. $x_1 = 0{,}49$, $x_2 = 0{,}51$, f(x) = 0,670, $f(x_2) = 0{,}688$;

2. $f(x_1) > f(x_2)$, поэтому полагаем $a = x_1 = 0{,}49$;

3. (b–a)/2 = 0,255 > 0,1, т.е. переходим к следующей итерации. Результаты вычислений на остальных итерациях записаны в таблице 10.

Таблица 10

Результаты вычислений методом деления отрезка пополам

Номер итерации	a	b	(b–a)/2	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Сравнение $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2	0,49	1	0,26	0,735	0,755	0,771	0,792	$f(x_1) < f(x_2)$
3	0,49	0,755	0,13	0,613	0,633	0,683	0,691	$f(x_1) < f(x_2)$
4	0.49	0,633	0,07	0,07 < 0,1 – точность достигнута				

Таким образом, $x^* \approx \dfrac{0{,}49 + 0{,}633}{2} \approx 0{,}56$, $f^* \approx f(0{,}56) \approx 0{,}67$.

Метод золотого сечения

Рассмотрим такое симметричное расположение точек x_1 и x_2 на отрезке [a;b], при котором одна из них становится пробной точкой и на новом отрезке, полученном после исключения части исходного отрезка. Использование таких точек позволяет на каждой итерации метода исключения отрезков, кроме первой, ограничиться определением только одного значения f(x),так как другое значение уже найдено на одной из предыдущих итераций.

Найдем точки x_1 и x_2, обладающие указанным свойством.

Рассмотрим сначала отрезок [0;1] и для определенности предположим, что при его уменьшении исключается правая часть этого отрезка. Пусть $x_2 = \tau$, тогда симметрично расположенная точка $x_1 = 1-\tau$ (рисунок 4).

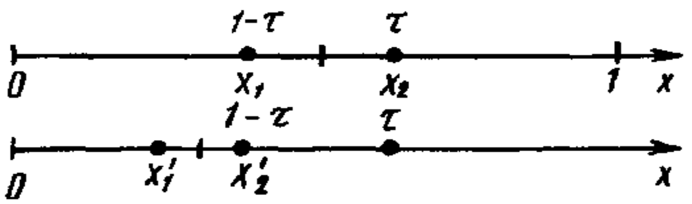

Рисунок 4. Определение пробных точек в методе золотого сечения

Пробная точка x_1 отрезка [0;1] перейдет в пробную точку $x_2' = 1-\tau$ нового отрезка [0;т]. Чтобы точки $x_2= \tau$, и $x_2' = 1-\tau$ делили отрезки [0;1] и [0;τ] в одном и том же отношении, должно выполняться равенство $\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau}$ или $\tau^2 = 1-\tau$, откуда находим положительное значение $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803$. Таким образом, $x_1 = 1-\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Для произвольного отрезка [a;b] выражения для пробных точек примут вид:

$$x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a); \; x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a). \qquad (3.8)$$

Замечания:

1) точки x_1 и x_2 из (3.8) обладают следующим свойством: каждая из них делит отрезок [a;b] на две неравные части так,

что отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длин большей и меньшей частей отрезка. Точки с таким свойством называются точками золотого сечения отрезка [a; b]. Это и объясняет название рассматриваемого метода;

2) на каждой итерации исключения отрезков с пробными точками (3.8) одна из них $\bar{x}$ переходит на следующий отрезок, и значение f(x) в этой точке вычислять не следует. Если новым отрезком становится $[a;x_2]$, то на него переходит пробная точка $\bar{x} = x_1$ исходного отрезка, становясь его второй пробной точкой ($x_2' = x_1$). В случае перехода к отрезку $[x_1;b]$ пробная точка $\bar{x} = x_2$ исходного отрезка становится первой пробной точкой отрезка $[x_1;b]$;

3) легко проверить, что $x_1 = a+b-x_2$, и $x_2 = a+b-x_1$. Поэтому на каждой итерации метода золотого сечения недостающую пробную точку нового отрезка можно найти по перешедшей на него пробной точке с помощью сложения и вычитания, не используя формул (3.8);

4) в конце вычислений по методу золотого сечения в качестве приближенного значения x* можно взять середину последнего из полученных отрезков $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$.

На каждой итерации отрезок поиска точки минимума уменьшается в одном и том же отношении $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, поэтому в результате n итераций его длина становится $\Delta_n = \tau^n (b-a)$. Таким образом, точность ε_n определения точки x* после n итераций находят из равенства

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b-a), \qquad (3.9)$$

а условием окончания поиска точки x* с точностью ε служит неравенство $\varepsilon_n \le \varepsilon$.

Алгоритм метода золотого сечения:

1. Найти x_1 и x_2 по формулам (3.8). Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Положить $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$;

2. Проверить на окончание поиска: если $\varepsilon_n > \varepsilon$, то перейти к п. 3, иначе – к п. 4;

3. Перейти к новому отрезку и новым пробным точкам. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то положить $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $f(x_2) \le f(x_1)$, $x_1 = b-\tau(b-a)$ и вычислить $f(x_1)$, иначе – положить $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x_2 = b+\tau(b-a)$ и вычислить $f(x_2)$. Положить $\varepsilon_n = \tau\varepsilon_n$ и перейти к п. 2;

4. Закончить поиск: положить $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}$, $f^* \approx f(\bar{x})$.

Пример

Решить задачу $f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min$, $x \in [0; 1]$, $\varepsilon = 0, 1$ методом золотого сечения.

Итерация 1:

1. Найдем: $x_1 = 0,382$, $x_2 = 0,618$, $f(x_1) = 0,704$, $f(x_2) = 0,685$, $\varepsilon_n = 0,5$;

2. $\varepsilon_n = 0,5 > \varepsilon = 0,1$, поэтому переходим к п. 3;

3. $f(x_1) > f(x_2)$, поэтому полагаем $a = 0,382$, $x_1 = 0,618$, $f(x_1) = 0,685$, $x_2 = 0,764$, $\varepsilon_n = 0,309$ и вычисляем $f(x_2) = 0,807$. Перейдем к следующей итерации, начиная с п. 2.

Результаты вычислений на остальных итерациях представлены в таблице 11.

Таблица 11

Результаты вычислений методом золотого сечения

Номер итерации	a	b	ε_n	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Сравнение $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2	0,382	1,000	0,309	0,618	0,764	0,685	0,807	$f(x_1) < f(x_2)$
3	0,382	0,764	0,191	0,528	0,618	0,668	0,685	$f(x_1) < f(x_2)$
4	0,382	0,618	0,118	0,472	0,528	0,673	0,668	$f(x_1) > f(x_2)$
5	0,472	0,618	0,073	0,073 < 0,1 – точность достигнута				

Таким образом, $x^* \approx \dfrac{0{,}472 + 0{,}618}{2} \approx 0{,}55$, f *≈ f(0,55) = 0,67.

Замечание. Число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε, можно найти из условия $\varepsilon_n \le \varepsilon$ с учетом соотношения (3.9): $n \ge \ln\left(\dfrac{2\varepsilon}{b-a}\right) \Big/ \ln \approx -2{,}1\ln\left(\dfrac{2\varepsilon}{b-a}\right)$.

Так как N вычислений f(x) позволяют выполнить N – 1 итераций метода золотого сечения, то достигнутая в результате этих вычислений точность определения x* составляет

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_{N-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{N-1}(b-a). \qquad (3.10)$$

3.3 Методы безусловной оптимизации функций одной переменной с использованием производных

К методам безусловной минимизации функции одной переменной с использованием производных относятся методы ломаных, касательных, Ньютона и другие.

Рассмотрим метод касательных. Он применим к функциям f(x) выпуклым и дифференцируемым на отрезке [a;b]. Такие функции удовлетворяют условию Липшица и унимодальны на [a;b].

Функция выпукла на [a;b], если вторая производная положительна для всех x из этого отрезка: $f''(x) > 0,\ \forall x \in [a;b]$.

При переходе через точку минимума выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered} f'(x_k + 0) \ge 0 \\ f'(x_k - 0) \le 0 \\ x_k = x^*. \end{gathered} \qquad (3.11)$$

Алгоритм метода касательных:

1. Выбирается произвольная точка $x_0 \in [a;b]$;

2. Составляется функция:

$$g(x,x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\equiv p_0(x);\qquad(3.12)$$

3. Определяется следующая точка x_1 из условия:

$$p_0(x_1)=\min_{x\in[a;b]}p_0(x),\quad x_1\in[a;b];\qquad(3.13)$$

5.Составляется новая функция $p_1(x)=\max\{g(x,x_1);p_0(x)\}$;

6. Находится очередная точка x_2 из условия:

$$p_1(x_2)=\min_{x\in[a;b]}p_1(x),\quad x_2\in[a;b]\qquad(3.14)$$

и т.д.;

6. Пусть точки $x_{0,}x_1,...,x_k\ (k\geq 1)$ уже известны. Тогда составляется функция:

$$p_k(x)=\max\{g(x,x_k);p_{k-1}(x)\}=\max_{0\leq i\leq k}g(x,x_i);\qquad(3.15)$$

7. Следующая точка x_{k+1} определяется условием (рисунок 5):

$$p_k(x_{k+1})=\min_{x\in[a;b]}p_k(x),\quad x_{k+1}\in[a;b].\qquad(3.16)$$

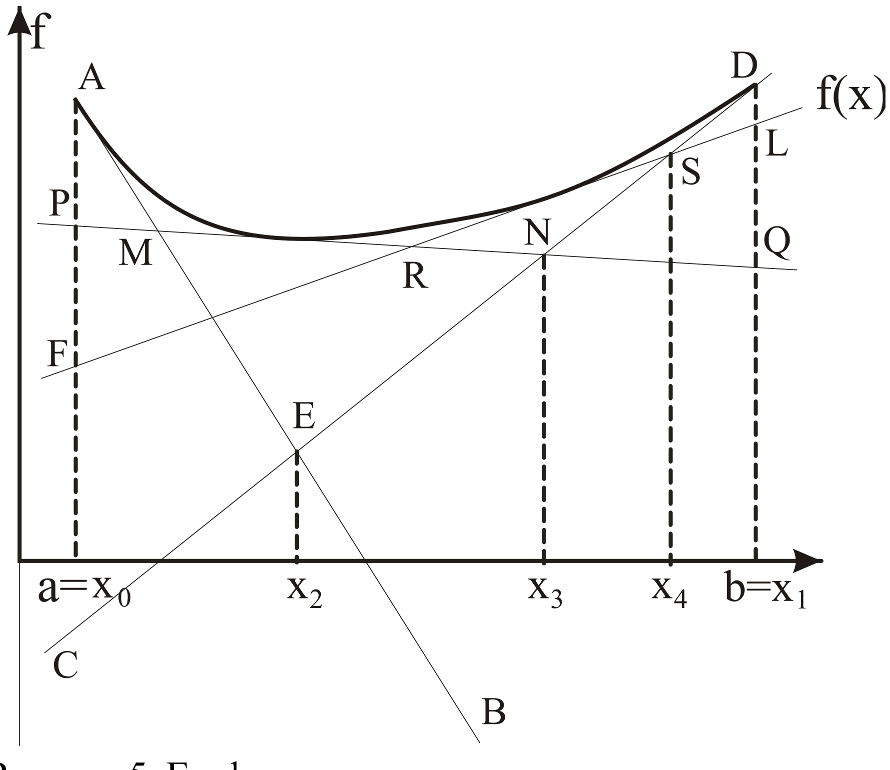

Рисунок 5. Графическая иллюстрация метода касательных

На рисунке 5 представлены следующие графики: AB– график $g(x,x_0)$, CD– график $g(x,x_1)$, AED – график $p_1(x)$, PQ – график $g(x,x_2)$, AMND – график $p_2(x)$, FL – график $g(x,x_3)$, AMRSD – график $p_3(x)$. Функция $p_3(x)$ является непрерывной кусочно-линейной функцией, и ее график представляет собой ломаную, состоящую из отрезков касательных к графику функции f(x) в точках $x_{0,}x_1,\dots,x_k$.

Оценку погрешности метода касательных можно произвести по формуле:

$$\left|f(x_k)-p_{k-1}(x_k)\right|<\varepsilon\,. \tag{3.17}$$

Данную формулу можно использовать для остановки процедуры метода касательных. Также для остановки итерационной процедуры применима следующая формула:

$$\left|p_k(x_{k+1})-p_{k-1}(x_k)\right|<\varepsilon\,. \tag{3.18}$$

При использовании метода касательных легко и удобно для практического использования оценить погрешность получаемого решения на каждом шаге через известные величины, вычисляемые в процессе реализации метода.

На каждом шаге метода касательных нужно минимизировать кусочно-линейную функцию, что может быть сделано простым перебором её вершин.

Метод сходится при любом выборе начальной точки.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Приведите математическую модель задачи безусловной оптимизации функции одной переменной.
2. Сформулируйте необходимые условия оптимальности в задачах безусловной оптимизации функции одной переменной.

3. Представьте алгоритм классического метода в задачах безусловной оптимизации функции одной переменной.

4. Охарактеризуйте сущность прямых методов минимизации функции одной переменной.

5. Представьте характеристику методов исключения отрезков.

6. Дайте характеристику метода деления отрезка пополам (дихотомии).

7. Представьте алгоритм метода деления отрезка пополам (дихотомии).

8. Дайте характеристику метода золотого сечения.

9. Представьте алгоритм метода золотого сечения.

10. Перечислите методы безусловной минимизации функции одной переменной с использованием производных.

11. Дайте характеристику метода касательных.

12. Приведите алгоритм метода касательных.

13. Какие существуют достоинства и недостатки метода касательных?

РАЗДЕЛ 4. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1 Прямые методы безусловной оптимизации функций нескольких переменных

Рассмотрим вычислительные алгоритмы решения задачи безусловной минимизации $f(x) \to \min$, $x \in E_n$, которые опираются на вычисление значений функции $f(x)$, то есть прямые методы минимизации. Важно отметить, что для их применения не требуется дифференцируемость целевой функции и даже ее аналитическое задание. Нужно лишь иметь возможность вычислять или измерять значения $f(x)$ в произвольных точках. Такие ситуации встречаются в практически важных задачах оптимизации.

Остановимся сначала на вычислительных процедурах, в которых выбор нового приближения к точке минимума определяется сравнением значений функции в нескольких точках пространства E_n.

Минимизация по правильному симплексу

Правильным симплексом в пространстве E_n называется множество из n+1 равноудаленных друг от друга точек (вершин симплекса). Отрезок, соединяющий две вершины, называется ребром симплекса.

В пространстве E_2 правильным симплексом является совокупность вершин равностороннего треугольника, в E_3 – правильного тетраэдра.

Если x^0 – одна из вершин правильного симплекса в E_n то координаты остальных n вершин $x^1, ..., x^n$ можно найти по формулам:

$$x^i{}_j = \begin{cases} x^0{}_j + d_1, & i \neq j, \\ x^0{}_j + d_2, & i = j, \end{cases} \qquad (4.1)$$

где $d_1 = a(\sqrt{n+1} - 1)/n\sqrt{2}$;

$d_2 = a(\sqrt{n+1} + n - 1)/n\sqrt{2}$;

a – длина ребра.

Вершину x^0 симплекса, построенного по формулам (4.1), будем называть базовой.

По известному симплексу можно построить новый симплекс отражением какой-либо вершины, например, x^k симметрично относительно центра тяжести x^c остальных вершин симплекса. Новая и старая вершины $\hat{x}^k$ и x^k связаны соотношением: $\dfrac{\hat{x}^k + x^k}{2} = x^c$, где $x^c = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i \neq k} x^i$.

В результате получается новый правильный симплекс с тем же ребром и вершинами $\hat{x}^k = 2x^c - x^k$, x^i, $i = 0, \ldots, n$, $i \neq k$.

Поиск точки минимума функции f(x) с помощью правильных симплексов производят следующим образом. На каждой итерации сравниваются значения f(x) в вершинах симплекса. Затем проводят описанную выше процедуру отражения для той вершины, в которой f(x) принимает наибольшее значение. Если в отраженной вершине получается меньшее значение функции, то переходят к новому симплексу. В противном случае выполняют еще одну попытку отражения для вершины со следующим по величине значением f(x). Если и она не приводит к уменьшению функции, то сокращают длину ребра симплекса, например, вдвое и строят новый симплекс с этим ребром. В качестве базовой выбирают ту вершину x^0 старого симплекса, в которой функция принимает минимальное значение. Поиск точки минимума f(x) заканчивают, когда либо ребро симплекса, либо разность между значениями функции в вершинах симплекса становятся достаточно малыми. Опишем один из вариантов алгоритма этого метода.

1. Выбрать параметр точности ε, базовую точку x^0 , ребро a и построить начальный симплекс по формулам (4.1). Вычислить $f(x^0)$;

2. Вычислить значения f(x) в вершинах симплекса x^1, ..., x^n;

3. Упорядочить вершины симплекса x^0, ..., x^n так, чтобы $f(x^0) \le f(x^1) \le \ldots \le f(x^{n-1}) \le f(x^n)$;

4. Проверить условие

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x^i)-f(x^0)]^2 < \varepsilon^2. \qquad (4.2)$$

Если оно выполнено, то вычисления прекратить, полагая $x^* \approx x^0$, $f^* \approx f(x^0)$. В противном случае перейти к п. 4;

5. Найти $x^c = \frac{1}{n}\sum_{i\neq 1} x^i$ и выполнить отражение вершины x^n: $\hat{x}^n = 2x^c - x^n$. Если $f(\hat{x}^n) < f(x^n)$, то положить $x^n = \hat{x}^n$ и перейти к п. 2. Иначе – перейти к п. 5;

6. Найти $x^c = \frac{1}{n}\sum_{i\neq 1} x^i$ и выполнить отражение вершины x^{n-1}: $\hat{x}^{n-1} = 2x^c - x^{n-1}$. Если $f(\hat{x}^{n-1}) < f(x^{n-1})$, то положить $x^{n-1} = \hat{x}^{n-1}$ и перейти к п. 2. Иначе – перейти к п. 6;

7. Перейти к новому правильному симплексу с вдвое меньшим ребром, считая базовой вершиной x^0 . Остальные n вершин симплекса найти по формуле $x^i = (x^i + x^0)/2$, i=1, ..., n. Перейти к п.1.

Замечания:

1) если функция f(x) многомодальна, то описанным методом может быть найдена точка локального, а не глобального минимума f(x);

2) если ограниченность снизу целевой функции не очевидна, то в алгоритм метода следует включить дополнительную процедуру остановки.

Метод циклического покоординатного спуска

Этот метод заключается в последовательной минимизации целевой функции f(x) сначала по направлению первого базисного вектора e^1, затем второго – e^2 и т.д. После окончания минимизации по направлению последнего базисного вектора e^n цикл повторяется.

Опишем алгоритм.

1. Выбрать $x \in E_n$, критерий достижения точности, например, $\rho(x^{k+1}, x^k) < \varepsilon_1$, величину ε. Найти f(x), положить j= 1;

2. Решить задачу одномерной минимизации $\Phi(\alpha) = f(x + \alpha e^j) \to \min, \alpha \in R$, т.е. найти α^*. Положить $\hat{x} = x + \alpha^* e^j$, вычислить f(x);

3. Если j < n, то положить $x = \hat{x}$, j=j+1 и перейти к шагу 1, иначе – перейти к п. 3;

4. Проверить условие достижения точности $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$ или $|f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon$. Если оно выполняется, то положить $x^* = \hat{x}$, $f^* = f(\hat{x})$ и закончить поиск. Иначе – положить $x = \hat{x}$, $f(x) = f(\hat{x})$, j = 1 и перейти к п. 1.

Эффективность метода циклического покоординатного спуска существенно зависит от свойств целевой функции.

Пример

Решить задачу $f(x) = 5x^2_1 + 5x^2_2 + 8x_1x_2 \to \min$, $x \in E_2$ методом циклического покоординатного спуска.

Поворот системы координат на угол – 45° (замена переменных $x_1 = (y_1 + y_2)/\sqrt{2}$ и $x_1 = (-y_1 + y_2)/\sqrt{2}$ приводит функцию к виду $f_1(y) = y^2_1+9y^2_2$. Очевидно, линии уровня целевой функции – эллипсы $y^2_1/9+y^2_2 = c^2$ (рисунок 6).

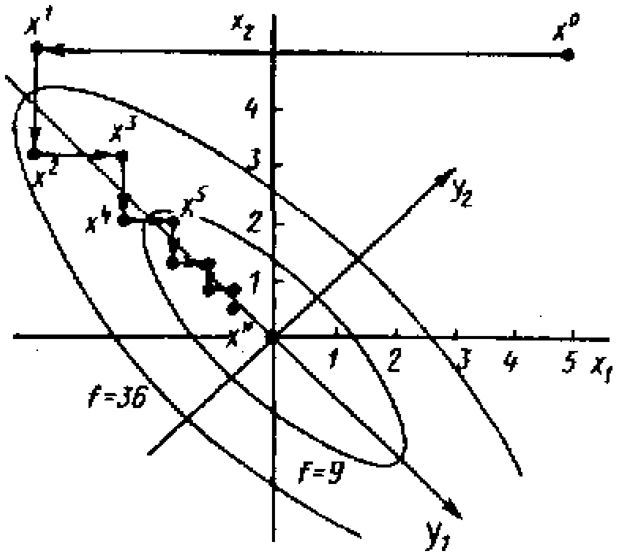

Рисунок 6. Графическая иллюстрация метода циклического покоординатного спуска

Результаты расчетов по приведенному выше алгоритму представлены в таблице 12.

Таблица 12

Результаты расчетов по методу циклического покоординатного спуска

Номер итерации	x_1	x_2	f (x)
0	5	5	450
1	–4	5	45
2	–4	3,2	28,8
3	–2,56	3,2	18,43
4	–2,56	2,05	11,8
5'	–1,64	2,05	7,55
6	–1,64	1,31	4,83
7	–1,05	1,31	3,09
8	–1,05	0,84	1,98
9	–0,67	0,84	1,27
10	–0,67	0,54	0,81

Из таблицы 12 и рисунка 6 видно, что минимизирующая последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке минимума $x^* = (0,0)$. Траектория поиска точки минимума в данной задаче имеет ярко выраженный зигзагообразный характер.

Из примера видно, что эффективность решения задачи методом циклического покоординатного спуска можно повысить, если дополнить его алгоритм периодически повторяющимся поиском точки минимума в направлениях $p^i = x^i – x^{i–1}$ из точек x^i. Так, например, если из точки x^4 провести исчерпывающий спуск в направлении $p^4 = x^4 – x^2$ (координаты точек см. в таблице 12), то получим точку $(–2{,}2\text{x}10^{–5}; 5{,}6\text{x}10^{–3})$, расположенную значительно ближе к точке минимума $x^* = (0,0)$, чем точки x^5, x^6, x^7.

Такой подход, состоящий в последовательном нахождении направлений убывания функции и минимизации ее по этим направлениям, лежит в основе ряда алгоритмов. Рассмотрим один из них.

Алгоритм Хука-Дживса

Алгоритм содержит две основные процедуры:

1) исследующий покоординатный поиск в окрестности данной точки, предназначенный для определения направления убывания f (x);

2) перемещение в направлении убывания.

Опишем алгоритм исследующего покоординатного поиска из заданной точки x с приращениями по каждой координате Δ_j, $j = 1,\dots, n$

1. Положить $\bar{x} = x$, $i = 1$;

2. Сделать пробный шаг $y = \bar{x} – \Delta_j e^j$, где e^j – j–й базисный вектор. Если $f(\bar{x}) \le f(y)$, то перейти к п. 3, иначе – к п. 4;

3. Сделать пробный шаг $y = \bar{x} + \Delta_j e^j$. Если $f(\bar{x}) \le f(y)$, то перейти к п. 5, иначе – к п. 4;

4. Положить $\bar{x} = y$;

5. Положить $j = j + 1$. Если $j \le n$, то перейти к п. 2. В противном случае исследующий поиск окончен – получена точка $\overline{x}$ для которой $f(\overline{x}) < f(y)$, если $\overline{x} \ne x$.

Замечание. В результате исследующего поиска может оказаться, что $\overline{x} = x$. Тогда исследующий поиск считается неудачным. Если при этом норма приращения $\Delta = (\Delta_1,.., \Delta_n)$ мала, т.е. $||\Delta|| \le \varepsilon$, где ε – заданная точность, то полагают $x^* = x$. Если заданная точность не достигнута, то полагают $\Delta = \Delta/\gamma$ (постоянная $\gamma > 1$ – коэффициент уменьшения шага) и повторяют исследующий поиск.

Приведем теперь полный алгоритм Хука-Дживса.

1. Выбрать начальную точку x^0, вектор приращений $\Delta = (\Delta_1,.., \Delta_n)$, коэффициент уменьшения шага $\gamma > 1$, параметр окончания поиска $\varepsilon > 0$;

2. Провести исследующий покоординатный поиск из точки x^0, т.е. найти точку $\overline{x}^0$. Если $\overline{x}^0 \ne x$, то перейти к п. 3, иначе – к п. 2;

3. Проверка на окончание поиска. Если $||\Delta|| < \varepsilon$, то прекратить поиск и положить $x^* = x^0$. Иначе – положить $\Delta = \Delta/\gamma$ и перейти к п. 1;

4. Перемещение из точки x в направлении убывания $\overline{x}^0 - x^0$: положить $x^1 = \overline{x}^0 + (\overline{x}^0 - x^0) = 2\overline{x}^0 - x^0$;

5. Провести исследующий поиск в точке x^1, т.е. найти точку $\overline{x}^1$. Если $f(\overline{x}^1) < f(\overline{x}^0)$, то положить $x^0 = \overline{x}^0$, $\overline{x}^0 = \overline{x}^1$ и перейти к п. 3. Иначе – положить $x^0 = \overline{x}^1$ и перейти к п. 1.

Все описанные выше прямые методы безусловной минимизации функции многих переменных содержат детерминированные процедуры поиска точек с меньшим значением функции. Однако разработаны методы минимизации, где в процедуру поиска точек минимума намеренно вводят элементы случайности.

4.2 Методы безусловной оптимизации функций нескольких переменных с использованием производных

При использовании прямых методов поиска требуется только вычисление значений функции, но количество этих вычислений может быть очень велико. Методы первого порядка используют информацию о значениях производных функций, то есть дают возможность нахождения стационарных точек, удовлетворяющих необходимому условию первого порядка.

Методы, использующие производные, носят итеративный характер, так как компоненты градиента являются нелинейными функциями.

Пусть функция f(x) дифференцируема в E_n . В этом разделе рассматриваются итерационные процедуры минимизации вида

$$X^k = x^{k-1} + \alpha_k p^k,\ k = 1, .., x^0 \in E_n, \tag{4.3}$$

где направление убывания p^k определяется тем или иным способом с учетом информации о частных производных функции f (x), а величина шага a^ > 0 такова, что

$$f(x^k) < f(x^{k-1}),\ k = 1,2,... \tag{4.4}$$

Так как функция предполагается дифференцируемой, то в качестве критерия останова в случае бесконечной итерационной последовательности $\{x^k\}$, как правило, выбирается условие $\|f'(x^k)\| < \varepsilon$, хотя могут быть использованы и другие критерии.

Метод градиентного спуска

Положим в (4.3) на каждом шаге $p^k = -f'(x^k)$. Если $f'(x^k) \neq 0$, то направление вектора p^k является направлением убывания функции f(x), причем в малой окрестности точки x^k направление p^k обеспечивает наискорейшее убывание этой функции. Поэтому можно найти такое $\alpha_k > 0$, что будет обеспечено выполнение условия (4.4).

Приведем алгоритм одного из вариантов метода градиентного спуска.

1. Задать параметр точности $\varepsilon > 0$, начальный шаг $\alpha > 0$, подобрать $x \in E_n$. Вычислить $f(x)$;

2. Найти $f'(x)$ и проверить условие достижения точности $\|f'(x)\| < \varepsilon$. Если оно выполнено, вычисления завершить, полагая $x^* = x$, $f^* = f(x)$. Иначе – перейти к п. 2;

3. Найти $y = x - \alpha f'(x)$ и $f(y)$. Если $f(y) < f(x)$, то положить $x = y$, $f(x) = f(y)$ и перейти к п.1, иначе – перейти к п.3;

4. Положить $\alpha = \alpha/2$ и перейти к п. 2.

Замечание. Вблизи стационарной точки функции $f(x)$ величина $\|f'(x)\|$ становится малой. Это может приводить к замедлению сходимости последовательности $\{x^k\}$. Поэтому иногда в (4.3) полагают $p^k = -f'(x^k)/\|f'(x^k)\|$, т.е. вместо $f'(x^k)$ используют вектор единичной длины того же направления.

Метод наискорейшего спуска

В этом варианте градиентного метода также полагают $p^k = -f'(x^k)$ и величина шага α^k из (4.1) находится в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$\Phi_k(\alpha) \to \min, \text{ где } \Phi_k(\alpha) = f(x^k - \alpha f'(x^k)),\ \alpha > 0, \qquad (4.5)$$

т.е. на каждой итерации в направлении антиградиента $-f'(x^k)$ совершается исчерпывающий спуск.

Опишем алгоритм метода.

1. Задать параметр точности $\varepsilon > 0$, выбрать $x \in E_n$;

2. Вычислить $f'(x)$ и проверить условие достижения точности: $\|f'(x)\| < \varepsilon$. Если оно выполнено, то положить $x^* = x$, $f^* = f(x)$ и поиск завершить, иначе – перейти к п. 2;

3. Решить задачу одномерной минимизации (4.5) для $x^k = x$, т.е. найти α^*. Положить $x = x - \alpha^* f'(x)$ и перейти к п. 1.

Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2_1 + 100x^2_2$ и используем метод наискорейшего спуска для решения задачи ее минимизации из начальной точки $x^0 = (1,1)$.

Найдем компоненты градиента $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$, и $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 200x_2$ и гессиан $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 200 \end{pmatrix}$. Величину шага исчерпывающего спуска найдем по формуле:

$$\alpha_k = -\frac{< f'(x^k), p^k >}{< Ap^k, p^k >} = -\frac{< Ax^k + b, p^k >}{< Ap^k, p^k >}, \qquad (4.6)$$

где p^k – направление поиска точки x^{k+1} из точки x^k.

Результаты вычислений приведены в таблице 13.

Таблица 13

Результаты расчетов методом наискорейшего спуска

Номер итерации	x^k_1	x^k_2	$f(x^k)$	$\|f'(x^k)\|$
0	1	1	101	200
1	$9{,}9\cdot10^{-1}$	$-9{,}9\cdot10^{-5}$	$9{,}8\cdot10^{-1}$	1,98
2	$9{,}7\cdot10^{-3}$	$9{,}7\cdot10^{-3}$	$9{,}5\cdot10^{-3}$	1,94
3	$9.6\cdot10^{-3}$	$-9{,}6\cdot10^{-7}$	$9{,}2\cdot10^{-5}$	$1{,}92\cdot10^{-2}$

Метод Ньютона

Пусть функция f(x) дважды дифференцируема в E_n. Тогда для нее можно записать разложение по формуле Тейлора в окрестности точки x^k:

$$f(x) = f(x^k) + (f'(x^k), x - x^k + \frac{1}{2} f''(x^k)(x - x^k), x - x^k) + o(\|x - x^k\|^2). \quad (4.7)$$

Отсюда видно, что поведение функции f (x) с точностью до величины порядка $o(\|x-x^k\|^2)$ может быть описано квадратичной функцией:

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{2} < f''(x^k)(x - x^k), x - x^k > + < f'(x^k), x - x^k > + f(x^k). \quad (4.8)$$

Минимизируем функцию $\Phi_k(x)$ вместо f(x). Найдем ее точку минимума x^{k+1} из условия $\Phi'_k(x) = 0$:

$$\Phi'_k(x) = f''(x^k)(x - x^k) + f'(x^k) = 0. \qquad (4.9)$$

Пусть матрица Гессе $f''(x^k)$ положительно определена при всех $x \in E_n$ и, следовательно, невырождена ($\det f''(x^k) > 0$). Тогда существует обратная матрица $[f''(x^k)]^{-1}$. Отметим, что квадратичная функция (4.7) с положительно определенной матрицей $f''(x^k)$ сильно выпукла и уравнение (4.8) определяет единственную точку глобального минимума функции $\Phi_k(x)$. Умножим слева обе части равенства (4.8) на матрицу $[f''(x^k)]^{-1}$ и найдем точку минимума x^{k+1} квадратичной функции (4.7), аппроксимирующей $f(x)$ в окрестности точки $x = x^k$:

$$x^{k+1} = x^k - [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k)\ , \ k = 0, 1, \ldots . \qquad (4.10)$$

Итерационный процесс, начатый из произвольной точки $x^0 \in E_n$, называется *методом Ньютона минимизации функции многих переменных.*

Очевидно, для квадратичной функции с положительно определенной матрицей A применение метода Ньютона обеспечивает получение точки глобального минимума ровно за один шаг из любой точки $x^0 \in E_n$.

Для выпуклой функции, отличной от квадратичной, применение этого метода обеспечивает, как правило, быструю сходимость. Дело в том, что на каждом шаге итерационного процесса (4.9) используется информация о поведении функции $f(x)$ в окрестности точки x^k, содержащаяся не только в значениях первых, но и вторых ее частных производных. Поэтому при прочих равных условиях следует ожидать более быструю сходимость метода Ньютона по сравнению с градиентными методами.

При выборе достаточно хорошего начального приближения $x^0 \in E_n$ минимизирующая последовательность $\{x^k\}$ для сильно выпуклой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ сходится к точке минимума с квадратичной скоростью $\rho(x^k, x^*) \le cq^{2^k}$, $q \in (0,1)$. Если же точка x^0 выбрана недостаточно близкой к точке x^*, то последовательность соответствует (4.9).

Отметим, что даже сходящаяся последовательность $\{x^k\}$ метода Ньютона не всегда обеспечивает монотонное убывание f(x), т.е. неравенство $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ для некоторых k = 0,1,.. может нарушаться. Этот недостаток устранен в обобщенном методе Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k), \qquad (4.11)$$

где величина $\alpha_k > 0$ находится на каждом шаге из условия исчерпывающего спуска по направлению $p^k = -[f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k)$.

Недостатком метода Ньютона является необходимость вычисления и обращения матрицы Гессе на каждой итерации.

Пример

Найти точку минимума функции $f(x) = 4x^2_1 + x^2_2 - 4x_1x_2 + x_1$ методом Ньютона из начальной точки $x^0 = (0,0)$.

Градиент $f'(x^0) = (-1,0)$, матрица Гессе $f''(x^0) = A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу $[f''(x^0)]^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. С помощью формулы (4.10) получаем $x^1 = x^0 - \alpha_k [f''(x^0)]^{-1} \cdot f'(x^0) = (-3/16, -1/8)$. Так как $f'(x^1) = (0,0)$, то задача решена: $x^* = x^1$. Целевая функция квадратичная, поэтому решение задачи получено за одну итерацию.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какова сущность прямых методов минимизации функции нескольких переменных?
2. Дайте характеристику метода минимизации по правильному симплексу.
3. Представьте алгоритм метода минимизации по правильному симплексу.
4. Дайте характеристику метода циклического покоординатного спуска.
5. Каков алгоритм метода циклического покоординатного спуска?
6. Приведите алгоритм метода Хука-Дживса.
7. Перечислите методы безусловной минимизации функции нескольких переменных с использованием производных.
8. Дайте характеристику метода градиентного спуска.
9. Приведите алгоритм метода градиентного спуска.
10. Дайте характеристику метода наискорейшего спуска.
11. Дайте характеристику метода Ньютона.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Понятия и этапы постановки оптимизационной задачи.
2. Математическая постановка задач оптимизации.
3. Классификация методов оптимизации.
4. Классификация методов математического программирования.
5. Понятия линейного и целочисленного программирования.
6. Понятия нелинейного, квадратического и дробно-линейного программирования.
7. Понятия дискретного, геометрического и стохастического программирования.
8. Признаки модели линейного программирования.
9. Математическая модель задачи линейного программирования.
10. Постановка и общий вид задачи оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии.
11. Постановка и общий вид задачи о смесях (рационе, диете).
12. Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом.
13. Алгоритм решения задачи линейного программирования симплексным методом.
14. Алгоритм решения задачи линейного программирования методом искусственного базиса (М-методом).
15. Двойственность в линейном программировании.
16. Анализ устойчивости оптимального плана.
17. Постановка транспортной задачи.
18. Методы построения первого опорного плана в транспортной задаче.
19. Алгоритм решения транспортной задачи.
20. Математическая модель задачи безусловной оптимизации функций одной переменной.
21. Сформулируйте необходимые условия оптимальности в задачах безусловной оптимизации функции одной переменной.
22. Алгоритм классического метода в задачах безусловной оптимизации функции одной переменной.
23. Прямые методы минимизации функций одной переменной.
24. Методы исключения отрезков.

25. Особенности метода деления отрезка пополам (дихотомии).

26. Алгоритм метода деления отрезка пополам (дихотомии).

27. Особенности метода золотого сечения.

28. Алгоритм метода золотого сечения.

29. Методы безусловной минимизации функции одной переменной с использованием производных. Особенности метода касательных.

30. Алгоритм метода касательных.

31. Прямые методы безусловной оптимизации функций нескольких переменных. Особенности метода минимизации по правильному симплексу.

32. Алгоритм метода минимизации по правильному симплексу.

33. Алгоритм метода циклического покоординатного спуска.

34. Алгоритм метода Хука-Дживса.

35. Методы безусловной минимизации функции нескольких переменных с использованием производных.

36. Алгоритм метода градиентного спуска.

37. Дайте характеристику метода наискорейшего спуска.

38. Метод Ньютона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для принятия обоснованного решения необходимо иметь и обработать большое количество информации, что связано со значительными затратами. В настоящее время недостаточно знать путь, ведущий к достижению цели. Необходимо из всех возможных путей выбрать наиболее экономичный, который наилучшим образом соответствует поставленной задаче.

Использование компьютеров создает огромные возможности для развития науки, совершенствования методов планирования и управления производством. Однако без строгих формулировок задач, без математического описания процессов современный уровень управления и планирования не может быть достигнут.

Теория оптимизации представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, позволяющих избежать полного перебора всех решений.Методы оптимизации – это методы построения алгоритмов нахождения оптимального (минимального или максимального) значения некоторой функции.

В учебном пособии систематически изложены основы методов оптимизации. В нем рассмотрены следующие теоретические и практические вопросы:

- понятия и классификация методов оптимизации;
- методы решения задач линейного программирования графическим, симплексным методами, методом искусственного базиса,решения транспортных задач;
- прямые методы решения задач безусловной оптимизации функций одной переменной и с использованием производной;
- прямые методы безусловной оптимизации функций нескольких переменных и с использованием производных.

Учебное пособие поможет обучающимся:

– развить логическое мышление, навыки математического исследования явлений и процессов, связанных с производственной деятельностью;

– овладеть умением формулирования задачи оптимального проектирования, выбирать и реализовывать метод ее решения.

– освоить теоретические и практические основы классических и современных методов оптимизации,

– выработать умения анализировать полученные результаты,

– сформировать навыки самостоятельного изучения предмета и применения методов оптимизации в решении прикладных задач.

Дальнейшее развитие теоретических и практических знаний по методам оптимизации обучающиеся могут получить при использовании изданий с методами решения по большему кругу задач, а также использования для решения современных программных средств на компьютере.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аксёнов, Е.П. Методы оптимальных решений: учебное пособие / М-во с.х. РФ; федеральное гос. бюджетное образов.учреждение высшего образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им.акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2016. – 90 с.
2. Аттетков, А.В. Методы оптимизации: <учебное пособие>* / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. – Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2013. - 269с.
3. Гармаш, А.Н. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва :Юрайт, 2017.
4. Гончаров, В.А. Методы оптимизации: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Гончаров. — Москва : Издательство Юрайт, 2019.
5. Дубина, И.Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / И. Н. Дубина. – Москва :Юрайт, 2017.
6. Есипов, Б.А. Методы исследования операций : учебное пособие /Б. А. Есипов. – Санкт-Петербург : Лань, 2013.
7. Исследование операций в экономике: учебник для академического бакалавриата / под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва :Юрайт, 2018.
8. Косников, С.Н. Математические методы в экономике : учеб.пособие для вузов / С. Н. Косников. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 172 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04098-2.
9. Кочегурова, Е.А. Теория и методы оптимизации : учебное пособие для академического бакалавриата / Е. А. Кочегурова. – Москва : Юрайт, 2016.
10. Методы оптимизации: теория и алгоритмы: учебное пособие для академического бакалавриата / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. М. Метельский, С. А. Богданович. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2018.
11. Методы оптимизации: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, Б. А. Будак, Л. А. Артемьева; под ред. Ф. П. Васильева. – Москва : Юрайт, 2018.
12. Попов, А.М. Экономико-математические методы и модели : учебник / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2019.
13. Черняк, М.Ю., Эльберг М.С. Методы оптимизации в технике : практикум / М.Ю. Черняк , М.С. Эльберг. – Красноярск, 2017.
14. Шевалдина, О.Я. Математика в экономике: учебное пособие для вузов / О. Я. Шевалдина ; под науч. ред. В. Т. Шевалдина. – Москва :Юрайт, 2017.
15. Щетинин, Е.Ю. Математические методы оптимизации и оптимальных процессов : учебное пособие / Е.Ю. Щетинин. – Москва : СТАНКИН, 2015.
16. Юрьева, А.А. Математическое программирование: учебное пособие / А. А. Юрьева. – Санкт-Петербург : Лань, 2014.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронный каталог библиотеки Пермского ГАТУ [Электронный ресурс] : базы данных содержат сведения о всех видах лит., поступающей в фонд библиотеки Пермского ГАТУ. – Электрон. дан. (251 141 запись). – Пермь: [б.и., 2005]. Доступ не ограничен. https://pgsha.ru/generalinfo/library/webirbis/

2. Собственная электронная библиотека. Доступ не ограничен https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/

3. Система ГАРАНТ: электронный периодический справочник [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (7162 Мб: 887 970 документов). – [Б.и., 199 -]; Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

4. ConsultantPlus: справочно - поисковая система [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (64 231 7651 документов) – [Б.и., 199 -]. Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

5. ЭБС издательского центра «Лань» - «Ветеринария и сельское хозяйство», «Лесное хозяйство и лесоинженерное дело»; «Инженерно-технические науки», «Информатика», «Технологии пищевых производств», «Доступ к произведениям отдельно от Разделов (39 наименований)». http://e.lanbook.com/ Доступ не ограничен.

6. Электронно-библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» www.biblio-online.ru

7. Электронная библиотечная система «Национальный цифровой ресурс «Руконт». Коллекция «Электронная библиотека авторефератов диссертаций ФГБОУ ВПО РГАУ МСХА имени К.А. Тимирязева» (массив документов с 1992 года по настоящее время), тематическая коллекция «Сельское хозяйство. Лесное дело. http://rucont.ru/ Доступ не ограничен.

8. ООО Научная электронная библиотека. Интегрированный научный информационный портал в российской зоне сети Интернет, включающий базы данных научных изданий и сервисы для информационного обеспечения науки и высшего образования. (Включает РИНЦ- библиографическая база данных публикаций российских авторов и SCIENCE INDEX- информационно - аналитическая система, позволяющая проводить аналитические и статистические исследования публикационной активности российских ученых и научных организаций). http://elibrary.ru/. Доступ не ограничен.

9. ООО «ИД «Гребенников». Электронная библиотека Grebennikon содержит статьи, опубликованные в специализированных журналах Издательского дома «Гребенников», где освещается широкий спектр вопросов по экономике (в том числе – по маркетингу, менеджменту, управлению персоналом, управлению финансами и т.д.). http://grebennikon.ru. Доступ не ограничен.

10. ООО «Ай Пи Эр Медиа». База данных ЭБС IPRbooks. Тематические коллекции через платформу Библиокомплектатор «Информатика и вычислительная техника», «Геодезия. Землеустройство», «Технические науки». http://www/bibliocomplectator.ru/. Доступ не ограничен.

11.ООО «ПОЛПРЕД Справочники». ЭБС Polpred.com Полпред. ком). Доступ к электронным изданиям «Агропром в РФ и за рубежом. Доступ не ограничен. Обзор СМИ.