Министерство сельского хозяйства РФ
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д.Н. Прянишникова»

Кафедра финансов, кредита и экономического анализа

Финансовая математика

Методическое пособие к практическим занятиям для студентов очной и заочной форм обучения по специальностям:
080105 «Финансы и кредит»
080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»

Пермь 2011

УДК 658.57

Финансовая математика: задачи, методические указания, контрольные вопросы.

В.Д. Фрезе: ФГОУ ВПО «Пермская ГСХА» - 3-е издание переработанное и дополненное. Пермь: издательство ФГОУ ВПО «Пермская ГСХА», 2011.-66 с- экз.

Рецензенты:
Г.Г. Зорин, к.э.н., профессор.
В.П. Мехоношина, к.э.н., доцент.

Методические указания подготовлены для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов, контроля знаний по дисциплине, освоения ими методики решения задач по финансовым операциям и коммерческим сделкам. По каждой теме кратко изложены методики расчетов, условия задач, вопросы для текущего контроля знаний.

Методические рекомендации предназначены для практических занятий и самостоятельной работы студентов очной и заочной формы обучения по специальностям «Финансы и кредит» и «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение в финансовую математику

Финансовая математика охватывает определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях сделки или финансово-банковской операции оговариваются конкретные значения 3 видов параметров, а именно:

- стоимостные характеристики (размеры платежей, договорных обязательств, кредитов);

- временные данные (даты, сроки выплат);

- специфический параметр – процентная ставка.

Эти параметры в рамках одной операции равноправны. Между ними существуют функциональные зависимости.

1) Предмет финансовой математики – изучение функциональных зависимостей между данными параметрами и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса.

Финансовая математика позволяет решать многие задачи, которые явно или неявно присутствуют в любой финансово-банковской операции или коммерческой сделке.

2) Время как фактор в финансовых результатах: В финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с моментами времени – сроки, дата, периодичность поступлений средств или выплат денег. Фактор времени играет не меньшую роль, чем сами денежные суммы. Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса финансирования и кредитования и выражается в виде принципа неравноценности денег, относящихся разным моментам времени. Данная концепция неравноценности денежных средств, относящихся к различным моментам времени использует 2 метода – метод наращивания и метод дисконтирования стоимости.

3) Основные категории в финансовой математике:

- Процентные деньги (проценты) – абсолютная величина дохода от представления денег в долг, в любой ее форме.

- Процентная ставка - относительная величина дохода (темп прироста) за фиксированный отрезок времени к первоначальной сумме долга.

- Период начисления – временной интервал, к которому приурочена процентная ставка.

- Интервал начисления – минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов.

- Наращение (рост) – процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов (компаундинг)

- Наращенная сумма – сумма первоначального долга с начисленными на него процентами.

Относительно момента выплаты или начисления дохода за пользование предоставленными денежными средствами проценты подразделяются на обычные и авансовые.

Обычные (декурсивные) начисляются в конце периода относительно исходной величины средств. Доход на процент выплачивается в конце периодов финансовой операции.

Если же доход, определяемый процентами, выплачивается в момент предоставления кредита, то такая форма расчетов называется авансовый или учетом, а применяемые проценты авансовыми (антисипативными), которые начисляются в начале периода относительно конечной суммы денег.

Учетная ставка – относительная величина снижения дохода (темп снижения) за фиксированный отрезок времени к наращенной сумме долга.

Дисконтирование – процесс определения любой стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит некоторую фиксированную сумму денег.

Современная (приведенная) сумма – величина, найдена дисконтирование наращенной суммы.

Тема 1. Простые проценты

1.1 Наращение по простым процентам

Наращение по простым процентам применяется, как правило, при сроке $n \leq 1$ года, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются и база для начисления процентов остается постоянной.
где P – первоначальная сумма долга;

Процентные деньги $J = nPi$ (1.1)

Формула наращения простых процентов $S = P+J= P(1+ ni)$ (1.2)

$(1+ni)$ – множитель наращивания, показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы ссуда.

Если срок суды измеряется в днях или месяцах, то $n = t / K$,

S – наращенная сумма (сумма в конце срока)

i – процентная ставка

n – срок ссуды, n = 1 … N

J – проценты за весь срок ссуды

К – временная база (12 мес. или 365 дней)

Используется три способа начисления процентов:

1) Обыкновенный (коммерческий) процент с приближенным числом дней суды – год 360 дней, месяц 30 дней.

2) Обыкновенный (коммерческий) процент с точным числом дней ссуды – год 360 дней и точное число дней, на которые выдана ссуда (по календарю).

3) Точный процент с точным числом дней ссуды – год 365 (366) дней и точное число дней, на которые выдана ссуда (по календарю).

Когда в кредитном договоре предусмотрены переменные во времени процентные ставки, применяется формула:

$$S = P\,(1+ \sum n_t\, i_t) \qquad (1.3)$$

n – число периодов начислений в году.

При инвестирование средств по простой ставке процента, прибегают к неоднократному повторению операции в пределах заданного срока N, то есть дальнейшему реинвестированию наращенных на каждом шаге операции средств.

В этом случае наращенная сумма:

$$S = P\,(1+ \sum n_1 i_1)\,(1+ \sum n_2 i_2)\,\ldots\,(1+ \sum n_к i_к) \tag{1.4}$$

В случае, когда периоды $n_1 = n_2 = n_m = n$;

Ставка процента $i_1 = i_2 = i_к = i$:

$$S = P\,(1+ \sum ni)^m \tag{1.5}$$

1.2 Процентные вычисления с использованием постоянного делителя (дивизора)

Формула (1.1.) может быть преобразована $Y = \dfrac{P*n*i}{100}$,

(i в %), если n=1, то получается однопроцентный доход

Когда проценты начисляются ежемесячно, то $Y = \dfrac{P*m*i}{100}$,

где m – количество месяцев.

Если продолжительность года измерена в днях (360 или 365), то

$Y = \dfrac{P*i*t}{36000}$ или $Y = \dfrac{P*i*t}{36500}$,

Поскольку в практических расчетах величины P, m и t – часто меняются, а продолжительность года постоянна, процентная ставка длительное время остается постоянной, то проценты определяются по формуле:

$$Y = \frac{P*t}{36000/i} \quad \text{или } Y = \frac{P*t}{36500/i}, \tag{1.6}$$

где P*t - процентное число, а частное от 36000/i или 36500/I – процентный ключ или постоянный делитель (дивизор).

Т. О. общая сумма дохода определяется, как сумма процентных чисел, деленная на дивизор.

1.3 Дисконтирование и учет

Различается два вида дисконтирования: математический и банковский или коммерческий учет.

Задача математического дисконтирования состоит в том, чтобы по заданной сумме S, которую необходимо уплатить через n лет, следует определить сумму полученной ссуды, то есть надо решить задачу, обратную задаче наращивания.

$$P = \frac{S}{1+ni} \text{ - по процентным ставкам} \qquad (1.7)$$

где 1/ (1+ ni) – дисконтный множитель, показывающий долю P в величине S.

D = S –P – дисконт суммы S

Суть банковского учета состоит в следующем: банк до наступления срока платежа по векселю приобретает вексель у владельца по цене, меньшей суммы S, указанной на нем, то есть он учитывает вексель с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует дисконт, то есть получает прибыль. Владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги, хотя и не в полном объеме, но раньше указанного на векселе срока.

По этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка d.

D =Snd – размер дисконта

$$P = S – Snd = S(1\text{-}nd), \qquad (1.8)$$

где n – срок от момента учета до даты погашения векселя

(1-nd) – дисконтный множитель

n = t /k

Наращение по учетной ставке применяется в тех случаях, когда необходимо определить возможно сумму, которую надо поставить в бланке векселя, когда задана текущая сумма долга P и учетная ставка d.

$$S = P / (1\text{-}nd), \qquad (1.9)$$

где 1 / (1-nd) – множитель наращения по учетной ставке.

1.4 Определение срока ссуды и величины ставок

Срок ссуды и величину ставок находят решением формул наращения и дисконтирования, относительно неизвестных величин. Сроки ссуды:

$$n = \frac{S-P}{Pi} \tag{1.10}$$

$$n = \frac{S-P}{Sd} \tag{1.11}$$

$$t = \frac{S/P-1}{i} * k \downarrow \tag{1.12}$$

$$t = \frac{1-S/P}{d} * k \downarrow \tag{1.13}$$

Ставки:

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{Pt} * k \downarrow \tag{1.14}$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{St} * k \downarrow \tag{1.15}$$

1.5 Потребительский кредит

Простые процентные вычисления часто используются в потребительском кредите. Возможны различные схемы расчетов, наиболее часто используемые:

- погашение кредита равными частями;

- погашение изменяющимися суммами;

- метод счета « от ста».

При погашении кредита равными частями наращена сумма долга определяется по формуле (1.2), а сумма разового погасительного платежа зависит от числа погасительных платежей в году (m):

$$q = \frac{S}{nm} \tag{1.16}$$

где q – сумма погасительного платежа;

n – срок кредита в годах;

m – число погасительных платежей в году.

При погашении кредита изменяющимися суммами раздельно определяется единовременная сумма по основному долгу и процентам. Для решения этого вопроса используется, «правило 78» (сумма порядковых номеров месяцев года). Абсолютная величина процентного платежа в каждом платежном периоде будет равна:

$$J_{ti} = \frac{t_i}{\sum t_i} * J \qquad (1.17)$$

где J - сумма всех процентных платежей;

t_i - порядковый номер месяца;

$\sum t_i$ - сумма порядковых номеров месяцев.

Сумма погашенного долга на конец периода (К) равна:

$$Wk = Vk - \sum_{t=1}^{t=k} t_i \frac{p * n * i}{\sum t_i} \qquad (1.18)$$

где Vk – оставшаяся часть непогашенного долга на момент К.

Методов счета «от ста»: для 1-го месяца (периода), процентный платеж рассчитывается на всю сумму долга, а в каждый следующий месяц – на оставшуюся часть долга; основной долг выплачивается равными суммами.

Процентный платеж за любой месяц определяется по формуле:

$$J_m = \frac{p * i}{1200} * \left[1 - \frac{(m-1)}{m}\right] \qquad (1.19)$$

1.6 Условия задач

1) Сумма в 100 тыс. руб. вложена фермером в банк на 6 месяцев под 15% годовых. Найти величину суммы, которая будет получена через 6 месяцев

2) Определить сумму средств к погашению кредита в размере 2000 тыс. руб., полученного на 30 дней под 12% годовых.

3) В не високосном году аграрное формирование взяло ссуду 3 января и должно отдать ее 13 мая на условиях 10% годовых при простом проценте. Во сколько раз вырастет долг при расчете по варианту:

- коммерческого (обыкновенного) процента с приближенным числом дней ссуды?

- коммерческого процента с точным числом дней ссуды?

- точных процентов с точным числом дней суды?

4) Банк выдал ссуду на сумму 100 тыс. руб. клиенту А на срок 2 месяца, затем деньги, полученные от клиента А, клиенту В на срок 3 месяца, деньги полученные от клиента В, выдал клиенту С на 5 месяцев, и наконец от клиента С, клиенту D на 2 месяца. Все ссуды были выданы под 10% годовых (расчет по варианту простого коммерческого процента). Какую сумму вернет банку клиент D, и под какую реальную процентную ставку банк осуществлял свои операции?

5)Банк обязуется выплачивать по вкладу 2% ежемесячно. Какой годовой процент Вы получите по своему вкладу, если:

- будете забирать проценты ежемесячно, и тратить их на свои нужды;
- будете вкладывать проценты в тот же банк на тех же условиях?

6) Банк продает депозитные сертификаты: сроком на 3 месяца под 15% годовых, на 6 месяцев - под 20% годовых; на год под 25%. Какую из названных ниже стратегий выгоднее выбрать:

- купить сертификат сроком на 3 месяца (или 6 мес.), получить проценты и потратить их;
- купить сертификат на год и получить доход по повышенной процентной ставке;
- докупать ежеквартально (или каждые полгода) депозитные сертификаты па сумму, равную величине полученных процентов.

7) Определите размер ссуды к концу срока тремя способами по каждому варианту:

- коммерческого (обыкновенного) процента с приближенным числом дней ссуды;
- коммерческого процента с точным числом дней ссуды;
- точных процентов с точным числом дней ссуды

№	Первоначальная сумма долга, тыс. руб.	Ставка простого процента, %	Дата получения ссуды	Дата возврата ссуды	Размер ссуды к концу срока, тыс. руб.
1	100	10	01.06	01.10	

2	50	12	01.12	21.12	
3	120	8	01.04	11.05	

8) Определить наращенную сумму долга к концу года, если первоначальная сумма долга, полученного с.-х. предприятием - 1000 тыс. руб., первый квартал предусмотрено увеличение долга на 10 % годовых, каждый следующий квартал ставка повышается па 2 %.

9) 20.05 открыт счет в сумме 200 тыс. руб. под процентную ставку – 8% годовых; 10.07. на счет было дополнительно внесено 50 тыс. руб., 15.10. со счета было снято 75 тыс. руб., а 20.12 счет закрыт. Определить общую сумму полученную вкладчиком при закрытии счета.

10) Известно, что разность между суммой, вложенной в банк на 240 дней под 10% годовых и суммой полученных процентов составляет 300 тыс. руб. Определить величину сумму, помещенную в банк и сумму процентных платежей.

11) Банк предоставил клиенту кредит на 6 мес. С 15.03. по 15.09. под залог 100 акций, курсовая стоимость которых в день выдачи кредита составляет 80% курсовой стоимости залога, кредит выдается под 10% годовых; за обслуживание долга банк взимает 0,5% от номинальной суммы кредита. Определить размер кредита, полученного клиентом банка.

12) Клиент банка, получивший кредит до 15.09. (задача 11), в установленный срок сумел погасить только 75% основного долга и одновременно получил соглашение банка на отсрочку уплаты оставшейся части долга до 15.12. по ставке 11% годовых. Определить величину остатка основного долга и проценты на него.

13) Имеется обязательство погасить за 1,5 года (с 12.05.2009 по 12.11.2011) долг в сумме 10 млн. руб. Кредитор согласен получать частичные платежи. Проценты начисляются по 10% годовых. Частичные поступления характеризуются следующими данными (тыс. руб.):

12.09.2009 – 500

12.08.2010 – 2000;

30.08.2011 – 5000;

12.11.2011 - ?

14) Петров перед выходом на пенсию решил положить некоторую сумму в банк, который начисляет 1% ежемесячно. Какую сумму надо положить в банк, если Петров планирует каждый месяц снимать со счета проценты в размере 500 руб.?

15) Сидорову через год необходима сумма в 200 тыс. руб. Фирма, в которой он работает, согласна предоставить ему беспроцентную ссуду на 1 год. Сидоров намерен эту ссуду внести в банк на 1 год, который начисляет 8% годовых, для того, чтобы через год получить необходимую ему сумму, а также вернуть ссуду в фирму.

16) Через 210 дней с момента подписания контракта приусадебное хозяйство должно уплатить 300 тыс. руб. Кредит предоставлен под 12,0% годовых. Определить, какую сумму получит должник на настоящий момент и сумму дисконта?

17) Векселедержатель - (с.-х. фирма «Колос» предъявила для учета вексель па сумму 50 тыс. руб. со сроком погашения 28.09. Вексель предъявлен 13.09. Банк согласился учесть вексель с дисконтом 15% годовых. Определить сумму, которую получит векселедержатель? комиссионные банка?

18) Банк согласился учесть вексель, предъявленный СХПК «Труженик», па сумму 1000 тыс. руб. за 60 дней до срока погашения. Определить сумму вексельного кредита, если ставка дисконта 10 % годовых.

19) Предприятие продало товар на условиях., потребительского кредита с оформлением простого векселя. Номинальная стоимость 75 тыс. руб., срок векселя 60 дней. Ставка процента за предоставленный кредит15 % годовых. Через 45 дней с момента оформления векселя предприятие решило учесть вексель в банке; предложенная банком ставка составляет 10 %. Рассчитать суммы получаемые предприятием и банком?

20) Через сколько дней долг, взятый СХПК «Россия» и равный 10 млн. руб., вырастет до 12,5 млн. руб., при условии, что на сумму долга начисляются простые проценты при ставке 12,0 %?

21) В контракте предусматривается погашение обязательства через 220 диен в сумме 135 тыс. руб., первоначальная сумма долга 120 тыс. руб. Необходимо определить доходность операции для кредитора в виде учетной станки и ставки процентов.

22) Кредит для покупки товара в сумме 180 тыс. руб. предоставлен предпринимателю на 1,5 года, процентная ставка 10%, погашение в конце каждого месяца. Каков должен быть ежемесячный погасительный платеж?

23) Сумма долга по кредиту через 2 года составит 200 тыс. руб. Ставка ссудного процента 12%. Погашение кредита ежеквартальное. Каков ежеквартальный погасительный платеж? Каков размер уплаченных процентов?

24) Автомашина стоимостью 400 тыс. руб. продана в кредит под 10% годовых. Погашение задолженности производится ежемесячными платежами в течение 2-х лет. Составит план погашения задолженности, чтобы сумма ежемесячной платы по кредиту оставалась постоянной величиной. Оформить план погашения в виде таблицы, где указать: порядковые номера месяцев, удельный вес каждого процентного платежа в общей сумме процентов, сумму ежемесячных процентных платежей, остаток долга на начало каждого месяца, сумму погашения основного долга каждый месяц.

25) Предоставлен потребительский кредит в размере 25 тыс. руб. На 6 месяцев под 12% годовых с ежемесячным погашением. Составить план погашения кредита (амортизации долга) методом счета «от ста». Оформить план в виде таблицы, в которой указать: порядковые номера месяцев, процентные платежи, месячную выплату основного долга, непогашенную сумму основного долга, сумму месячного погашенного взноса.

1.7 Контрольные вопросы

1) Отличительные особенности начисления простых процентов.

2) Понятие наращения и дисконтирования. Различие логики финансовых операций.

3) Что понимается в финансовых расчетах под:

- процентами (процентными деньгами);

- процентной ставкой (формула);

- периодом начисления;

- наращенной суммой.

4) Какое различие между декурсивными и антисипативными процентами?

5) Формула наращения простых процентов:

- при интервале, заданного в годах;

- при интервале, заданного в месяцах;

- при интервале, заданного в днях;

- при реинвестировании.

6) Способы начисления по простым процентам, содержание каждого из них;

7) Содержание терминов:

- множитель наращения;

- процентное число;

- дивизор;

- метод счета «от ста».

8) Виды дисконтирования, их содержание и различие;

9) Понятие и определение:

- учетной ставки;

- дисконта;

- современной величины.

10) Докажите различие в результатах математического дисконтирования и банковского учета;

11) Докажите различие в результатах наращения по ставке ссудного процента и учетной ставке;

12) Объясните возможность совмещения наращения и дисконтирования

13) Как определить (при прочих заданных условиях):

- продолжительность ссуды;

- величину процентной или учетной ставки.

14) Вычисления с использованием основной пропорциональной зависимости;

15) Способы погашения в потребительском кредите, их методическое отличие.

Тема 2. Сложные проценты

В долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяется к сумме долга, для определения суммы долга, как правило применяют сложные проценты. База для начисления сложных процентов (в отличии от простых) не остается постоянной – она увеличивается с каждым шагом во времени, и процесс роста первоначальной суммы ссуды (ее наращение) происходит с ускорением. Происходит вычисление «процента на процент» или капитализация процентов.

2.1 Наращение и дисконтирование по сложным процентным ставкам:

- число периодов наращения целое число лет расчет ведется по формуле:

$$S= P(1+i)^{n} \qquad (2.1)$$

где $(1+i)^{n}$ – множитель наращения (декурсивный коэффициент, показывающий конечную стоимость одной денежной единицы);

- меняющиеся во времени, но фиксированные процентные ставки:

$$S=P(1+i_1)^{n1} * (1+i_2)^{n2}\ldots(1+i_k)^{nk} \qquad (2.2)$$

где $i_{1,}\ i_2\ldots i_k$ – последовательные значения ставки процентов;

$n_{1,}\ n_2\ldots n_k$ - периоды, в течении которых действуют соответствующие ставки;

- когда число периодов дробное число лет, то расчет ведется по формуле (2.1) или смешанным методом:

$$S=P(1+i)^{a} *(1+bi) \qquad (2.3)$$

где n = a+b; a – целое число лет, b - дробная часть года;

- если число периодов начисления в году несколько(m_1), то расчет ведется по номинальной ставке:

$$S=P(1+j/m)^{mn} \qquad (2.4)$$

где j – годовая ставка при «m» - разовом начислении в году (номинальная ставка); или по эффективной ставке

$$S=P(1+i_э)^{n} \qquad (2.5)$$

где $i_э$ – эффективная (эквивалентная номинальной) ставка, дающая тот же финансовый результат, что и «m» - разовое наращение в год по ставке j/m:

$$i_э=(1+j/m)-1 \quad (2.6)$$

Формулы математического дисконтирования выводятся путем решения формул наращения (2.1; 2.4) относительно величины «P».

$$P= S/(1+i)^n \quad (2.7)$$

$$P=S/(1+j/m)^{mn} \quad (2.8)$$

Где $1/(1+i)^n$ и $1/(1+j/m)^{mn}$ – дисконтные (учетные) множители,

Д=S-P – дисконт суммы «S»

2.2 Дисконтирование и наращение по сложным учетным ставкам

Процесс дисконтирования по сложной учетной ставке (в отличие от простой) происходит с замедлением, так как на каждом шаге во времени учетная ставка применяется не к первоначальной сумме, а к сумме уменьшенную на величину дисконта, определенного на предыдущем шаге.

$$P=S\ (1-d_c)^n \quad (2.9)$$

где d_c – сложная учетная ставка,

$(1-d_c)^n$ – дисконтный множитель, показывающий какую часть первоначальная сумма составляет в наращенной сумме.

Если дисконтирование производится «m» раз в году применяют номинальную учетную ставку (f)

$$P=S\ (1-f/m)^{mn} \quad (2.10)$$

или эффективную учетную ставку эквивалентную номинальной при заданном значении «m»

$$d_c=1-(1-f/m)^m \quad (2.11)$$

Наращение по сложным процентам учетным ставкам ведется по формулам:

$$S=P/(1-d_c)^n \quad (2.12)$$

и

$$S=P/(1-f/m)^{mn} \quad (2.13)$$

полученным в результате решения зависимости (2.9 и 2.10) относительно «S» (сложные антисипативные проценты).

2.3 Непрерывное наращивание и дисконтирование

Для адекватного описания сложных, непрерывных производственных и хозяйственных явлений, для их финансово-экономического анализа применяют непрерывное наращение и дисконтирование. При непрерывном наращении применяются особый вид процентной ставки – сила роста. Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечном малом промежутки времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени. Наращенная сумма определяется:

$$S = Pe^{бп} \qquad (2.14)$$

где б – постоянная сила роста которая представляет собой номинальную (j) ставку процентов при m = ∞;

e – основание натурального логарифма или число Эйлера равное – 2.73

Современная величина платежа определяется путем решения уравнения (2.14) относительно «Р»:

$$P = Se^{-бп} \qquad (2.15)$$

2.4 Определение срока платежа и процентных ставок

При разработке финансовых операций возникает необходимость решения обратных задач относительно наращения и дисконтирования – определение продолжительности ссуды, числа периодов наращения, ставки процентов или учетной ставки. Для этого необходимо решить уравнения, связывающие величины S и P, относительно неизвестных в каждом случае величин.

$$n\uparrow = \frac{\ell oq S/P}{\ell oq(1+i)}$$ - при наращении по сложной годовой ставке; (2.16)

$$n\uparrow = \frac{\ell oq S/P}{m(\ell oq 1 + j/m)}$$ - при наращении по номинальной ставке; (2.17)

$$n \uparrow = \frac{\ell oq P / S}{\ell oq(1 - dc)}$$

- при дисконтировании по сложной годовой учетной ставке; (2.18)

$$n = \frac{\ell oq P / S}{m \ell oq(1 - f / m)}$$

- при дисконтировании по номинальной учетной ставке; (2.19)

$$n = \frac{\ell n S / P}{\sigma}$$

- при наращении по постоянной ставке непрерывных процентов; (2.20)

Соответственно определяются ставки:

$$Ic = (S/P)^{1/n} - 1 \quad (2.21)$$

$$j = m\ ((S/P^{1/mn} - 1)) \quad (2.22)$$

$$dc = 1 - (P/S^{1/n}) \quad (2.23)$$

$$f = m\ (1 - P/S^{1/mn}) \quad (2.24)$$

$$\sigma = \frac{\ell n S / P}{n} \quad (2.25)$$

2.5 Наращение процентов и инфляция

В приведенных выше формулах (2.1; 2.2; 2.3; 2.4) все величины измерялись по номиналу, не принималось во внимание реальная покупательная способность денег, то есть последствия инфляции.

В финансовых расчетах используются два способа учета инфляции:

1) Корректировка первоначальной суммы на индекс инфляции:

$$J_u = (1 + L)^n \quad (2.26)$$

где L – прирост инфляции;

$$C = P\ (1 + i)^n\ (1 + L)^{-n} = P \left(\frac{1+i}{1+L}\right)^n \quad (2.27)$$

где C – реальная наращенная сумма,

$[(1 + i) / (1 + L)]^n$ – множитель наращения с учетом инфляции.

2) Индексация ставок процентов:

$$Z = I + L + I + i \quad (2.28)$$

где Z - брутто-ставка с поправкой на инфляцию.

2.6 Условия задач

1. В какую сумму обратиться долг СХПК «Труженик», равный 100 тыс. руб. через 5 лет при росте в сложной ставке 6%.

2. Определять будущую стоимость капитала, если первоначальная его стоимость 10 млн. руб., срок инвестирования 5 лет, ставка процента5 % годовых.

3. Кредит в размере 300 тыс. руб. выдан агрофирме «Труд» на срок 2 года и 90 дней. Обусловлена ставка 5 % и смешанный способ начисления процентов. Какой будет сумма долга к концу срока контракта?

4. Инвестор располагает свободным капиталом в 1200 т.р. и желает положить эту, в банк на депозит сроком на 2 года. Имеются 2 варианта размещения денег: 1) банк «Ост» предлагает условия на 2 года депозитного срока начисляется ежегодно доход из расчета 10 годовых; 2) банк «Вест» предлагает вариант - срок депозита 2 года, доход начисляется ежеквартально из расчета 8% годовых. Какой вариант следует выбрать инвестору?

5. Первоначальная сумма ссуды, выданной фирме «Колос», составляет 200 тыс. руб., срок 5 лет, проценты начисляются в конце каждого квартала, номинальная ставка 5%. Определить наращенную сумму ссуды.

6. Необходимо определить современную величину 500 тыс. р., которые будут выплачиваться через 3 года. При расчете применяется ставка сложных процентов, равная 6%.

7. Определить сумму вклада сегодня, чтобы через 2 года иметь накопления в размере 10000 руб. Годовая ставка рефинансирования ЦБ 10%.

8. Какова сумма дисконта при продаже ценных бумаг на сумму 500 тыс. руб., если срок их погашения 3 года. Применяется сложная годовая учетная ставка равная 4%.

9.Обязатсльство, взятое приусадебным хозяйством «Бекон», равное 200 тыс. руб. должно быть через 5 лет, учетная ставка – 6%, начисление дисконта поквартальное. Найти современную величину обязательства и эффективную учетную ставку.

10. Найти наращенную сумму долга, взятого фирмой «Рожь», первоначальная сумма которого составляет 100 тыс. руб. Срок погашения 2,5 года, наращение по учетной ставке ежеквартальное, ставка – 6%.

11. Первоначально выданная агрофирме «Колос» сумма ссуды равна 100 тыс. руб. Определить наращенную сумму через пять лет при использовании простой и сложной ставок процентов в размере 10% годовых. Решить этот пример также для случаев, когда проценты начисляются по полугодиям, поквартально, непрерывно.

12. Первоначальная сумма долга, выданная банком предприятию «Сыродел», равняется 200 тыс. руб. Определить величину наращенной суммы через три года при применении декурсивного и антисипативного способа начисления процентов. Годовая ставка 10%.

13. За какой срок первоначальный капитал в 50 тыс. руб. увеличится до 200 тыс. руб., если:

а) на него будут начисляться сложные проценты по ставке 10% годовых;

б) проценты будут начисляться ежеквартально?

14. Какова должна быть сложная ставка ссудного процента, чтобы первоначальный капитал вырос в 1,5 раза за 2 года? Решить пример также для случая начисления процентов по полугодиям.

15. В условиях выпуска сертификата Сбербанка 100 тыс. руб. предусмотрен выкуп суммы, зависящей от срока хранения. При пятилетнем сроке выплачивается 1,4; при десятилетнем 2,6 первоначальной суммы. Каковы значения годовых сложных ставок процентов, дающих такое наращение?

16. Вексель выписан на срок 2 года. Какая должна быть учетная ставка, чтобы при учете векселя владелец получил 90% его суммы?

17. Кредит в размере 2 млн. руб. выдан на 2,5 года; реальная доходность должна составляет 8% годовых; предполагаемых уровень инфляции 10 % в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита, наращенную сумму.

18. Определить недостающие показатели финансовых сделок, в которых применялись сложные проценты:

№ варианта	первоначальная величина вклада, тыс. руб.	процентная ставка за период, %	количество период начисления	величина вклада в конце срока
1	300	2	12	?
2	500	6	5	?
3	500	5	?	4650
4	400	?	20	13300
5	250	?	9	2650
6	?	10	30	8725

19. Кредит в 5 млн. руб. выдан на 2 года под реальную годовую ставку 8%, прогноз прироста инфляции 12% в год. Какова наращенная сумма долга с учетом инфляции.

20. Петров через один год оканчивает школу и намерен получить образование в высшем учебном заведении. На каждый год учебы (5лет) ему необходимо 50 тыс. руб. Родители Петрова намерены поместить некоторый капитал в банк под 8% годовых с тем, чтобы в конце каждого года снимать со счета проценты в размере требуемой суммы.

Определить величину первоначального капитала.

2.7 Контрольные вопросы

1) Каковы отличительные особенности начисления сложных процентов по сравнению с простыми?

2) Обоснование формулы наращивания сложных годовых процентов

3) Как определить наращенную сумму при меняющихся во времени фиксированных ставках?

4) Каково соотношение между множителями наращения простых и сложных процентов

5) Способы определения наращенной суммы при дробном числе лет

6) Понятие годовой номинальной и эффективной ставок процентов. Соотношение между номинальной и эффективными ставками.

7) Формулы наращения по номинальной ставке процентов при полном и неполном числе периодов.

8) Математический учет по сложным процентным ставкам

9) Понятие годовой, номинальной и эффективной учетных ставок. Соотношение между номинальной и эффективной учетной ставками.

10) Как производится дисконтирование (формулы) по различным учетным ставкам;

11) Почему (доказать) учетная ставка отражает фактор времени более «жестко»

12) Особенности наращения и дисконтирования по непрерывным процентным ставкам

13) Определение срока платежа при прочих заданных условиях

14) Определение размера процентной ставки при прочих заданных условиях

15) Способы учета инфляции при наращении процентов.

Тема 3. Финансовая эквивалентность обязательств

3.1 Эквивалентность ставок

Если разнородные процентные ставки в конкретных условиях сделки приводят к одному в тому же финансовому результату, то в этом случае они являются эквивалентными.

Эквивалентные процентные ставки - это такие процентные ставки разного вида, применение которых при одинаковых начальных условиях дает одинаковые финансовые результаты.

Соотношения между ставками определяется на основе уравнения эквивалентности (приравнивание множителей наращения)

Эквивалентность простых ставок:

$$i = d / (1-nd) \tag{3.1}$$

$$d = i / (i+ni) \tag{3.2}$$

Эквивалентность простых и сложных процентных ставок:

$$i_n = [(1+i_c)^n - 1]/n \tag{3.3}$$

$$i_c = [(1+ni)^{1/n} - 1 \tag{3.4}$$

$$i_c = [(1+j/m)^{mn} - 1]/n \tag{3.5}$$

$$j = m\ [(1+ni)^{1/mn} - 1] \tag{3.6}$$

$$i_n = [(1+nd)^{-1/n} - 1 \tag{3.7}$$

$$d = 1/n\ [1-(1+i)^{-n}] \tag{3.8}$$

$$j = m\ (1-nd)^{-1/mn} - 1 \tag{3.9}$$

$$d = 1/n\ [1-(1+j/m)^{-mn}] \tag{3.10}$$

Эквивалентность сложных ставок:

Количество периодов наращения в данном случае (в отличие от предыдущих) не оказывает влияние на эквивалентность ставок.

$$i_c = d_c / (1-d_c) \tag{3.11}$$

$$d_c = i_c / (1+i_c) \tag{3.12}$$

Эквивалентность ставок при разных начальных условиях ($P_1 \neq P_2$)

$$i_c = \sqrt[n2]{P_1 / P_2)(1-d_c)^{n1}} - 1\uparrow \tag{3.13}$$

$$d_c = 1 - \sqrt[n1]{P_1 / P_2)(1-i_c)^{n2}} \tag{3.14}$$

$$i_o = \sqrt[n2-n1]{S_1 / S_2} - 1 \tag{3.15}$$

где i_o - уравнивающая ставка, когда $P_1=P_2$

3.2 Средние процентные ставки

Когда процентные ставки изменяются во времени, тогда эквивалентная им ставка представляет собой среднюю ставку, приносящую за определенный период тот же доход.

Пусть за периоды n_1, n_2, …. Начисляются простые проценты по ставке i_1, i_2 ……

Тогда

- по средней арифметической взвешенной

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t * i_t}{N} \tag{3.16}$$

При начислении процентов по ставке d_1, d_2, ….

- по средней арифметической взвешенной

$$\bar{d}_1 = \frac{\sum n_t * d_t}{N} \tag{3.17}$$

Если начисление производится на основе последовательных фиксированных ставок сложных процентов i_1, i_2 …, которые начисляются в интервалах, равных n_1, n_2, …, то расчет ведется по средней геометрической взвешенной.

$$\bar{i}_c = [(1+i_1)^{n1} (1+i_2)^{n2} \ldots (1+i_k)^{nk}]^{1/N} - 1 \tag{3.18}$$

3.3 Изменение условий контрактов

Иногда возникают случаи, когда необходимо заменить одно финансовое обязательство другим (например, с более отдаленным сроком платежа), объединить несколько обязательств в одно (консолидировать платежи). Условия контракта должны изменяться исходя из принципа финансовой эквивалентность обязательств, которая предполагает неизменность (эквивалентность) финансовых отношений до и после изменения условий.

Общий метод решения: разработка уравнения эквивалентности, в котором сумме заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнена сумма платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

2 постановки задач по изменению условий контрактов:

1) консолидирование задолженности (объединение)

2) сбалансированное изменение сроков платежей

Постановка 1: пусть платежи S_1, S_2, …. S_m со сроками n_1, n_2, …. n_m, объединяются в один в сумме S_o в сроком n_o. Тогда в общем случае S_o находим как сумму наращенных или дисконтированных платежей

$$S_o = \sum Sj\ (1+t_j i) + \sum S_k\ (1+t_k i)^{-1} \qquad (3.19)$$

где S_o – сумма нового платежа;

Sj – суммы объединяемых платежей со сроками n_j, $n_j < n_0$

S_k – суммы объединяемых платежей со сроками n_k, $n_k > n_0$

$t_i = n_0 - n_j$

$t_k = n_k - n_0$

Консолидировать платежи можно и на основе учетной ставки (при объединении векселей):

$$S_0 = \sum_j S_j\left(1 - t_j d\right)^{-1} + \sum_k S_k\left(1 - t_k d\right) \qquad (3.20)$$

Консолидация на основе сложной ставки процента

$$S_0 = \sum_j S_j\left(1 + t_c\right)^t j + \sum_k S_k\left(1 + i_c\right)^{-t} k \qquad (3.21)$$

Постановка 2: определение срока консолидированного платежа при заданной сумме.

1) на основе простой ставки процента:

$$n_o = 1/i\ (S_0 / P_0 - 1),\ S_0 > P_0 \qquad (3.22)$$

2) на основе учетной ставки процента:

$$n_o = 1/d\ (1 - P_0 / S_0) \qquad (3.23)$$

3) на основе сложной ставки процента:

$$n_o = \frac{\lg(S_0 / Q)}{\lg(1 + i)} \qquad (3.24)$$

где P_0, Q - современные величины объединяемых платежей

При общем случае изменения условий контракта

Расчет S_0 определяется на основе уравнения эквивалентности, в котором сумма приведенных платежей по старым условиям контракта равна сумме приведенных на тот же момент времени платежей по новому (измененному) соглашению.

$$\sum S_q * V^{nq} = S_q * V^{nk} \tag{3.25.}$$

$S_q * V^{nq} = S_q * V^{nk}$

S_k - ряд заменяемых платежей со сроками n_k

S_q - платежи со сроками n_q, предусматриваемые новыми условиями

V - дисконтный множитель.

3.4 Учет инфляционного обесценения денег

Инфляция - потеря покупательской способности денег. Влияние инфляции различно для участвующих в сделке сторон: если кредитор теряет часть дохода за счет обесценения денежных средств, то заемщик имеет возможность погасить задолженность деньгами сниженной покупательской способности. Учет инфляции в финансовых расчетах в основном производится при помощи корректировки процентных ставок на индекс инфляции (J_u):

- простая процентная ставка

$$i_\alpha = \frac{(1+ni)\Im u - 1}{n} \tag{3.26}$$

- учетная ставка

$$d_\alpha = \frac{\Im u - 1 + nd}{\Im un} \tag{3.27}$$

- сложная ставка процента

$$i_{c\alpha} = (1+i_c)\Im u^{1/n} - 1 \tag{3.28}$$

- номинальная ставка процента

$$j_{\alpha} = m[(1+j/m)\Im u^{1/mn} - 1] \qquad (3.29)$$

- сложная учетная ставка

$$d_{c\alpha} = 1 - \frac{1+d_c}{\Im u^{1/n}} \qquad (3.30)$$

- номинальная учетная ставка с начислением m раз в год

$$f_{\alpha} = m\left(1 - \frac{1-f/m}{\Im u^{1/mn}}\right) \qquad (3.31)$$

Зная процентную ставку с учетом инфляции, можно определить реальную процентную ставку:

- простая процентная ставка

$$i = \frac{ni_{\alpha} + 1 - \Im u}{\Im un} \qquad (3.32)$$

- сложная ставка процента

$$i_c = \frac{1+i_{c\alpha}}{\Im u^{1/n}} \qquad (3.33)$$

- номинальная ставка процента

$$j = \frac{j_{\alpha} + m(1-\Im u^{1/mn})}{\Im u^{1/mn}} \qquad (3.34)$$

3.5 Условия задач

1) Срок уплаты по долговому обязательству - полгода, учетная ставка 10%. Какова доходность данной операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

2) Определить эффективную ставку сложных процентов, если номинальная ставка равна 16% и начисление процентов происходит ежемесячно.

3) Определить под какую ставку процентов выгоднее поместить капитал в 100 тыс. рублей на пять лет:

а) под простую ставку процентов 20% годовых

б) под сложную ставку 10% при ежеквартальном начислении?

4) Рассчитать номинальную ставку процентов. которая обеспечивала бы годовую доходность в 16%, если начисление происходит ежемесячно.

5) Капитал взят в кредит под сложную ставку ссудного процента 20% годовых. Для расчета с кредиторами необходимо выплатить 300 тыс. руб. через два года или 450 тыс. руб. через три года. Какой вариант предпочтительнее?

6) В контракте предусматривается начислять простые проценты 10%, 12%, 15% за интервалы времени (в годах) 0.5, 1.0, 0.5. Какова реальная средняя ставка?

7) Найти среднюю ставку при условии, что процентные ставки по ссуде определены в 10% первые три года, 7% следующие два года, 5% один год?

8) Решено консолидировать 3 платежа со сроками 15.05, 15.06, 15.08. Суммы платежей 10, 20, 15 тыс. руб. Обусловлено применение простой процентной ставки – 20%. Срок консолидированного платежа 1.08. Определить размер консолидированного платежа.

9) Два векселя со сроками 10.06 (10 тыс. руб.) и 01.08. (20 тыс. руб.) заменяются одним с продлением срока до 01.10. Определить сумму нового векселя, если при объединении векселей применена учетная ставка 10%.

10) Платежи в размере 10, 20, 15 тыс. руб. уплачиваются через 50, 80, 150 дней после некоторой даты. Решено заменить их одним платежом равным 50 тыс. руб. Найти срок консолидированного платежа, при условии $i = 10\%$.

11) Имеются платежи 100, 200, 150 тыс. руб., сроки этих платежей 2, 3, 5 лет; объединяются в один в размере 500 тыс. руб. по ставке - 10%. . Определить срок нового платежа.

12) Существует обязательство произвести платеж через 5 лет, первоначальная сумма долга 1000 тыс. руб. Проценты начисляются ежегодно по ставке - 5%. Стороны согласились пересмотреть соглашение. Обязательство будет погашено следующим образом: через два года производится выплата 30 тыс. руб., а остальной долг гасится через 4 года после выплаты 300 тыс. руб. Необходимо определить сумму окончательного

платежа. Для решения задачи использовать четыре варианта уравнений эквивалентности, когда в качестве момента на которые приводятся платежи приняты:

а) начало срока обязательства;

б) момент уплаты 300 тыс. руб.;

в) момент платежа по старому обязательству;

г) конец срока нового обязательства.

13) Кредит в размере 50 тыс. руб. выдан на два года. Реальная доходность операции должна составить 10 % годовых по сложной ставке. Ожидаемый прирост инфляции составляет 3% в год. Определить множитель наращения, сложную ставку процентов, учитывающую инфляцию, и наращенную сумму.

14) Первоначальный капитал в размере 200 тыс. р. выдается на три года, проценты начисляются в конце каждого квартала по номинальной ставке 10% годовых. Определить номинальную ставку процентов и наращенную сумму с учетом инфляции, если ожидаемый годовой прирост инфляции составляет 5%.

15) При выдаче кредита должна быть обеспечена реальная доходность операции, определяемая учетной ставкой 5% годовых. Кредит выдается на полгода, за который предполагаемый индекс инфляции составит 1.2. Рассчитать значение учетной ставки, компенсирующий потери от инфляции.

16) Определить реальную доходность финансовой операции, если при уровне инфляции 3% в месяц выдается кредит на два года по номинальной ставке сложных процентов 25% годовых. Проценты начисляются ежеквартально.

17) Определить какой реальной эффективностью обладает финансовая операция, если при росте инфляции 15% в год капитал вкладывается на один год под номинальную ставку 40% при ежемесячном начислении.

3.6 Контрольные вопросы

1) Понятие эквивалентной процентной ставки.

2) Практическое использование эквивалентных ставок.

3) Вывод формул для определения значений эквивалентных ставок.

4) Условия, определяющие величину эквивалентных процентных ставок.

5) Определение эквивалентных ставок, если начальные условия полностью или частично не совпадают.

6) Понятие уравнивающей ставки.

7) Виды средних для определения средней простой процентной (учетной) ставки.

8) Вид средней для определения средней сложной процентной ставки.

9) Содержание принципа финансовой эквивалентности обязательств.

10) Содержание уравнения эквивалентности.

11)Определение суммы консолидированной задолженности на основе:

а) простой процентной ставки;

б) простой учетной ставки;

в) сложной процентной ставки.

12) Определение срока консолидированного платежа при заданной его сумме.

13) Уравнение эквивалентности для общего случая изменения условий контракта.

14) Понятие и методика определения брутто-ставки

15) Методика определения размера ставок, учитывающих инфляцию.

Тема 4. Оценка денежных потоков

4.1 Понятие потоков платежей и финансовых рент, их основные характеристики; классификация рент

Контракты, сделки, банковские операции часто предоставляются не отдельные разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений или поток платежей.

Потоки платежей, отдельные платежи (элементы ряда) которых разные по величине и могут быть как поступлениями (положительные), так и выплатами (отрицательными) величинами и осуществляется через разные интервалы времени являются нерегулярными.

Потоки платежей все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами постоянны, называются финансовой рентой или аннуитетом. Представление последовательных платежей в виде финансовой ренты существенно упрощает определение их обобщающих характеристик, дает возможность использовать набор стандартных формул, табулировать значения ряда коэффициентов.

Количественный финансово-экономический анализ потоков платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих эти потоки платежей характеристик: наращенной суммы и современной величины.

Эти показатели представляют собой обобщение потока платежей за весь срок, с учетом моментов времени, в виде одного числа.

Наращенная сумма – сумма всех членов последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу его срока. Наращенная сумма может представлять сбой общую сумму задолженности, итоговый объем инвестиций, накопленный на момент оценки денежный резерв и т.д.

Под современной величиной потока платежей понимают сумму его членов, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающих с началом потока платежей или упреждающий его. Современная величина потока платежей характеризует приведенные издержки, капитализированный доход, чистую приведенную прибыль и т.д.

Ренты классифицируются по следующим признакам:

1) по продолжительности периода ренты:

- годовые – с выплатой раз в год

- p – срочные – с выплатой p раз в году

2) по числу начислений процентов:

- с ежегодным начислением процентов

- с начислением процентов m раз в году

3) по величине членов ренты:

- с переменными членами ренты (изменяются по арифметической или по геометрической прогрессии, или несистематически)

4) по роду членов:

- рента с ограниченным числом членов

- рента с неограниченном числе членов

5) по моменту выплаты платежей:

- выплаты производятся в начале периода начисления – рента пренумерандо

- выплаты производятся в конце периода начисления – рента постнумерандо

6) по вероятности выплаты:

- верные ренты

- условные ренты

4.2 Рента постнумерандо

Наиболее часто в финансовых расчетах используются следующие по условиям формирования ренты:

$1^й$ случай: Платежи осуществляются один раз в год, проценты начисляются один раз в конце года, тогда наращенная сумма определяется

$$S=R*K\ n;\ i, \qquad (4.1)$$

где S – наращенная сумма ренты,

R – размер члена ренты (разового постоянного платежа),

K n; i - коэффициент наращения с параметрами «n» (срок ренты) и «i» (ставка сложных процентов), является суммой геометрической прогрессии –

первый член геометрической прогрессии a =1, а знаменатель геометрической прогрессии g =(1+i), тогда K n; i = $(1+i)^n$-1/i, а

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4.2}$$

2[й] случай: Годовая рента с начислением процентов «m» раз в году по номинальной ставке «j»

$$S = R\frac{(1+{}^j\!/_m)^{mn} - 1}{(1+{}^j\!/_m) - 1} \text{ или } S = RKmn; j/m \tag{4.3}$$

3[й] случай: Рента p-срочная, проценты начисляются один раз в конце года (m=1)

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} \text{ или } S = RK^{(p)}n; i \tag{4.4}$$

4[й] случай: Рента p-срочная, начисление процентов «m» раз в год (m=p)

$$S = R\frac{(1+{}^j\!/_m)^{mn} - 1}{j} \tag{4.5}$$

5[й] случай: Рента p-срочная, (p≈m)

$$S = R\frac{(1+{}^j\!/_m)^{mn} - 1}{P[(1+{}^j\!/_m)^{m/p} - 1]} \tag{4.6}$$

Современные величины ренты в зависимости от условий формирования определяются по формулам (аналогично перечисленным выше условиям).

1[й] случай: Годовая рента с начислением процентов 1 раз в год

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \text{ или } A = Ran; i \tag{4.7}$$

$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = an; i$ - коэффициент приведения ренты рассматриваемый, как сумма геометрической прогрессии с параметрами $a_1 = q = 1/(1+ic)$

2[й] случай: Годовая рента с начислением процентов «m» раз в году

$$A = R\frac{1-(1+{}^j\!/_m)^{-mn}}{(1+{}^j\!/_m) - 1} \text{ или } A = Ra_{mn}; {}^i\!/_m \tag{4.8}$$

3[й] случай: Рента p-срочная с начислением процентов один раз в год (m=1)

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{P[(1+i)^{i/p}-1]} \text{ или } A = Ra^{(p)}n;i \tag{4.9}$$

4[й] случай: Рента p-срочная (p=m)

$$A = R\frac{1-(1+i/m)^{-mn}}{i} \text{ или } A = Ra^{(p)}mn;j/m \tag{4.10}$$

5[й] общий случай: Рента p-срочная (p≈m)

$$A = R\frac{1-(1+i/m)^{-mn}}{P[(1+i/m)^{m/p}-1]} \text{ или } A = Ra^{(p)}mn;j/m \tag{4.11}$$

Некоторые коэффициенты наращения и приведения табулированы и представлены в виде таблиц.

При необходимости определения членов ренты или срока ренты, их можно получить преобразованием формул наращения и дисконтирования относительно интересующих нас величин.

4.3 Рента пренумерандо

В этой ренте платежи производятся в начале каждого периода начисления, то есть количество платежей будет на один больше, чем в ренте постнумерандо.

1[й] случай: Годовая рента с начислением процентов 1 раз в год

$$S^1 = S(1+i) \text{ или } A^1 = A(1+i) \tag{4.16}$$

2[й] случай: Годовая рента с начислением процентов «m» раз в году

$$S^1 = S(1+j/m)^m \text{ или } A^1 = A(1+j/m)^m \tag{4.17}$$

3[й] случай: Рента p-срочная с начислением процентов один раз в год

$$S^1 = S(1+i^{1/p}) \text{ или } A^1 = A(1+i^{1/p}) \tag{4.18}$$

4[й] случай: P-срочная рента с начислением процентов «m» - раз

$$S^1 = S(1+{}^{j}/_{m})^{m/p} \text{ или } A^1 = A(1+{}^{j}/_{m})^{m/p} \tag{4.19}$$

4.4 Бессрочный аннуитет

Аннуитет называется бессрочным, если денежные поступления продолжаются длительное время (50 и более лет). В этом случае прямая задача смысла не имеет, что касается обратной задачи, то ее решение делается так же по формуле 4.7.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i}=\frac{1}{i}$, то $A = R/i_c$ (4.20)

Приведенная формула используется для оценки целесообразности приобретения аннуитета.

4.5 Переменные потоки платежей

Встречаются потоки платежей, члены которых изменяются во времени. Эти последовательности платежей можно представить в виде переменных потоков платежей.

Частный случай такого потока – переменная рента, то есть рента, члены которой изменяются в соответствии с каким либо заданным законом развития.

Если такой закон не задан, то соответствующая последовательность представляет собой нерегулярный поток платежей.

4.6 Нерегулярный поток платежей

Временные интервалы между двумя соседними членами в нерегулярном потоке платежей могут быть любыми. Обобщающие характеристики получают методом прямого счета.

Наращенная сумма (начисление процентов 1 раза в год)

$$S = \sum_t R_t(1+i)^{n-t} \tag{4.21}$$

Современная величина

$$A = \sum_t R_t * v^t \tag{4.22}$$

где t = время от начала потока платежей до момента выплаты

R_t – размер платежа (член ренты)

4.7 Конверсия аннутентов

Под конверсией аннутента понимается такое изменение начальных параметров аннутента, после которого новый аннутент был бы эквивалентен данному.

Два аннутента считаются эквивалентными, если равны их современные величины, проведенные к одному и тому же моменту времени.

На практике необходимость рассчитать параметры эквивалентного аннутента чаще всего возникает при изменений условий выплаты долга, погашение кредита или займа и т.п. При этом конверсия может произойти в момент начала аннутента, так и после выплаты некоторой части аннутента. В последнем случае все расчеты производятся на остаток долга в момент конверсии.

Наиболее распространенные случае конверсии постоянных аннутентов:

1) Через некоторый промежуток времени (он может быть равен и «0») после начала аннутента весь остаток долга может быть выплачен за один раз (выкуп ренты). Очевидно, что в том случае величина выплачиваемой суммы будет равна современной величине остатка аннутента, рассчитанной для срока $n_2 = n_1 - n_0$ (Согласовываются процентные ставки. Выбирается определения современной величины).

2) Может возникнуть задача, обратная предыдущей: задолженность погашается частями, в виде выплаты постоянного аннутента, и требуется определить один из параметров аннутента при заданных остальных. Поскольку здесь известна сумма долга, то есть современная величина аннутента, то для нахождения неизвестного параметра используются формулы:

$$R = \frac{A}{a_{i;n}} = \frac{Ai_c}{1-(1+i_c)^{-n}} \tag{4.23}$$

$$n = \frac{\ln[1-(A/p)i_c]^{-1}}{\ln(1+i_c)} \tag{4.24}$$

3) Период выплаты долга может быть изменен при сокращении прежней процентной ставки. Величину R_2 платежа для срока n_2 находим, используя уравнения эквивалента (приравниваются современные значения аннутента):

$$R_2 \frac{1-(1+i_c)^{-n_2}}{i_c} = R_1 \frac{1-(1+i_c)^{-n_1}}{i_c} \tag{4.25}$$

Отсюда $R_2 = R_1 \dfrac{1-(1+i_c)^{-n_1}}{1-(1+i_c)^{-n_2}}$ (4.26)

Очевидно, что если срок аннутента увеличивается, значение R_2 сократится и наоборот.

4) Может возникнуть ситуация, когда величина платежа R должна быть изменена в ту и другую сторону.

5) Начало выплаты задолженности при заданной процентной ставке может быть отсрочено:

а) при сокращении размера платежа;

б) при сокращении срока выплаты;

Очевидно, что в первом случае должен увеличиться срок аннутента, а во втором – величина платежа.

Если обозначить через n_0 период отсроки, тогда на момент начала выплаты, сумма долга A_2, которая должна являться современной величиной нового аннутента, составит по формуле сложного процента

$$A_2 = A_1(1+i_c)^{n_0} \tag{4.27}$$

Отсюда получаем уравнение эквивалентности:

$$R_2[1-(1+i_c)^{-n_2}] = R_1[1-(1+i_c)^{-n_1}] \tag{4.28}$$

Далее решаются две задачи:

- находим n_1 при $R_1 = R_2$

- величину платежа R_2 при $n_2 = n_1 - n_0$

6) В некоторых случаях может потребоваться объединение нескольких аннутентов в один (консолидация аннутентов).

При этом объединяемые аннутенты могут быть любыми, а в искомом объединяющем аннуитете один из параметр неизвестен при всех остальных заданных.

$$A = \sum_{q} Aq \qquad (4.29)$$

А – современная стоимость заменяющий ренты

Aq – современная стоимость q –й заменяемой ренты

4.8 Условия задач

1) Сельскому жителю предлагают сдать в аренду участок земли на три года, выбрав один из двух вариантов оплаты труда: а) 50 тыс. руб. в конце каждого года; б) 135 тыс. руб. в конце трехлетнего периода. Какой вариант более предпочтителен, если банк предлагает 12% годовых по вкладам?

2) Фирме предложено инвестировать 100 тыс. руб. на срок 5 лет при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 20 тыс. руб.) По истечению пяти лет выплачивается дополнительной вознаграждение в размере 30 тыс. руб. Примет ли она это предложение, если можно «безопасно» депонировать деньги в банк из расчета 12% годовых?

3) Определить текущую стоимость бессрочного аннуитета с ежегодными поступлениями 500 тыс. руб., если ставка рефинансирования составляет 8% годовых.

4) Годовая рента постнумерандо R = 400 тыс. руб., n = 5. При дисконтировании по сложной ставке 10% найти современную стоимость ренты и наращенную сумму ренты.

5) В условиях предыдущей задачи рента выплачивается поквартально, p=4. Определить для случаев начисления процентов 1 раз в год и m раз в год (m= p) современную стоимость и наращенную сумму ренты.

6) Создается фонд, средства поступают в виде годовой постоянной ренты в течение 5 лет, ежегодно по 300 тыс. руб. На поступление суммы начисляются проценты 8,5% годовых. Найти наращенные суммы при годовом начислении и при квартальном начислении.

7) Создается резервный фонд для закупки семян, взносы производятся на протяжении 5 лет 1 раз в конце года по 100 тыс. руб. На собранные средства

начисляются проценты по ставке 10% годовых. Необходимо найти размер фонда к концу срока.

8) Пусть рента выплачивается в конце года R = 500, ставка 6% годовых. Найти современную величину ренты при условии, что рента выплачивается 10 лет.

9) Рассчитать величину приведенного денежного потока: 12, 15, 9, 25 тыс. долл. Если процентная ставка – 12%. Расчеты представить в виде таблицы, показать изменение дисконтных множителей и современных величин ежегодных платежей, общую величину приведенного денежного потока.

10) Найти современную величину потока платежей, определяемого следующим образом: первый год – поступление 50 тыс. руб., второй год поступления – 20 тыс. руб., третий год – выплата 40 тыс. руб., далее в течение следующих семи лет доход по 50 тыс. руб. Ставка дисконтирования – 6% годовых.

11) Контакт предусматривает порядок использования кредитной линии: 1.07.2000 – 500 тыс. руб., 1.01.2001 – 150 тыс. руб., 1.01.2003 – 1800 тыс. руб. Необходимо определить сумму задолженности на 01.01.2004 современную стоимость этого потока на начало срока при условии, что проценты начисляются по ставке 10% годовых.

12) График представляет следующий порядок выдачи ссуды по времени: 1.07.1999 – 5 млн. руб., 1.01.2000 – 15 млн. руб., 1.01.2002 – 18 млн. руб. Найти сумму задолженности на начало 2003 года при ставке 5% годовых. Определить современную стоимость на момент выплаты первой суммы.

13) График выдачи ссуд: 01.01.2000 – 50 тыс. руб., 1.01.2001 – 150 тыс. руб., 1.01.2003 – 180 тыс. руб. Найти сумму задолженности на 01.01.2004, если кредит выдан под 8% годовых?

14) Малое предприятие, решившие создать специальный фонд в размере 2,5 млн. руб. за 3 года, может выделить на эти цели в настоящее время 1,0 млн. руб. Определить величину годового платежа, если денежные средства можно вложить под 8% годовых.

15) Малое предприятие предлагает создать специальный фонд в размере 5,0 млн. руб. и имеется возможность вносить ежегодно в банке по 1,5 млн. руб. под 6% годовых. Определить срок для создания фонда.

16) Фирма предлагает покупателю свою продукцию на сумму 2,0 млн. руб. с условием ее оплаты в рассрочку в течение 2-х лет под 10% годовых платежей должны вноситься ежеквартально, проценты начисляются в конце года. Определить условия конверсии.

17) Фирма по торговле неподвижностью продает объект – 3,0 млн. руб. При этом предлагаются следующие варианты оплаты:

а) единовременная оплата;

б) оплата в течение 2-х лет равными платежами, вносимыми в конце года под 9 %;

в) оплата с отсрочкой платежа в один год, остальные условия аналогичные предыдущему варианту;

г) оплата с отсрочкой в один год, но срок ренты возрастает до 3 лет. Определить финансовые последствия для 3-х последних вариантов

18) Имеется соглашение о выплате немедленной годовой ренты сроком на 4 года. Величин годового платежа 2,0 млн. руб., процентная ставка 8%. По новому соглашению оплата производится с отсрочкой в два года, при сохранении предыдущего размера годового платежа. Определить срок новой ренты.

19) Предлагается к продаже объект недвижимости – 2,0 млн. руб. продавец выставил условия продажи: стоимость объекта погашается ежегодными равными платежами, вносимыми в конце года; срок погашения – 4 года; выплаты процентов один раз в год по ставке – 6%. Покупатель предложил свои условия: платежи 2 раза в год, выплата процентов на каждый платеж по ставке - 8%. Срок выплат 6 лет. Определить величину рентного платежа, предложенного продавцом и покупателем.

20) Имеются три годовые ренты (немедленные, начислением процентов в конце периодов):

Параметры рент: R_1 = 200 тыс. руб.; n_1 =2г; i = 9%;

R_2 = 250 тыс. руб.; n_1 =4 г; i = 8%;

R_3 = 370 тыс. руб.; n_1 =5л; i = 7%.

Их предложено заменить одной годовой рентой с начислением процентов в конце периода, начало ее срока совпадает с началом срока всех заменяемых рент. Определить величину рентного платежа консолидированной ренты, если ее срок будет 5 лет, а процентная ставка – 10%.

21) Объединяются три ренты по срокам: n_1=7, n_2 =4, n_3= 9 лет; рентные платежи по 500 тыс. руб., процентные ставки одинаковы – 8%. Член консолидированной ренты установлен – 1,5 млн. руб.; процентная ставка – 8%. Определить срок новой ренты.

4.9 Контрольные вопросы

1) Дайте определение:

- потока платежей;
- финансовой ренты

2) Перечислите параметры финансовой ренты (аннунтета)

3) По каким признакам классифицируются финансовые ренты

4) Назовите обобщающие характеристики финансовых рент, их содержание

5) Какова методика определения наращенной суммы аннунтета постнумерандо с ежегодными платежами

6) Содержание методики определения современной величины аннунтета постнумерандо с ежегодными платежами

7) Перечислите другие случаи финансовых рент. Методические особенности определения их наращенной и современной величин

8) В чем отличительные особенности определения наращенный и современной величин аннуитетов пренумерандо

9) Как определить параметры финансовых рент, если известны их обобщающие характеристики

10) Что понимается под переменным потоком платежей, особенности определения его обобщающих характеристик

11) Что понимается под нерегулярным потоком платежей, особенности определения его обобщающих характеристик

12) Дайте определение бессрочного аннуитета, какова методика определения его современной величины

13) Что понимается под конверсией аннуитетов, их причины

14) Какие аннуитеты считаются эквивалентами, на каком методологическом принципе основаны расчеты параметров нового аннуитета

15) Перечислите наиболее распространенные случаи конверсии постоянных аннуитетов

Тема 5. Планирование погашения долгосрочной задолженности

5.1 Планирование погашения долгосрочной задолженности

Важное практическое приложение теории аннутентов – составление различных вариантов (планов) погашения задолженности. При составлении плана погашения возникает необходимость в определение размеров платежей заемщика – выплаты процентов и выплаты по погашению основного долга при различных условиях погашения (амортизации, такие платежи носят название срочных уплат).

В практике финансовых отношений заемщика и кредитора возможны следующие варианты погашения задолженности:

1) Займы без обязательного погашения, по которым постоянно выплачиваются проценты. В данном случае необходимо определить размер платежа при заданной процентной ставке (случай вечного аннутента). Размер платежа определяется из формулы современной величины вечного аннутента

$$R = A * i_c \tag{5.1}$$

2) Погашение долга в один срок

Если заемщик должен вернуть всю сумму долга в конце срока, целесообразнее бывает создание погасительного (амортизационного) фонда, для чего вносятся в банк определенные суммы, на которые начисляются проценты.

Для дальнейшей записи формул введем обозначения:

D – Основная сумм долга;

g_c – ставка процентов по займу, g - льготная процентная ставка, по которой предоставлен кредит;

J – сумма процентов по займу;

R – разовый взнос в погасительный фонд (годовые расходы по погашению основного долга)

i_c – ставка процентов на взносы в погасительный фонд;

γ - срочная уплата, γ' - величина срочной уплаты по льготной ставке;

Общая сумма долга по формуле сложных процентов составит:

$$\gamma = R = D(1+g)^n * i_c / [(1+i_c)^n - 1] \tag{5.2}$$

3) погашение основго долга равными суммами (проценты периодически выплачиваются). Тогда на погашение постоянно идут платежи размером Д/n, а процентные выплаты ежегодно сокращаются, так как уменьшается основная сумма долга.

Для определения размера срочной уплаты и процентного платежа после любого (к-ого) года:

$$\gamma_{к} = D[1-(k-1)/n]*g + D/n \tag{5.3}$$

4) Погашение долга с использованием постоянных срочных уплат $\gamma = J + R = \cos t$ n. В данном варианте со временем составляющая «*J*» будет уменьшаться, так как уменьшается основная сумма задолженности. Соответственно составляющая «R» будет увеличиваться.

Периодическая выплата постоянной суммы «γ» при заданной процентной ставке «g» в течение «n» лет является аннутентом с соответствующими параметрами. Поэтому величина срочной уплаты определяется по формуле:

$$\gamma = D / a_{g;n} \tag{5.4}$$

$a_{g;n}$ - коэффициент приведения ренты)

5) Во многих случаях предпочтительнее оказывается погашение долга с использованием переменных срочных уплат. Срочные уплаты могут изменяться в соответствии с некоторой закономерностью или задаваться графиком погашения.

6) На практике часто встречается случай, когда заранее задаются размеры всех срочных уплат, кроме последней, определяемой величиной остатка долга на начало последнего периода.

7) Возможно изменение условий погашения кредитов (конверсия займа). При этом могут изменяться срок погашения займа, процентная ставка, порядок годовых выплат и т.д. При любом методе конверсии первоначально определяется сумма выплаченного основного долга и величина непогашенной его части. Непогашенная часть долга рассматривается как новый долг, подлежащий уплате на новых условиях.

8) В финансовой практике может возникнуть ситуация, когда кредитору, предоставившему несколько займов одному заемщику, удобно объединить эти займы в один, то есть произвести их консолидацию. Первым шагом при консолидации займов является нахождение величин остатков каждого долга. Рассчитав остатки долгов и просуммировав их, получают объединенный долг, на который составляется новый план погашения.

9) Иногда долгосрочные кредиты выдаются на льготных условиях (политические, социальные или иные соображения). Как правило, в данном случае кредит предоставляется по ставке значительно ниже рыночной на данный момент. В результате предоставления подобной льготы заемщик фактически получает субсидию. Кредитор же теряет определенную сумму в результате этой сделки. Эта добровольно упущенная выгода кредитора называется грант – элементом. Он может быть подсчитан в виде абсолютной или относительной величины.

Абсолютный гран-элемент определяется по формуле:

$$W = (\gamma - \gamma^{1}) * \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{n} * i} \tag{5.5}$$

где абсолютный грант-элемент может быть определен как разность между номинальной суммой (D) кредита и современной величиной погасительных платежей и выплаченных процентов (G), то есть:

$$W = D - G \tag{5.6}$$

Относительный гран элемент равен: $$\omega = \frac{W}{G} \tag{5.7}$$

10) Погашение ипотечной ссуды. При составлении плана погашения ипотечной ссуды решаются задачи, аналогичные погашению долгосрочных займов, - определение размеров срочных уплат и остатка задолженности на любой момент времени.

Например, погашение равными ежемесячными срочными уплатами:

$$\gamma = \frac{D * \frac{j}{m} * (1 + \frac{j}{m})^{mn}}{(1 + \frac{j}{m}) - 1} \tag{5.8}$$

где D – сумма долга,

p=m число выплат и начисления процентов;

n – число лет, на которые предоставлен кредит.

Расчет оставшейся суммы основного долга в любой (к-й) расчетный период можно произвести по формуле:

$$D_k = D * \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - (1+\frac{j}{m})^{k-1}}{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1} \qquad (5.9)$$

5.2 Условия задач

1) Кредит в размере 2 млн. руб. выдан на 5 лет под 8% годовых. По условиям контракта погашение основного долга должно производиться равными платежами, начисление процентов на остаток долга в конце года. Составить план погашения кредита в виде таблицы, в которые указать календарные периоды, величину основного долга на начало каждого года, процентные платежи, годовые расходы по погашению основного долга, годовую срочную уплату.

2) Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 3 млн. руб. на 5 лет под 6% годовых. Погашение кредита должно производиться равными ежегодными выплатами в конце каждого года, включающими погашение основного долга и процентные платежи. Начисление процентов производится раз в год. Составить в виде таблицы план погашения долга.

3) Кредит размером 4 млн. руб. выдан на 5 лет под 5% годовых с начислением процентов в конце каждого расчетного периода (года). Выплаты основного долга должны возрастать ежегодно на 100 тыс. руб. Составить план погашения кредита.

4) Долг в размере 5 млн. руб. требуется погасить за пять лет, размеры срочных уплат в первые четыре года: 0,5 млн. руб., 1,0 млн. руб.; 2 млн. руб., 1,0 млн. руб. Найти величину последней уплаты, если процентная ставка – 5% годовых. План погашения долга оформить в виде таблицы.

5) Кредит в сумме 40 млн. руб., выданный на 5 лет под 6% годовых, подлежит погашению равными ежегодными выплатами в конце каждого

года. Проценты начисляются в конце года. После выплаты третьего платежа между кредитором и заемщиком достигнута договоренность о продлении срока погашения займа на 2 года и увеличении процентной ставки с момента конверсии до 10%. Необходимо составить план погашения оставшейся суммы долга.

6) Банком предприятию было предоставлено два кредита. Первый – в размере 2,0 млн. руб. под 8% годовых, должен погашаться равными полугодовыми выплатами в течение 6 лет, начисление процентов по полугодиям. Второй – 1,5 млн. руб. со сроком погашения 4 года, ставка 12%, капитализация ежегодная. После выплаты в течение двух лет два долга объединяются в один на следующих условиях: консолидированный долг имеет срок погашения 8 лет, погашение производится равными полугодовыми срочными выплатами, процентная ставка – 14%, капитализация полугодовая. Определить величину полугодовой срочной уплаты.

7) Фирма получила кредит 5,0 млн. руб. на 4 года под 8% в банке «А». Кредитный контракт предусматривается погашение долга разовым платежом. Одновременно с получением кредита фирма начала создавать погасительный фонд, для чего открыла счет в банке «Б». На размещенные средства банк «Б» начисляет 10% годовых. Определить ежегодные расходы фирмы по амортизации долга при условии, что в погасительный фонд вносятся ежегодно равные суммы. План погашения кредита оформить в виде таблицы.

8) Фирма получила кредит в сумме 60 тыс. долл. сроком на 4 года под 6% годовых (простые проценты). Для погашения долга решено создать фонд, взносы в который должны поступать в конце каждого года, причем каждый взнос должен возрастать на 0,5 тыс. дол. На взносы погасительного фонда начисляются сложные проценты по ставке 7% годовых. Составить план погашения долга в виде таблицы.

9) Льготный заем в размере 10 млн. руб. выдан на 10 лет под 4% годовых. Предусматривается погашение долга равными срочными уплатами.

Известно, что обычная рыночная ставка для того срока займа равна 8%. Определить относительный и абсолютный грант элемент.

10) Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 100 млн. руб. Погашение ежемесячное постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 12%. Составь план погашения долга.

5.3 Контрольные вопросы

1. Задачи и содержание количественного анализа долгосрочной задолженности

2. Понятие срочной уплаты, условия влияющие на определение размера

3. Цель и методы создания погасительного фонда

4. Перечислите способы погашения долгосрочной задолженности

5. Методика погашения займа равными выплатами основного долга

6. Погашение долга равными срочными уплатами

7. Погашение займа переменными выплатами основного долга

8. Реструктурирование займа (конверсия, консилидация)

9. Особенности и показатели расчета льготных займов и кредитов

10. Виды и особенности погашения ипотечных ссуд.

Тема 6. Измерение доходности финансовых операций

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок имеют различную форму: проценты от выдачи ссуд, комиссионные, дисконт при учете векселей, доходы от облигаций и других ценных бумаг и т. д.

Абсолютная величина дохода еще не свидетельствует об эффективности финансовой операции. Само понятие «доход» определяется конкретным содержанием операций, в одной операции может быть два, а то и три источника дохода.

Измерение и сравнение степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета условной годовой ставки для каждого вида операций с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения.

Условная (расчетная) ставка получила различные названия. В простых депозитных и ссудных операциях она называется «эффективной», в расчетах по оценке облигаций - «полной доходностью». В анализе производственных инвестиций применяется термин внутренняя норма доходности или внутренняя норма процента.

Для всех финансовых операций под полной доходностью следует понимать расчетную ставку процента, при которой капитализация всех видов доходов от операции равна сумме инвестиций или начисления процентов на вложения по ставке, равной полной доходности, обеспечивает выплату всех предусмотренных платежей.

6.1 Доходность ссудных, учетных операций и финансовых инструментов

Без учета комиссионных удержаний доходность ссудных операций измеряется эквивалентной годовой ставкой сложных процентов. Однако кредиторы из суммы выдаваемой ссуды удерживают различные выплаты. В силу этих причин плата за кредит для заемщика повышается, а доходность кредитора возрастает.

Возможны следующие варианты определения доходности:

1) $i_э = \left(\frac{1+ni_n}{1-g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$ (6.1)

$i_э$ – доходность в виде сложной процентной ставки

$i_п$ – ставка простых процентов

g– относительная величина комиссионных в сумме кредита

n – срок выдачи ссуды

2) доходность в виде ставки простых процентов при выдаче ссуды под простые проценты

$$i_{эп} = \frac{1+ni_n}{(1-g)^n} - 1 \quad (6.2)$$

3) доходность по сложной процентной ставке, если ссуда выдается под сложные проценты (i_c)

$$i_э = \frac{1+i_c}{\sqrt[n]{(1-g)}} - 1 \quad (6.3)$$

4) доходность по сложной процентной ставке в учетные операции по простой учетной ставке (d)

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1}{1-nd-g}} - 1 \quad (6.4)$$

n – срок, определяемый при учете долгового обязательства.

5) показатель полной доходности в виде простой ставки:

$$i_{эп} = \frac{1}{(1-nd-g)n} - 1 \quad (6.5)$$

Краткосрочные финансовые инструменты денежно-кредитного рынка (векселя, депозиты, сертификаты и др.) могут быть проданы до наступления срока их оплаты. Владелец при этом получает некоторый доход (а иногда и убыток).

Доходность купли-продажи векселя (в виде ставки простых процентов) определяется по формуле:

$$i_{эп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} * \frac{k}{t_1 - t_2} \quad (6.6)$$

или

$$i_{эп} = \left(\frac{1 - t_2 d_2 / k}{1 - t_1 d_1 / k} - 1 \right) * \frac{k}{t_1 - t_2} \qquad (6.7)$$

где P1 – цена в момент покупки

P2 – цена продажи векселя

d_1 и t_1 – учетная ставка и количество дней покупки векселя до наступления срока;

d_2 и t_2 – количество дней до погашения векселя, когда он был продан по ставке d_2

Доходность купли-продажи в виде сложной процентной ставки:

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{365/(t_1 - t_2)} - 1 \qquad (6.8)$$

или

$$i_э = \left(\frac{k - t_2 d_2}{k - t_1 d_1} \right)^{365/(t_1 - t_2)} - 1 \qquad (6.9)$$

Доходность владения сертификатом за какой либо период в случае, если он покупается по номиналу, а продается за t_2 дней до погашения определяется формулой (6.6), если расчет исходит из цен сертификата. В случаях, когда в качестве исходных параметров взяты процентные ставки, то

$$i_{эп} = \left(\frac{1 + \frac{t_1}{k} * i_1}{1 + \frac{t_2}{k} * i_2} - 1 \right) * \frac{k}{t_1 - t_2} \qquad (6.10)$$

В случаях, когда измерителем эффективности выступает сложная процентная ставка и заданы цены – формула (6.3), если расчет основан на уровнях процентных ставок, то

$$i_э = \left(\frac{k + t_1 i_1}{k + t_2 i_2} \right)^{365/(t_1 - t_2)} - 1 \qquad (6.11)$$

Если сертификат покупается после выкупа и погашается в конце срока, по формулам:

$$i_{эп} = \left(P_1 \frac{1 + \frac{t_1}{k} i_1}{P_2} - 1 \right) * \frac{k}{t_2} \qquad (6.12)$$

$$i_э = \left(\frac{P_1 \left(1 + \frac{t_1}{k} i \right)}{p_2} \right)^{365/t_2} - 1 \qquad (6.13)$$

Если сертификат покупается и продается в пределах объявленного срока по формулам 6.6 и 6.11

Возможны упрощенные метода измерения доходности для долгосрочных ссуд по формуле:

$$i_э = \sqrt[\overline{T}]{\frac{D}{P}} - 1 \qquad (6.14)$$

где D – номинальная сумма долгового обязательства

P – цена его покупки

$\overline{T}$ – средний срок обязательства

6.2 Доходность облигаций

Облигация – ценная бумага, удостоверяющая отношения займа между кредитором – владельцем облигации и должником – эмитентом облигации. Облигация удостоверяет внесение ее владельцем денежных средств и подтверждает обязательство возместить ему номинальную стоимость облигации в заранее установленный срок с уплатой фиксированного процента.

Методика расчета доходности облигаций зависит от их вида:

а) облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов:

- текущая доходность

$$i_t = \frac{\delta N}{P} = \frac{\delta}{k} * 100 \quad \text{или} \quad i_t = \frac{\delta / \rho N}{P} = \frac{\delta / \rho}{k} * 100 \qquad (6.15)$$

где P – рыночная цена облигации

N – номинал облигации

κ – курс облигации

δ – норма доходности по купонам

ρ – количество выплат по купонам в течении года

- полная доходность (ставка помещения):

$$i_m = \left(1 + \delta\!\!\left/\!\rho\right. * \frac{100}{k}\right)^{\rho} - 1 = \left(1 + \frac{i_t}{\rho}\right)^{\rho} - 1 \tag{6.16}$$

б) облигации без выплаты процентов

- в конце срока обращения

$$i_m = \left(\frac{100}{k}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(1 + \delta\right) - 1 \tag{6.17}$$

- выкупная цена облигации отличается от номинала

$$i_m = \frac{\delta + \left(\frac{100 - k}{n}\right)}{k} * 100 \tag{6.18}$$

в) облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока ($i_t = 0$)

$$i_m = 1 + \delta\!\left/\!\sqrt{\frac{k}{100}}\right. - 1 \tag{6.19}$$

г) облигации с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока (приближенная оценка)

$$i_m = \frac{\delta\left(1 - \frac{k}{100}\right)\Big/ n}{\left(1 + \frac{k}{100}\right)\Big/ 2} \tag{6.20}$$

д) средний арифметический срок поступление средств

$$\overline{T} = \frac{\frac{\delta(n+1)}{2} + 1}{\delta + 1\!\left/\!n\right.} \tag{6.21}$$

е) средний срок дисконтированных платежей

$$\overline{D} = \frac{\delta \sum t_i * v^{t_i} + v^n}{k\!\left/\!100\right.} \tag{6.22}$$

где ν - коэффициент дисконтирования

6.3 Кривые доходности

Для решения практических вопросов (т.е. эффективного вложения денежных средств) важно представить себе закономерность изменения величины доходности (процентных ставок) в зависимости от факторов финансового рынка. Наиболее важным из них является риск невозврата вложенных средств.

Очевидно также, что подобного рода риск существенно зависит от срока ссуды. Компенсировать риск владельцу денег может повышение ожидаемой доходности (т.е. договорной процентной ставки). Таким образом, зависимость «доходность-риск» приближенно можно охарактеризовать с помощью зависимости «доходность-срок», определить которую для практических целей существенно проще. Такую зависимость, предоставленную в виде графика, называют кривой доходностью.

Кривые доходности обычно строятся раздельно для кратно, средне и долгосрочных операций и финансовых инструментов. Наблюдаемые значения доходности обычно находятся около кривой или непосредственно на ней. Конкретная кривая доходности отвечает реальной ситуации сложившейся на денежно кредитном рынке, и характерна для короткого временного периода. Изменение ситуации меняет форму кривой и ее положение на графике. В финансовых изданиях приводятся такие кривые.

Кривые доходности получили широкое распространение как инструмент анализа, помогающий при решении рода инвестиционных проблем, при сравнении доходности ценных бумаг в зависимости от срока, остающегося до их погашения.

При использовании кривой доходности ценных бумаг различают спотовую (текущую) и форвардную процентные ставки. Спотовая процентная ставка для периода в N лет – это ставка для бескупонной облигации, до погашения которой остается N лет. Форвардная процентная ставка - это ставка для периода в будущем, которая определяется ставкой спот.

6.4 Условия задач

1) При выдаче ссуды на 210 дней под 12% годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов?

2) Вексель учтен по ставке 10% за 120 дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5%. Какова эффективность операции в виде годовой ставки сложных процентов? (с комиссионными и без них).

3) Вексель куплен за 150 дней до его погашения, учетная ставка 5%. Через 30 дней его реализовали по учетной ставке 4,5%. Определить эффективность в виде простой и сложной годовой ставки процентов, допустимый предел для учетной ставки, приемлемой для продажи векселя?

4) Выдан кредит на 5 лет под 5% годовых (сложные проценты). При выдачи кредита удержаны комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Определить повышение стоимости кредита для заемщика в результате взимания комиссионных платежей.

5) Куплен сертификат за 1200 тыс. руб. за 150 дней до его выкупа. Через 90 дней он был продан за 1250 тыс. руб. Какова доходность в виде простой и сложной ставок?

6) Сертификат, приносящий постоянные проценты, куплен за 210 дней до срока его погашения и продан через 90 дней. В момент покупки ставка на рынке была – 9%, в момент продажи 8,5%. Какова доходность операции купли-продажи в виде годовой ставки сложных процентов?

7) Сертификат с номиналом 200 тыс. руб. с объявленной доходностью 10% годовых (простые проценты) сроком 540 дней. Куплен за 210 тыс. руб. за 210 дней до его оплаты. Какова доходность операции в виде сложной ставки процентов?

8) На два года выдана ссуда 1 млн. руб. по 8% годовых, проценты выплачиваются ежегодно. При выдаче суды сделана скидка в пользу владельца денег в размере 3%. Определить доходность операции для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов.

9) Определить значение ставки по данным предыдущей задачи, если задолженность погашается равными платежами.

10) Операция характеризуется следующими данными: долговое обязательство – 1 млн. руб., покупается по цене 750 тыс. руб., срок долгового

обязательства 5 лет. Оценить доходность погашения задолженности для двух вариантов: постнумерандо и пренумерандо.

11) По облигации номинальной стоимостью 10,0 тыс. руб. в течение 10 лет (срок до его погашения) будут выплачиваться ежегодно в конце года процентные платежи в сумме 1,0 тыс. руб. (σ = 6%), которые могут быть помещены в банк по 8% годовых. Определить цену облигации при разных процентных ставках: 6% и 5%.

12) По данным задания 1 определить показатели текущей и полной доходности.

13) Корпорация выпустила облигации с нулевым купоном с погашением через 5 лет. Курс реализации 50. Определить доходность на дату погашения.

14) Облигация, приносящая 6% годовых относительно номинала, куплена по курсу 70, срок до погашения 3 года. Какова полная доходность облигации, если номинал и проценты выплачивают в конце срока?

15) Банк выпустил облигации со сроком погашения 10 лет. Начисление на номинал составляет 6% годовых. Проценты и номинальная стоимость выплачиваются при погашении. Определить доходность облигации (ставку помещения), если ее курс при первоначальной реализации составил: 110; 90.

16) Допустим инвестор должен инвестировать некоторую сумму денег на 4 года. В силу ряда причин у него есть только два варианта для этого: разместить эту сумму на депозита сразу на весь срок или сначала на 3 года, а затем на 1 год. Пусть уровни ставок следуют нормальной кривой доходности: по 3-х летним данным – 10%, по 4-х летним 10,5% сложных годовых. Размер ставки для депозита на последний год в момент принятия решения неизвестен. Какой вариант размещения средств должен выбрать инвестор?

17) Ставка спот на один год составляет 10%, на два -11%. Купонная облигация с номиналом 8% до погашения которой остается три года продается по цене 916 руб. Определить ставку спот для трех лет.

18) Ставка спот на один год составляет 8% на два – 10%. Определить форвардную ставку для второго года, т.е. ставку спот, которая будет на

рынке через год для бескупонной облигации выпущенной на год (например, номиналом 5 тыс. руб.).

19) Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в год по норме 5%, куплена по курсу 80. Определить текущую и полную доходность облигации.

20) Облигация номиналом 1000 руб. выпущена со сроком погашения через 4 года. Ежегодно по купонам выплачивается 6% от номинала. Определить средний срок облигации при выплате по купонам 1 раз и дважды.

21) Найти средний арифметический срок для облигаций с выплатами по купонам 5 и 6% от номинала, срок облигаций 10 лет.

22) Облигация выпущена сроком на 4 года. Ежегодно выплачивается по купонам 6% годовых. Рыночная процентная ставка 7%. Курс облигации 95. Определить средний срок дисконтированных платежей.

23) По данным задачи 9 рассчитать показатель изменчивости. Определить как изменится цена облигации если рыночная процентная ставка возрастет с 7 до 8%.

6.5 Контрольные вопросы

1. Что понимается под доходностью, какие формы могут иметь доходы?

2. Как измеряется степень доходности, название ставок доходности?

3. Назовите варианты определения доходности ссудных операций, формулы расчета.

4. Формулы расчета доходности учетных операций

5. Методика расчета доходности финансовых инструментов

6. Упрощенные формулы измерения доходности

7. Перечислите показатели доходности облигаций, их содержание

8. Как различаются методики расчета доходности облигаций в зависимости от их вида?

9. Раскройте содержание среднего арифметического срока платежей, формула расчета

10. Особенности расчета среднего срока дисконтированных платежей

11. Каково понятие кривой доходности, ее использование

12. Дайте определение ставки спот и форвардный ставки, их назначение

Тема 7. Измерители финансовой эффективности производственных инвестиций

7.1 Содержание основных показателей, методика расчета

Финансовый анализ производственных инвестиций заключается в измерении конечных финансовых результатов инвестиций, их доходности для инвестора.

В анализе в основном используют четыре, основные на дисконтировании, показатели:

- чистый приведенный доход,
- внутренняя норма доходности,
- дисконтный срок окупаемости,
- индекс доходности.

Чистый приведенный доход (N) рассчитывается как

$$N = R * a_{n;i} - К \tag{7.1}$$

где К – инвестиционные затраты;

a_n; i – коэффициент приведения постоянной ренты;

R – член потока доходов;

n – продолжительность периода поступления дохода;

i – ставка принятая для дисконтирования.

Инвестиционные затраты (капиталовложения) могут быть мгновенными или распределены во времени.

Во $2^{-м}$ случае под «К» понимается сумма инвестиций с начисленными процентами к концу срока инвестиций.

Внутренняя норма доходности находится на основе условия N = 0

$$R * a_{n;i} - К = 0 \tag{7.2}$$

Дисконтный срок окупаемости устанавливается из соотношения

$$K = R * a_{n_{ок};i} \tag{7.3}$$

Индекс доходности

$$U = \frac{R * a_{n;i}}{K} \tag{7.4}$$

7.2 Условия задач

1) Имеются два инвестиционных проекта, в котором потоки платежей (поступление с учетом капиталовложений) на конец года характеризуются следующими данными:

Проект	год					
	$1^{-ый}$	$2^{-ой}$	$3^{-ий}$	$4^{-ый}$	$5^{-ый}$	$6^{-ой}$
А	-100	-200	100	250	400	-
Б	-300	-150	200	300	400	300

Сравнить проекты по величине чистого приведенного дохода, если норматив доходности (ставка сравнения) принята на уровне 10%. Определить сроки окупаемости.

2) Проект предлагается реализовать за три года. Планируются следующие размеры и сроки инвестиций: в начале $1^{го}$ года единовременные 5 млн. руб., во $2^{м}$ году только равномерные расходы – 10 млн. руб., в конце $3^{го}$ года единовременные затраты – 3 млн. руб. Отдачу планируют получать 15 лет: в первые 3 года по 2 млн. руб., далее в течение 10 лет ежегодно по 6 млн. руб., в оставшиеся 3 года по 3 млн. руб.

Доходы поступают равномерно в пределах годовых интервалов. Ставка проведения - 5%. Окупятся ли капиталовложения?

3) Определить значение процентной ставки для проекта, рассчитанного на 3 года, требующего инвестиции в размере 30 млн. руб. и имеющего предполагаемые денежные поступления в размере 4, 10, 15 млн. руб.

4) Определить индекс доходности (рентабельности) по данным задач 1 и 2.

5) Инвестор вкладывает капитал в проект рассчитанный на 4 года при уровне налогообложения и инфляции на уровне 10% в год, рассчитывая на следующие ежегодные денежные потоки: выручка 2500 тыс. руб.; текущие затраты 1500 тыс. руб., амортизация 700 тыс. руб. Определить чистые денежные потоки для инвестора.

7.3 Контрольные вопросы

1. Основные финансовые критерии для оценки реальных инвестиций
2. Чистый приведенный доход: его свойства, методика расчета
3. Внутренняя норма доходности: содержание, методика расчета
4. Определение срока окупаемости инвестиций
5. Расчет индекса доходности

Тема 8. Актуарные расчеты

8.1 Финансовая эквивалентность в страховании

Актуарные расчеты – это система математических и статистических исчислений, применяемых в страховании, отражающая механизм образования и расходования страхового фонда в долгосрочных страховых операциях, связанных с продолжительностью жизни населения.

Актуарные расчеты построены на принципе финансовой эквивалентности обязательств страхователя и страховщика:

$$P = Sq \tag{8.1}$$

где P – премия уплачиваемая страхователем страховщику;

S – страховая сумма после наступления страхового события

q – вероятность наступления страхового события.

Формирование страхового фонда страховщиком производится на основе брутто-ставок и нетто-ставок, то есть платы с единицы страховой сумма.

Расчет единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие производимся по формуле:

$${}_nE_x = \frac{\ell x + n * V^n}{lx} * S \tag{8.2}$$

где ${}_nE_x$ – единовременная нетто-ставка на страхование на дожитие для лица в возрасте «х» лет при сроке страхования «n» лет;

ℓx+n – число лиц, доживших до окончания срока страхования;

ℓx – число лиц, заключивших договор в возрасте «х» лет;

V – дисконтный множитель;

S – страховая сумма

$${}_nE_x = \frac{Dx + n}{Dx} \tag{8.3}$$

где Dx+n и Dx – коммутационные числа (технические средства, без содержательной интерпритаци)

8.2 Условия задач

1) Мужчина в возрасте 60 лет заключает страховой договор на получение дополнительной пенсии до достижения 70 лет на сумму 1000 руб. Рассчитать единовременную нетто-ставку для ренты постнумерандо с учетом, что страховая компания использует годовую ставку 8%.

2) Рассчитать единовременные нетто-ставки по таблице коммутационных чисел:

а) по дожитии при условии x_{45}; n=5; S = 30 тыс. руб.

б) на случай смерти при x_{55}; n=5; S = 15 тыс. руб.

3) Рассчитать коэффициент рассрочки для мужчин в возрасте 40 лет, заключивших страховой договор на 5 лет

4) Определить стоимость отложенного на 25 лет ограниченного 5 годовыми аннунтета пренумерандо (годового и с ежемесячными выплатами) для мужчины в возрасте 30 лет.

5) Рассчитать актуарные стоимости нескольких вариантов аннутентов для сорокалетнего мужчины. Платежи ежегодные и ежемесячные, выплаты – пожизненные и ограниченные (срок 10 лет), немедленные и отложенные на 5 лет. Сумма годового платежа 1500 руб.

8.3 Контрольные вопросы

1. Сущность финансовой эквивалентности в страховании
2. Методика построения таблиц смертности и расчета страховых вероятностей
3. Понятие и назначение коммутационных функций
4. Методика расчета нетто-ставок и брутто-ставок
5. Определение стоимости страхового аннунтета

Учебные пособия по финансовой математике

1. Башарин Г. П. Начала финансовой математики. М.: Инфра-М, 1997

2. Вещенко Т. В. Математика финансового менеджмента М.: Финансы и статистика, 1996

3. Капитоненко В. В. Финансовая математика и ее приложения М.: Изд-во «Приор», 2000

4. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов. М.: Финансы и статистика, 1994

5. Кочетыгов А. А. Финансовая математика. Ростов- на Дону.: Феникс, 2004

6. Мелкумов Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика М.: Инфра-М, 2007

7. Малыхин В. И. Финансовая математика М.: Юнити-ДАНА, 2003

8. Финансовый менеджмент. Теория и практики (гл. 2) М.: Изд-во «Перспектива», 2004

9. Четыркин Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело ЛТД, 1998

10. Четыркин Е. М. Финансовая математика. М.: «Дело», 2006

11. Ширшов Е. В. И др. Финансовая математика М.: «Кнорус», 2007

Приложение

Коэффициенты наращения дискретных рент (сложные проценты)

Число периодов n	Процентная ставка (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,020000	2,050000	2,070000	2,090000	2,100000	2,110000
3	3,060400	3,152500	3,214900	3,278100	3,310000	3,342100
4	4,121608	4,310125	4,439943	4,573129	4,641000	4,709731
5	5,204040	5,525631	5,750739	5,984711	6,105100	6,227801
6	6,308121	6,801913	7,153291	7,523335	7,715610	7,912860
7	7,434283	8,142008	8,654021	9,200435	9,487171	9,783274
8	8,582969	9,549109	10,259803	11,028474	11,435888	11,859434
9	9,754628	11,026564	11,977989	13,021036	13,579477	14,163972
10	10,949721	12,577893	13,816448	15,192930	15,937425	16,722009
11	12,168715	14,206787	15,783599	17,560293	18,531167	19,561430
12	13,412090	15,917127	17,888451	20,140720	21,384284	22,713187
13	14,680332	17,712983	20,140643	22,953385	24,522712	26,211638
14	15,973938	19,598632	22,550488	26,019189	27,974983	30,094918
15	17,293417	21,578564	25,129022	29,360916	31,772482	34,405359
16	18,639285	23,657492	27,888054	33,003399	35,949730	39,189948
17	20,012071	25,840366	30,840217	36,973705	40,544703	44,500843
18	21,412312	28,132385	33,999033	41,301338	45,599173	50,395936
19	22,840559	30,539004	37,378965	46,018458	51,159090	56,939488
20	24,297370	33,065954	40,955492	51,160120	57,274999	64,202832
21	25,783317	35,719252	44,865177	56,764530	64,002499	72,265144
22	27,298984	38,505214	49,005739	62,873338	71,402749	81,214309
23	28,844963	41,430475	53,436141	69,531939	79,543024	91,147884
24	30,421862	44,501999	58,1766,71	76,789813	88,497327	102,17415
25	32,030300	47,727099	63,249038	84,700896	98,347059	114,41331
26	33,670906	51,113454	68,676470	93,323977	109,18177	127,99877
27	35,344324	54,669126	74,483823	102,72313	121,09994	143,07864
28	37,051210	58,402583	80,697691	112,96822	134,2994	159,81729
29	38,792235	62,322712	87,346529	124,13536	148,63093	178,39719
30	40,568079	66,438848	94,460786	136,30754	164,49402	199,02088
35	49,994478	90,320307	138,23688	215,71075	271,02437	341,58955
40	60,401983	120,79977	199,63511	337,88245	442,59256	581,82607
45	71,892710	159,70016	285,74931	525,85873	718,90484	986,63856
50	84,579401	209,34800	406,52893	815,08356	1163,9085	1668,7712

Приложение 2.

Коэффициенты приведения дискретных рент (сложные проценты)

Число периодов n	Процентная ставка (%)					
	2	5	7	9	10	12
1	0,980392	0,952381	0,934579	0,917431	0,909091	0,892857
2	1,941561	1,859410	1,808018	1,759111	1,735537	1,690051
3	2,883883	2,723248	2,624316	2,531295	2,486852	2,401831
4	3,807729	3,545951	3,387211	3,239720	3,169865	3,037349
5	4,713460	4,329477	4,100197	3889651	3,790787	3,604776
6	5,601431	5,075692	4,766540	4,485919	4,355261	4,111407
7	6,471991	5,786373	5,389289	5,032953	4,868419	4,563757
8	7,325481	6,463213	5,971299	5,534819	5,334926	4,967640
9	8,162237	7,107822	6,515232	5,995247	5,759024	5,328250
10	8,982585	7,721735	7,023582	6,417658	6,144567	5,650223
11	9,786848	8,306414	7,498674	6,805191	6,495061	5,937699
12	10,575341	8,863252	7,942686	7,160725	6,813692	6,194374
13	11,348374	9,393573	8,357651	7,486904	7,103356	6,423548
14	12,106249	9,898641	8,745468	7,786150	7,366687	6,628168
15	12,849264	10,379658	9,107914	8,060688	7,606080	6,810864
16	13,577709	10,837770	9,446649	8,312558	7,823709	6,973986
17	14,291872	11,274066	9,763223	8,543631	8,021553	7,119630
18	14,992031	11,689587	10,059087	8,755625	8,201412	7,249670
19	15,678462	12,085321	10,335595	8,950115	8,364920	7,365777
20	16,351433	12,462210	10,594014	9,128546	8,513564	7,469444
21	17,011209	12,821153	10,835527	9,292244	8,648694	7,562003
22	17,658048	13,163003	11,061240	9442425	8,771540	7,644646
23	18,292204	13,488574	11,272187	9,580207	8,883218	7,718434
24	18,913926	13,798642	11,469334	9,706612	8,984744	7,784316
25	19,5234,56	14,093945	11,653583	9,822580	9, 077040	7,843139
26	20,121036	14,375185	11,825779	9,928972	9, 160945	7, 895660
27	20,706898	14,643034	11,986709	10,026580	9,237223	7, 942554
28	21,281272	14,898127	12,137111	10,116128	9,306567	7, 984423
29	21,844385	15,141074	12,277674	10,198283	9,369606	8, 021806
30	22,396456	15,372451	12,409041	10,273654	9,426914	8,055184
35	24,998619	16,374194	12,947672	10,566821	9,644159	8,175504
40	27,355479	17,159086	13,331709	10,757360	9,779051	8,243777
45	29,490160	17,774070	13,605522	10,881197	9,862808	8,282516
50	31,423606	18,255925	13,800746	10,961683	9,914814	8,304498

Приложение 3.

Таблица смертности и стандартных коммутационных функций (мужчины, 9%)

x	l_x	q_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
18	1000000	0,00149	149	21199	244593	28,979	1003,6
19	99851	0,00173	173	19420	223393	30,23	974,7
20	99678	0,00196	195	17786	203973	31,982	943,8
21	99483	0,00216	215	16285	186188	32,272	911,9
22	99268	0,00234	232	14908	169903	32,005	879,6
23	99036	0,00249	247	13645	154994	31,171	847,6
24	98789	0,00263	260	12487	141349	30,130	816,4
25	98529	0,00277	273	11426	128862	29,037	786,3
26	98256	0,00293	288	10454	117435	28,100	757,2
27	97968	0,00312	306	9562,5	106982	27,372	729,1
28	97663	0,00333	325	8745,6	97419,2	26,718	701,8
29	97338	0,00356	347	7996,7	88673,6	26,118	675,1
30	96991	0,00381	370	7310,3	80676,9	25,553	648,9
31	96622	0,00405	391	6681,2	73366,6	24,825	623,4
32	96230	0,00425	409	6104,7	66685,4	23,803	598,6
33	95821	0,00445	426	5576,8	60580,7	22,768	574,8
34	95395	0,00465	444	5093,6	55003,9	21,730	552,0
35	94951	0,00487	462	4651,3	49910,3	20,781	530,3
36	94489	0,00514	486	4246,5	45259,0	20,025	509,5
37	94003	0,00550	517	3875,8	41012,6	19,557	489,4
38	93486	0,00595	556	3536,2	37136,7	19,303	469,9
39	92930	0,00649	603	3224,9	33600,5	19,202	450,6
40	92327	0,00708	654	2939,5	30375,6	19,093	431,4
41	91673	0,00770	706	2677,7	27436,1	18,916	412,3
42	90967	0,00831	756	2437,7	24758,5	18,584	393,4
43	90211	0,00888	801	2217,8	22320,8	18,068	374,8
44	89410	0,00943	843	2016,6	20103,0	17,446	356,7
45	88567	0,00997	883	1832,7	18086,4	16, 763	339,3
46	87684	0,01057	927	1664,6	16253,7	16, 142	322,5
47	86757	0,01126	977	1511,0	14589,2	15, 609	306,4
48	85780	0,01208	1036	1370,6	13078,2	15, 190	290,8
49	84744	0,01303	1104	1242,3	11707,6	14,850	275,6
50	83640	0,01409	1178	1124,8	10465,3	14,540	260,7
51	82461	0,01522	1255	1017,4	9340,48	14,207	246,2
52	81206	0,01637	1329	919,20	8323,06	13,805	232,0
53	79877	0,01754	1401	829,50	7403,85	13,348	218,2
54	78476	0,01872	1469	747,66	6574,35	12,841	204,8
55	77007	0,01997	1538	673,09	5826,69	12,332	192,0
56	75469	0,02136	1612	605,18	5153,60	11,859	179,7
57	73857	0,02293	1694	543,35	4548,42	11,430	167,8
58	72164	0,02470	1782	487,06	4005,07	11,037	156,4
59	70381	0,02665	1876	435,81	3518,01	10,655	145,3
60	68505	0,02871	1967	389,17	3082,20	10,250	134,7
61	66539	0,03080	2049	346,78	2693,04	9,799	124,4
62	64489	0,03296	2126	308,35	2346,25	9,324	114,6